

LES NOUVEAUX

Précis

BRÉAL

Physique

EXERCICES

MPSI

Énoncés

Solutions

Commentaires

J. BERGUA • P. GOULLEY
D. NESSI

Tout le nouveau programme





LES NOUVEAUX

Précis

BRÉAL

PHYSIQUE

MPSI

J. BERGUA • P. GOULLEY • D. NESSI

Professeurs en classes préparatoires scientifiques





1, rue de Rome - 93561 Rosny-sous-Bois cedex

LES NOUVEAUX

Précis

BRÉAL

Titres disponibles dans la filière MPSI

Mathématiques 1re année
- Analyse MPSI
- Algèbre et géométrie MPSI

Physique 1re année
- Mécanique MPSI
- Électromagnétisme MPSI
- Électrocinétique MPSI
- Optique MPSI - PCSI - PTSI
- Thermodynamique MPSI

Chimie 1re année
- Chimie MPSI

Exercices 1re année
- Mathématiques MPSI
- Physique MPSI

Maquette : Joëlle Parreau.
Couverture : Sophie Martinet.
Réalisation : Alpha-Edit.

ISBN 978 2 8429 19610

Avant-propos

Les **Nouveaux Précis Bréal** sont conçus pour apporter aux étudiants des classes préparatoires une aide efficace dans leur travail.

Ils ont pour objectif de dégager, à travers des énoncés variés et classiques, les méthodes qui permettent la **construction progressive et raisonnée** de la solution d'un exercice ou d'un problème. C'est pourquoi il est souhaitable de les utiliser tout au long de l'année, parallèlement à l'acquisition des connaissances.

Les exercices proposés ont été sélectionnés pour leur représentativité : ils permettent de présenter **l'ensemble des méthodes et des raisonnements** qui, une fois assimilés, doivent permettre de résoudre, sans trop de difficultés, des exercices analogues.

Ce volume traite **l'ensemble du programme de physique de première année MPSI.**

Chaque chapitre propose une série **d'exercices structurés** dont la **solution** est **très détaillée**, suivis de quelques exercices corrigés de réinvestissement.

Chaque exercice de la première catégorie est caractérisé par :

- un **énoncé** constitué de questions progressives ;
- **« Ce qu'il faut savoir »** : la liste des connaissances – en physique (« Points de cours ») et parfois en mathématiques (« Outils mathématiques ») – nécessaires pour traiter l'exercice ;
- **« Ce qu'il faut comprendre »** : l'analyse qui propose brièvement les chemins à suivre pour répondre efficacement aux questions posées. C'est un moment essentiel dans la recherche de la solution : assez brève, l'analyse doit précéder la mise en œuvre des calculs. Il nous paraît très important que la recherche de la solution passe systématiquement par cette étape. Il n'y a rien de plus stérile que de se lancer dans les calculs sans savoir de façon précise dans quel but ils sont entrepris…
- la solution proprement dite dans laquelle sont souvent rappelés et développés quelques **« Points cours »** dont une bonne compréhension est indispensable. Des **« Points méthodes »** (sur fond grisé) permettent d'affiner la réflexion : il s'agit soit de mises en garde afin d'éviter une erreur fréquente de raisonnement, soit le plus souvent d'explications supplémentaires justifiant le choix d'un théorème ou la pertinence d'un raisonnement. Des **« commentaires »** conduisent à une discussion des résultats obtenus et à une vérification de leur cohérence (recherche de cas ou de valeurs limites, approches différentes pouvant donner un autre éclairage…). Ces commentaires jouent un rôle comparable à l'analyse, mais cette fois après le développement des calculs : c'est une forme de contrôle des résultats obtenus.

Analyse et discussion, qui sont finalement les deux points les plus importants pour le physicien, sont aussi sans doute les étapes les plus difficiles à mettre en œuvre, mais leur bonne prise en compte facilitera considérablement la construction d'une solution structurée (et exacte…) de chaque exercice.

Nous espérons que cet ouvrage aidera les étudiants dans cette voie, dans la perspective d'une réussite aux concours. Nous accueillerons avec reconnaissance les remarques et les critiques des lecteurs, qui peuvent nous être adressées par courrier électronique à l'adresse suivante : **infos@editions-breal.fr.**

Les auteurs

Sommaire

B - FORCES CENTRALES ET SYSTÈMES DE DEUX POINTS MATÉRIELS

C - CHANGEMENTS DE RÉFÉRENTIELS

D - MOUVEMENTS DANS DES CHAMPS $\vec{E}$ ET $\vec{B}$

A - HYDROSTATIQUE ET GAZ PARFAIT

0

Rappels de mathématiques

Expression approchée d'une grandeur physique

On supposera dans ce mémento que toutes les fonctions que l'on manipule sont honnêtes et fréquentables par un physicien, c'est-à-dire continues et dérivables autant que les nécessités de calcul l'exigeront.

Dérivées

• Dérivée première $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

• Dérivée seconde $$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

Le physicien préfère les notations $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ pour les dérivées respectivement première et seconde par rapport à x de y.

Il utilise parfois la notation $\dot{y}$ pour $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ et $\ddot{y}$ pour $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$, dérivées respectivement première et seconde par rapport à t de $y(t)$.

• Dérivées d'une fonction composée

La dérivée par rapport à t de la fonction $y[x(t)]$ se met sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

• Dérivée d'une fonction réciproque

Soit $x(y)$ la fonction réciproque de $y(x)$, on a $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}$$

Différentielle

Soit f une fonction décrivant les variations d'une grandeur physique dépendant de x. Considérons une variation $\mathrm{d}x$ de x. On note $\mathrm{d}f$ l'application différentielle de f au point x, ou « différentielle de f », d'expression $$\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$$

La différentielle est une expression linéaire de l'accroissement $\mathrm{d}x$ de la variable ; géométriquement, elle donne l'équation de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$: $\mathrm{d}f = y_t - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Développement de Taylor

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!}f'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + h^n\varepsilon(h)$$

avec $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$. Si l'on considère l'accroissement $\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0)$ de la fonction f depuis le point d'abscisse x_0, celui-ci est donné, en première approximation (c'est-à-dire pour h petit) par la valeur prise par la différentielle.

Approximation des grandeurs physiques

Le développement de Taylor va nous être très utile en physique.

En effet, le physicien élabore des « modèles », correspondant à un comportement « idéal » pour lequel il existe des lois simples.

L'examen des écarts à ces lois, lorsqu'ils sont mesurables, permet d'accéder à la connaissance du phénomène complexe.

Exemples

Électronique : AO idéal = lim AO réel lorsque $\mu \to \infty$
avec μ coefficient d'amplification de l'AO.

Thermodynamique : gaz parfait = lim gaz réel lorsque $P \to 0$.

Mécanique newtonienne d'une particule de vitesse v : domaine de validité lorsque $v \ll c$ (vitesse de la lumière dans le vide).

Optique : propagation rectiligne de la lumière dans un milieu homogène : domaine de validité $\lambda \ll R$ (λ = longueur d'onde, R rayon du diaphragme). C'est l'approximation de l'optique géométrique qui permet de négliger le phénomène de diffraction par le diaphragme.

Dans certains cas l'utilisation du développement de Taylor-Young permet de modéliser le phénomène au voisinage de x_0.

• Approximation au premier ordre
Elle est obtenue en négligeant les termes au-delà du 1[er] ordre.
On approximera $f(x)$ par $f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$ soit $ax + b$.
C'est l'approximation linéaire du physicien : la courbe est remplacée par sa tangente.

• Approximation au second ordre
On approximera $f(x)$ par $f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(x_0)$
soit $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Dans ce cas, la courbe est approximée par une parabole.
Souvent, nous nous ramènerons au développement de Taylor-Young au voisinage de 0

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + x^n\varepsilon(x)} \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Les développements suivants doivent être connus (on se limite en général au second ordre) ; s'il faut poursuivre, on reprend la formule générale.

$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha - 1)\frac{x^2}{2}\cdots$ avec α positif ou négatif, entier ou fractionnaire.
$\sin x \approx \tan x \approx x\ldots$ (les termes suivants dans les deux cas sont du 3[e] ordre).
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}\cdots \quad \ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2}\cdots \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}\cdots$

Le physicien choisit d'approximer le résultat à un ordre donné et ne tient alors plus compte des termes suivants.

Exemple : champ de pesanteur $g(z)$ au voisinage du sol terrestre.

Expression générale de $g(z) = g_0 \cdot \left(\frac{R}{R+z}\right)^2$.

Cherchons une expression approchée au premier ordre pour $z \ll R$ de :

$$g(z) = g_0 \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{z}{R}}\right)^2 = g_0 \cdot \left(1+\frac{z}{R}\right)^{-2} \approx g_0 \cdot \left(1-\frac{2z}{R}\right).$$

Ainsi au sommet du Mont-Blanc (4 807 m), en prenant $g = g_0$, on a une incertitude relative de l'ordre de $1{,}5 \cdot 10^{-3}$.

Rassurons immédiatement ceux qui sont gênés de ne pas avoir pris le terme d'ordre 2. Un calcul rapide leur permettra de trouver :

$g(z) \approx g_0 \cdot \left(1 - \frac{2z}{R} + \frac{3z^2}{R^2}\right)$, ce qui ajoutera une incertitude relative de $1{,}7 \cdot 10^{-6}$.

On remarquera que le terme d'ordre 2 est très inférieur au terme d'ordre 1.

Ce résultat est très général : dans le développement de Taylor-Young, le terme d'ordre n est inférieur au terme d'ordre $(n-1)$, ce qui justifie en physique de prendre un nombre très limité de termes (souvent en fonction de la précision souhaitée, en n'oubliant pas que le physicien n'a aucun besoin d'une précision de calcul qui serait supérieure à celle de ses mesures !).

Résolution de quelques équations différentielles

Préliminaire : primitive d'une fonction

Soit F une primitive de f.

Elle est définie par $\boxed{F'(x) = f(x)}$

$$\boxed{F(x) - F(a) = \int_a^x f(u)\,du}$$

Le physicien qui ne veut pas s'embarrasser de précautions d'écriture écrira le plus souvent :

$$\boxed{F(x) - F(a) = \int_a^x f(x)\,dx}$$

Équation différentielle du premier ordre à variables séparables

Ce sont des équations du premier ordre pour lesquelles on peut :

– résoudre en $x'(t)$ $\quad x'(t) = \frac{dx}{dt} = f_1(x, t)$

– et séparer les variables $\quad \boxed{h(x)\frac{dx}{dt} = g(t)}$

par intégration par rapport à t (on recherche une primitive H de h et G de g)

$H(x) = G(t) + \text{cste}$.

Soit x_0 la valeur de x correspondant à $t = t_0$

$$\boxed{H(x) - H(x_0) = G(t) - G(t_0)}$$

Exemple : soit une particule de masse m soumise à son poids $\vec{P} = mg\vec{u_z}$ et à la résistance de l'air modélisée par la force $\vec{f} = -\lambda v^2\vec{u_z}$. On obtient $ma = m\dfrac{dv}{dt} = mg - \lambda v^2$ par projection de la relation fondamentale de la dynamique sur l'axe $z'z$. On peut séparer les deux variables v et t en mettant l'équation sous la forme :

$$\boxed{\frac{m\,dv}{mg - \lambda v^2} = dt}$$

Le premier membre n'est fonction que de v, le second que de t. Il suffira alors de trouver la primitive de chaque membre, soit pour le premier membre $\displaystyle\int_{v_0}^{v} \frac{m\,dv}{mg - \lambda v^2}$ et pour le second $\displaystyle\int_{t_0}^{t} dt$ avec v_0 la vitesse à l'instant t_0.

Équation linéaire du premier ordre à coefficients constants

La forme générale est $\boxed{ay'(t) + by(t) = h(t)}$ (E)

On appelle ***équation homogène*** l'équation sans le second membre :

$$ay'(t) + by(t) = 0$$

l'équation homogène est à variables séparables car on peut écrire :

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = -\frac{b}{a} = -\alpha \quad \text{d'où} \quad y_1(t) = Ae^{-\alpha t}.$$

La solution générale de l'équation complète est la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation complète.

Il ne reste plus qu'à trouver une solution particulière de (E) (peu importe laquelle, la plus simple fera l'affaire !).

– Si la fonction h est une constante notée c, une solution particulière est $y_2 = \dfrac{c}{b}$.

– Si h n'est pas une constante, « on se débrouille » comme on peut pour trouver une solution particulière. C'est assez simple pour les fonctions polynômes en t^n et pour les fonctions sinusoïdales où l'on peut procéder par identification.

Soit y_2 cette solution particulière.

On arrive alors à : $\boxed{y(t) = y_2(t) + Ae^{-\alpha t}}$

où A est une constante à déterminer à partir des conditions initiales.

> **Dans tous les cas, pour une équation du premier ordre, se rappeler qu'il y aura une constante à déterminer.**

Équation différentielle du second ordre linéaire, à coefficients constants

$$\boxed{ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = f(t)}$$

De la même manière que pour les équations du premier ordre :

la solution générale de l'équation complète est la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation complète.

Si f est une constante d, la solution particulière est évidente, c'est $x = \frac{d}{c}$. Sinon, en général, des considérations d'ordre physique donnent une solution particulière (la plupart du temps, elle représente le régime permanent qui s'établit pour t suffisamment grand).

• **Résolution de l'équation homogène**

Soit $ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0 \quad (1)$

On cherche alors des solutions de la forme $x(t) = Ae^{\alpha t}$ où $A, \alpha \in \mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$) car les mathématiciens montrent que la solution la plus générale est une combinaison linéaire de deux solutions de ce type.

Recherche des valeurs de α : $x'(t) = \alpha Ae^{\alpha t}$ et $x''(t) = \alpha^2 Ae^{\alpha t}$.

En reportant dans (1), il vient : $Ae^{\alpha t}(a\alpha^2 + b\alpha + c) = 0$.

L'équation du second degré dont α doit être solution est dite « **équation caractéristique** ».

Il y a trois cas possibles :

1. Discriminant positif soit $b^2 - 4ac > 0$

Il y a deux solutions α_1 et α_2 dans $\mathbb{R}$, on a donc :

$$\boxed{x = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t}} \quad A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

2. Discriminant nul soit $b^2 - 4ac = 0$

Il y a une racine double α dans $\mathbb{R}$ et dans ce cas :

$$\boxed{x = (A + Bt)e^{\alpha t}} \quad A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

(C'est un cas limite, physiquement sans grande signification.)

3. Discriminant négatif soit $b^2 - 4ac < 0$

Il y a deux solutions α_1 et α_2 dans $\mathbb{C}$: $\alpha = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$.

(On note i le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.) On a alors :

$$\boxed{x = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t}} \quad A \text{ et } B \in \mathbb{C}.$$

Seules des solutions réelles peuvent avoir une signification physique, α_1 et α_2 étant imaginaires conjuguées, on peut poser $\alpha = -\lambda \pm i\omega$ et dans ces conditions, les solutions $x(t)$ réelles sont de la forme

$$\boxed{\begin{aligned} x &= e^{-\lambda t}(C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t) \\ x &= De^{-\lambda t}\cos(\omega t + \phi) \\ x &= D'e^{-\lambda t}\sin(\omega t + \phi') \end{aligned}}$$

$C_1, C_2, D, D', \phi, \phi' \in \mathbb{R}$ $\quad \boxed{\lambda = \frac{b}{2a}}$ et $\boxed{\omega^2 = \frac{4ac - b^2}{2a}}$

Il ne reste plus qu'à ajouter une solution particulière de l'équation différentielle initiale et à déterminer les valeurs des constantes, à l'aide des conditions initiales…

Dans tous les cas, pour une équation du second ordre, se rappeler qu'il y a deux constantes à déterminer.

Éléments de calcul vectoriel

Produit scalaire de deux vecteurs

• **Définition – expression**

Soient $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ deux vecteurs non nuls de composantes respectives (X_1, Y_1, Z_1) (X_2, Y_2, Z_2) dans une base orthonormée $(\vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z})$. Soit α l'angle orienté des vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$.

$$\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = V_1 V_2 \cos\alpha = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2$$

• **Propriétés**

– *Module du vecteur* $\vec{V}$

$\vec{V} \cdot \vec{V} = V^2$

d'où $V = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$

– *Composantes du vecteur* $\vec{V}$ *sur un axe*

En remarquent que lorsqu'on écrit $\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = V_1 V_2 \cos\alpha$, $V_2 \cos\alpha$ représente la projection de $\vec{V_2}$ sur la direction de $\vec{V_1}$, la projection de $\vec{V}$ sur un axe Ox (resp Oy, Oz) de vecteur unitaire $\vec{u_x}$ (resp. $\vec{u_y}$, $\vec{u_z}$) s'écrit :

$$V_x = \vec{V} \cdot \vec{u_x}$$



(resp. $V_y = \vec{V} \cdot \vec{u_y}$ et $V_z = \vec{V} \cdot \vec{u_z}$)

– *Orthogonalité de deux vecteurs*

$$\vec{V_1} \perp \vec{V_2} \Leftrightarrow \vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = 0$$

– *Dérivée d'un produit scalaire*

Si $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ sont fonctions du temps, alors :

$$\frac{d}{dt}(\vec{V_1} \cdot \vec{V_2}) = \frac{d\vec{V_1}}{dt} \cdot \vec{V_2} + \vec{V_1} \cdot \frac{d\vec{V_2}}{dt}$$

Conséquence : soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire

$\vec{u} \cdot \vec{u} = u^2 = 1$

$\frac{du^2}{dt} = 2\vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = 0.$

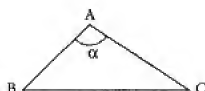
Le vecteur $\frac{d\vec{u}}{dt}$ est orthogonal au vecteur $\vec{u}$.

– Propriétés métriques dans les triangles

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$

$BC^2 = BA^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$\boxed{BC^2 = BA^2 + AC^2 - 2BA \cdot AC\cos\alpha}$$



Produit vectoriel de deux vecteurs

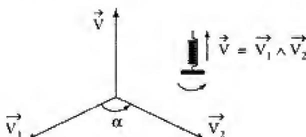
• **Définition :** soit $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ deux vecteurs non nuls. Soit α l'angle orienté des vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$.

> $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}$ est un vecteur orthogonal au plan défini par $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$, orienté de telle sorte que $(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V})$ forment un trièdre direct, de module $V_1V_2|\sin\alpha|$.

• **Autres méthodes pour définir le sens :**

– règles des 3 doigts de la main droite,

– tire-bouchon de Maxwell.



• **Propriétés**

– $\boxed{\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} = -\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_1}}$

– $\boxed{\overrightarrow{V_1} \text{ colinéaire à } \overrightarrow{V_2} \Rightarrow \overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{0}}$

– Soit une base orthonormée directe $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$

$\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{u_3}$; $\overrightarrow{u_2} \wedge \overrightarrow{u_3} = \overrightarrow{u_1}$; $\overrightarrow{u_3} \wedge \overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{u_2}$.

– Composantes de $\overrightarrow{V}$ dans une base cartésienne $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$

En utilisant les propriétés énoncées plus haut :

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} = (V_{1x}\overrightarrow{u_x} + V_{1y}\overrightarrow{u_y} + V_{1z}\overrightarrow{u_z}) \wedge (V_{2x}\overrightarrow{u_x} + V_{2y}\overrightarrow{u_y} + V_{2z}\overrightarrow{u_z})$$

$$\overrightarrow{V} = (Y_1Z_2 - Z_1Y_2)\overrightarrow{u_x} + (Z_1X_2 - X_1Z_2)\overrightarrow{u_y} + (X_1Y_2 - Y_1X_2)\overrightarrow{u_z}$$

(X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2) étant les composantes respectives de $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ dans la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$.

On peut remarquer que chaque terme correspond respectivement aux déterminants 2×2 :

$$\begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Z_1 & Z_2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} Z_1 & Z_2 \\ X_1 & X_2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ Y_1 & Y_2 \end{vmatrix}.$$

– Moyen mnémotechnique

Écrire les composantes colonnes des vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$:

$$\begin{matrix} \cancel{X_1} & \cancel{X_2} \\ Y_1 & Y_2 \\ Z_1 & Z_2 \end{matrix}$$

On obtient le 1[er] déterminant (composante sur $\overrightarrow{u_x}$) en barrant la 1[re] ligne puis les autres par permutation circulaire.

• **Dérivée d'un produit vectoriel**

Si $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ sont fonctions du temps

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}) = \frac{d\overrightarrow{V_1}}{dt} \wedge \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_1} \wedge \frac{d\overrightarrow{V_2}}{dt}$$

• **Calcul de l'aire d'un triangle ABC**

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}AB \times AC|\sin\alpha|$$

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}\right\|.$$

Produit mixte de trois vecteurs

• **Définition**

Soit $\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3}$ trois vecteurs. Le produit mixte $(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3})$ est défini par :

$$(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3}) = \overrightarrow{V_1} \cdot (\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3})$$

• **Propriétés**

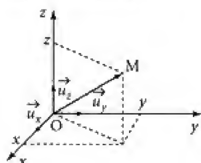
$$\overrightarrow{V_1} \cdot (\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3}) = (\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}) \cdot \overrightarrow{V_3} = \overrightarrow{V_2} \cdot (\overrightarrow{V_3} \wedge \overrightarrow{V_1})$$

Le produit mixte est nul si deux vecteurs sont colinéaires ou si les trois vecteurs sont coplanaires.

Systèmes de coordonnées et bases

Soit un point M étudié dans un référentiel $\mathcal{R}$. On munit $\mathcal{R}$ d'un repère d'origine O, d'axes orthogonaux Ox, Oy, Oz.

Base cartésienne



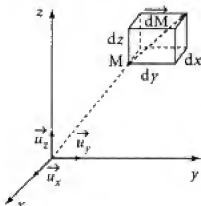
Les coordonnées de M sont x, y, z dans la base cartésienne $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_z$.

Propriété : $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_z$ **sont fixes par rapport au référentiel** $\mathcal{R}$.

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z}$$

Les données $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ constituent les **équations paramétriques du mouvement.**

Il est utile de connaître l'expression d'un petit déplacement $\overrightarrow{dM}$ dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.



$\overrightarrow{dM} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$.

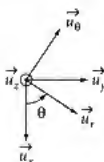
Cette expression permettra de déterminer le vecteur vitesse :

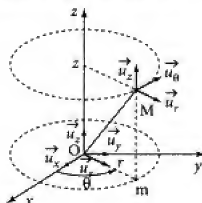
$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z.$$

Elle permet également d'exprimer une surface élémentaire $\delta S = dx\,dy$ (respectivement $dy\,dz$, $dx\,dz$) ainsi qu'un volume élémentaire $\delta\tau = dx\,dy\,dz$.

Base cylindrique

Elle s'obtient par rotation de $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_z$ d'un angle θ autour de l'axe Oz.

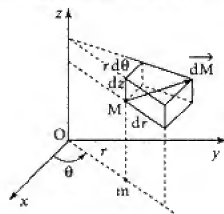




Les coordonnées cylindriques de M dans la base $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$ sont r, θ et z. En associant la base $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$ au point M, on obtient une base locale en mouvement par rapport à $\mathfrak{R}$.

Expression du vecteur position : $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$.

Les données $r(t)$, $\theta(t)$ et $z(t)$ constituent les équations paramétriques du mouvement.



Expression d'un petit déplacement de M dans $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$:

$\overrightarrow{dM} = \overrightarrow{dOM} = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z$.

Cette expression permet de déterminer le vecteur vitesse :

$$\vec{V} = \frac{\overrightarrow{dOM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z.$$

Elle permet également de déterminer :

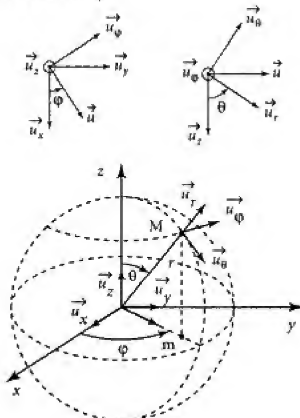
– une surface élémentaire $\delta S = r\,dr\,d\theta$,

– un volume élémentaire $\delta\tau = r\,dr\,d\theta\,dz$.

Cette représentation est à utiliser pour un système admettant une symétrie cylindrique (invariance par rotation autour de Oz).

Base sphérique

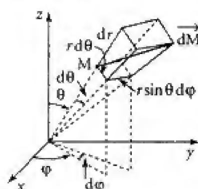
On l'obtient par une rotation de $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ d'un angle φ autour de Oz, suivie d'une rotation d'un angle θ autour de $\vec{u}_\varphi$.



Dans cette base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$, les coordonnées sphériques de M sont r, θ et φ.

Expression du vecteur position : $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$.

En associant la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ au point M, on obtient une base locale en mouvement dans $\mathcal{R}$.



Expression d'un petit déplacement de M dans $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$:

$\overrightarrow{dM} = \overrightarrow{dOM} = dr\vec{u}_r + r\,d\theta\vec{u}_\theta + r\sin\theta\, d\varphi\vec{u}_\varphi$.

Cette expression permet de déterminer le vecteur vitesse :

$$\vec{V} = \frac{\overrightarrow{dOM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + r\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\vec{u}_\varphi.$$

Elle permet également de déterminer :

– une surface élémentaire sur la sphère de rayon r : $\delta S = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$;

– un volume élémentaire : $\delta\tau = r^2 dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$.

Cette représentation est à utiliser pour un système admettant une symétrie sphérique (forces en $f\vec{u}_r$ par exemple).

Si θ = constante, on retrouve des coordonnées polaires pour $\rho = r\sin\theta$ et φ.

Si φ = constante, on retrouve des coordonnées polaires pour r, θ.

Opérateur gradient

Définition

Soit U une fonction scalaire d'un point M de l'espace. Lors du déplacement $\overrightarrow{dM}$ du point M de M en M', $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{dM}$, U varie de $dU = U(M') - U(M)$.

Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\,U$ est défini par $dU = \overrightarrow{\text{grad}}\,U \cdot \overrightarrow{dM}$.

Exemple : U peut être une énergie potentielle E_p : $dE_p = \overrightarrow{\text{grad}}\,E_p \cdot \overrightarrow{dM}$.

Propriétés

• Considérons une surface telle que quel que soit M appartenant à cette surface, $U(M)$ = constante. Alors pour tout petit déplacement sur cette surface,

$dU = 0 = \overrightarrow{\text{grad}}\,U \cdot \overrightarrow{dM}$.

$\overrightarrow{\text{grad}}\,U$ est donc perpendiculaire à cette surface.

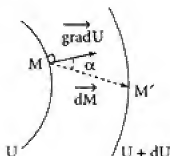
Exemple : dans le cas d'une énergie potentielle, la surface pour laquelle $E_p(M)$ = constante est appelée « équipotentielle ». $\overrightarrow{\text{grad}}E_p$ est donc perpendiculaire à la surface équipotentielle.

• Soit maintenant U et U + dU, deux surfaces équipotentielles différentes contenant M et M′ avec $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{dM}$.

$dU = \overrightarrow{\text{grad}}U \cdot \overrightarrow{dM}$.

$\overrightarrow{\text{grad}}U \cdot \overrightarrow{dM} > 0 \Leftrightarrow \cos\alpha > 0$ avec $\alpha \in [0, \pi/2]$.

Alors $dU > 0$ et $\overrightarrow{\text{grad}}U$ est orienté dans le sens des U croissants.



Expression dans les différentes bases

• Base cartésienne

$\overrightarrow{dM} = \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = d\overrightarrow{OM} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$.

Soient A, B, C les composantes de $\overrightarrow{\text{grad}}U$ sur $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$: $dU = Adx + Bdy + Cdz$.

D'autre part : $U = U(M) = U(x, y, z)$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

où $\frac{\partial U}{\partial x}\left(\text{resp. } \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right)$ représente la dérivée partielle de U par rapport à x, y et z restant constants (resp. par rapport à y, x et z restant constants, par rapport à z, x et y restant constants).

Par identification :

$$\overrightarrow{\text{grad}}U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{u}_z.$$

• Base cylindrique

La méthode est la même. Attention à l'expression : $\overrightarrow{dM} = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z$.

$$\overrightarrow{\text{grad}}U = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{u}_z.$$

• Base sphérique

Attention $\overrightarrow{dM} = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta + r\sin\theta d\varphi\vec{u}_\varphi$.

$$\overrightarrow{\text{grad}}U = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi.$$

Linéarité de la fonction $\overrightarrow{\text{grad}}$

$\overrightarrow{\text{grad}}(U_1 + U_2) = \overrightarrow{\text{grad}}U_1 + \overrightarrow{\text{grad}}U_2$

$\overrightarrow{\text{grad}}(\lambda U) = \lambda\overrightarrow{\text{grad}}U$.

Notation del ou nabla

On définit l'opérateur del ou nabla, en coordonnées cartésiennes par :

$$\vec{\nabla} = \vec{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{u}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Appliqué à la fonction scalaire U(M) :

$$\vec{\nabla} U(M) = \vec{u}_x \frac{\partial U}{\partial x} + \vec{u}_y \frac{\partial U}{\partial y} + \vec{u}_z \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Coniques

Équations des coniques en coordonnées polaires
$(r = OM > 0, \theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}))$

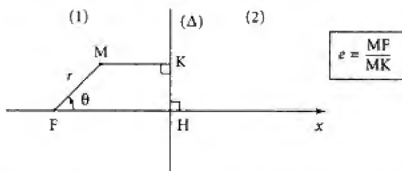
Soit un point F appelé foyer et une droite (Δ) appelée directrice associée (F ∉ (Δ)). Une conique est le lieu des points dont le rapport des distances à F et à la droite (Δ) est constant. Ce rapport est appelé excentricité e de la conique.

Suivant les valeurs de e, on distingue le type de conique :

$e < 1$	$e = 1$	$e > 1$
ellipse	parabole	hyperbole

La droite (Δ) divise le plan en deux régions notées (1) et (2).

- 1[er] cas : le point M de la conique appartient à la région (1).



$$e = \frac{MF}{MK}$$

Cherchons l'équation de la branche de conique appartenant à cette région du plan en coordonnées polaires :

$$MK = FH - r\cos\theta$$

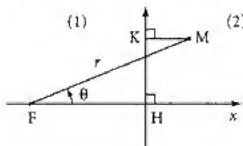
$$e = \frac{r}{FH - r\cos\theta}$$

$$r(1 + e\cos\theta) = e \times FH.$$

On pose $e \times FH = p$: paramètre de la conique

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

• 2ᵉ cas : le point M de la conique appartient à la région (2).



$$e = \frac{MF}{MK} = \frac{r}{r\cos\theta - FH},$$

$$r(1 - e\cos\theta) = -eFH$$

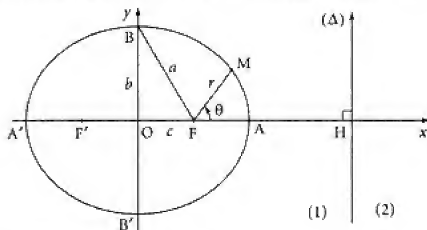
$$r = \frac{p}{-1 + e\cos\theta}$$

équation de la branche de conique appartenant à la région du plan ne contenant pas F.

Étude de différentes coniques

• $e < 1$: **ellipse**

L'ellipse possède un centre de symétrie O et deux foyers F et F′ ($OF = OF' = c$)
FOF′ est l'axe focal de l'ellipse.
On définit son demi grand axe $OA = OA' = a$, son demi petit axe $OB = OB' = b$.



$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \qquad e = \frac{c}{a} \qquad p = \frac{b^2}{a} = a(1 - e^2)$$

– *Son équation en coordonnées polaires* est :

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$ avec $e < 1$ $\theta \in [0, 2\pi]$ (l'ellipse appartient à la région (1)).

Pour $\theta = 0$ $\quad r_{min} = \dfrac{p}{1 + e}$

$\theta = \pi$ $\quad r_{max} = \dfrac{p}{1 - e}$

$r_{max} + r_{min} = 2a$ ce qui permet de retrouver $p = a(1 - e^2)$.

– *Aire de l'ellipse* $\boxed{\mathcal{A} = \pi ab}$

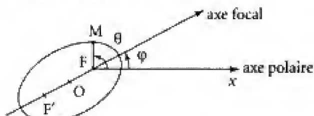
– *Remarque : choix de l'axe polaire*

L'axe focal F'OF n'est pas forcément confondu avec l'axe polaire.

Si l'axe focal fait un angle φ avec l'axe polaire, l'équation de l'ellipse en polaire s'écrit :

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \varphi)}}$$

On retrouve que pour $\theta = \varphi$, $r = \dfrac{p}{1+e} = r_{\min}$, ce qui caractérise le point A qui appartient bien évidemment à l'axe focal.

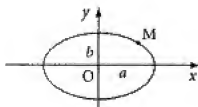


Application : mouvement des planètes autour du Soleil.

Si le texte du problème n'impose pas d'axe polaire, on choisira celui-ci confondu avec l'axe focal.

– *Équation cartésienne de l'ellipse*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$



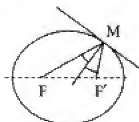
– *Définition géométrique de l'ellipse*

C'est le lieu des points M tels que :

$$\boxed{MF' + MF = 2a}$$

– *Propriété géométrique*

La tangente en un point M de l'ellipse est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{F'MF}$.



• $e > 1$: **hyperbole**

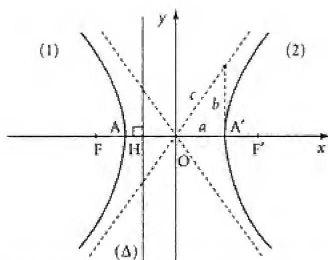
L'hyperbole possède un centre de symétrie O et deux foyers F et F'.

On définit toujours $a = OA = OA'$

$c = OF = OF'$.

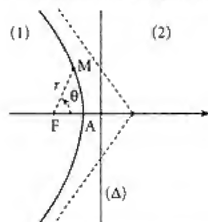
On a toujours : $e = \dfrac{c}{a}$; $p = a(e^2 - 1)$.

Par contre $a^2 = -b^2 + c^2$.



En physique, le point matériel en mouvement ne décrit qu'une des branches de l'hyperbole.

– Si la branche décrite appartient à la région (1) :

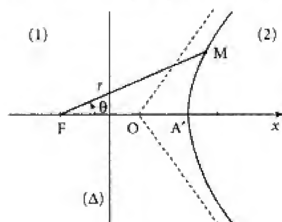


$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

les asymptotes sont définies par $\cos\theta = -\frac{1}{e}$.

Applications : mouvement d'une sonde spatiale, attraction électrostatique.

– Si la branche décrite appartient à la région (2) :



(2)

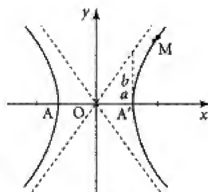
$$r = \frac{p}{-1 + e\cos\theta}$$

les asymptotes sont définies par $\cos\theta = \frac{1}{e}$.

Application : répulsion électrostatique (diffusion Rutherford).

– *Équation cartésienne de l'hyperbole*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



– *Équation des asymptotes*

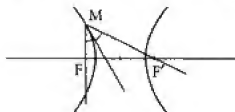
$$y = \pm\frac{b}{a}x.$$

– *Définition géométrique de l'hyperbole*

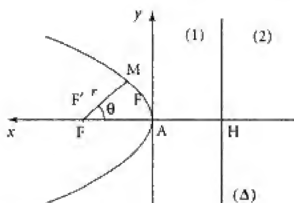
C'est le lieu des points M tels que $|MF' - MF| = 2a$

– *Propriété géométrique*

La tangente en un point M est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{F'MF}$



• $e = 1$: **parabole**



– *Équation en coordonnées polaires*

$r = \dfrac{p}{1 + \cos\theta}$ car la parabole appartient à la région (1) de l'espace.

$\theta \in]-\pi, \pi[$

$FA = a = AH$; $p = 2a$.

Application : mouvement de certaines comètes.

– *Équation en cartésienne*

$$y^2 = 2px$$

Partie 1

Chapitre

1

Mécanique 1

101 Risque de collision au freinage

1. Une voiture roule à une vitesse constante V_0 en ligne droite. Au temps $t = 0$, le conducteur aperçoit un obstacle, mais il ne commence à freiner (avec une décélération constante de 7,5 m · s^{-2}) qu'au bout d'un temps $\varepsilon = 0{,}6$ s. Calculer la distance parcourue par le véhicule depuis l'instant initial jusqu'à l'arrêt.

Application numérique : $V_0 = 54$ km · h^{-1}, puis $V_0 = 108$ km · h^{-1}.

2. Deux voitures se suivent sur une route droite, à une distance d, et roulent à la même vitesse constante V_0. À l'instant $t = 0$, la première voiture commence à freiner avec une décélération a, la seconde voiture ne commence à freiner qu'au temps $t = \varepsilon = 0{,}6$ s avec une décélération b.

Quelle condition doit satisfaire d pour que la seconde voiture s'arrête en arrière de la première ?

Application numérique : $V_0 = 108$ km · h^{-1}, $a = 7{,}5$ m · s^{-2} et $b = 6$ m · s^{-2}.

La condition trouvée est-elle suffisante pour garantir qu'il n'y aura pas collision entre les deux voitures (pour des valeurs différentes de V_0, ε, a et b...) ?

Pourquoi cette condition est-elle suffisante avec les données numériques fournies ?

1. Ce qu'il faut savoir

- Mouvement à accélération constante.
- Équation horaire.

2. Ce qu'il faut comprendre

- Il est astucieux de résoudre la première question en tenant compte de la deuxième : on prendra des notations telles qu'il ne soit pas nécessaire de refaire plusieurs fois le même calcul.
- Pour la deuxième question, il faut prendre en compte les différentes phases du mouvement, avec des conditions initiales pertinentes.

3. Solution

1. On peut prendre l'origine des abscisses à la position de la voiture à la date $t = 0$: elle parcourt une distance $x_1 = V_0\varepsilon$ avant de freiner – avec une accélération $-a$ (a constante > 0) à partir de la date $t_1 = \varepsilon$.

Pour $t > t_1$, le mouvement est caractérisé par une vitesse :

$$V = \dot{x} = -a(t - t_1) + V_0$$

et une position

$$x = -\frac{1}{2}a(t - t_1)^2 + V_0(t - t_1) + x_1 \quad (1)$$

compte tenu des conditions initiales ci-dessus.

L'arrêt est obtenu lorsque V = 0, soit $t - t_1 = \frac{V_0}{a}$.

En reportant cette valeur dans l'expression de $x(t)$, on obtient la distance d'arrêt D :

$$D = -\frac{1}{2}a\left(\frac{V_0}{a}\right)^2 + V_0\frac{V_0}{a} + x_1\,;$$

$$\boxed{D = \frac{V_0^2}{2a} + V_0\varepsilon}$$

Application numérique :

$V_0 = 54\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1} = 15\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, d'où : **D = 24 m.**

$V_0 = 108\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1} = 30\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, d'où : **D = 78 m.**

2. L'équation horaire de la première voiture est donnée par la relation (1), en faisant $t_1 = 0$ et $x_1 = 0$:

$$x(t) = -\frac{1}{2}at^2 + V_0t\,;$$

et elle s'arrête à l'abscisse $x_2 = x\left(\frac{V_0}{a}\right)$, soit :

$$x_2 = \frac{V_0^2}{2a}.$$

À la date $t = 0$, la seconde voiture était à l'abscisse $-d$, et à la date $t_1 = \varepsilon$, elle était donc à l'abscisse $x_1 = -d + V_0\varepsilon$.

La relation (1) donne alors pour la seconde voiture une position (avec a remplacé par b) :

$$x'(t) = -\frac{1}{2}b(t - t_1)^2 + V_0(t - t_1) + V_0\varepsilon - d\,;$$

ce qui donne une distance x'_2 parcourue jusqu'à l'arrêt (à la date $t = t_1 + \frac{V_0}{b}$) :

$$x'_2 = \frac{V_0^2}{2b} + V_0\varepsilon - d.$$

La condition demandée correspond à $x'_2 < x_2$ (on néglige les dimensions des voitures, assimilées à des points matériels...), soit :

$$\frac{V_0^2}{2b} + V_0\varepsilon - d < \frac{V_0^2}{2a}\,;$$

$$\boxed{d > \frac{V_0^2}{2}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) + V_0\varepsilon}$$

Soit, avec les valeurs données : $d > $ **33 m.**

Cette condition n'est pas suffisante : il suffit d'imaginer une situation telle que $b > a$, avec $d < V_0\varepsilon$.

La seconde voiture heurte la première avant même le début de son freinage, alors que la condition trouvée peut être vérifiée !

Mais si $b < a$, la condition trouvée est effectivement suffisante. En effet, la seconde voiture se rapproche alors constamment de la première (la différence des vitesses $\dot{x}' - \dot{x}$ reste toujours positive ou nulle) : c'est donc lorsqu'elles sont arrêtées que leur distance d est minimale.

102 Projectile soumis au frottement de l'air

Un projectile M de masse m est lancé dans un plan vertical (Oxz) avec une vitesse initiale $\vec{V_0}$ faisant un angle θ avec l'horizontale Ox. Ce référentiel, lié à la surface de la Terre, sera supposé galiléen, et l'accélération $\vec{g}$ de la pesanteur constante. Ce projectile est soumis de plus à une force de frottement due à l'air, force que l'on peut mettre sous la forme $\vec{F_f} = -k \cdot \vec{V}$ avec $k > 0$ et $\vec{V}$ vitesse instantanée du projectile.

1. Établir les équations du mouvement : on introduira la constante de temps $\tau = \dfrac{m}{k}$. Montrer que la trajectoire du projectile admet une asymptote verticale, et que sa vitesse tend vers une limite $\vec{V_l}$ que l'on précisera.
Exprimer alors les vitesses et position du mobile en fonction de t, τ, θ, V_0 et V_l.

2. Calculer le temps t_s nécessaire au projectile pour atteindre le sommet S de sa trajectoire, et donner la position de S.

Application numérique : $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, $V_0 = V_l$: calculer l'altitude de S, et comparer à l'altitude atteinte lorsqu'on néglige le frottement de l'air.

1. Ce qu'il faut savoir

Point de cours

• Loi fondamentale de la dynamique.

Outil mathématique

• Résolution d'équation différentielle du premier ordre avec second membre.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. On appliquera la loi fondamentale de la dynamique au projectile M assimilé à un point matériel. La vitesse limite peut être trouvée directement en cherchant à quelle condition l'accélération $\vec{a}$ s'annule. On pourra intégrer l'équation différentielle sous sa forme vectorielle et projeter les expressions obtenues pour $\vec{V}$ et $\overrightarrow{OM}$.

2. À cause du freinage dû à l'air, la trajectoire étudiée doit se situer « au-dessous » de la trajectoire parabolique « classique » obtenue en l'absence de frottement.

3. Solution

1. La loi fondamentale de la dynamique appliquée au point M à un instant t s'écrit $m\vec{a} = m\vec{g} - k\vec{V}$. On trouve directement que $\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{V} = \overrightarrow{\text{constante}}$.

Ce qui est réalisé pour $m\vec{g} - k\vec{V} = \vec{0}$ soit $\boxed{\vec{V}_l = \frac{m\vec{g}}{k}}$

ou encore en posant $\tau = \frac{m}{k}$ $\boxed{\vec{V}_l = \tau\vec{g}}$

Point méthode

En écrivant le principe fondamental sous la forme $\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \Sigma\vec{F}$, on obtient directement une équation différentielle en $\vec{V}$:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t} = m\vec{g} - k\vec{V}}$$

Résolvons maintenant l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}\vec{V} = \vec{g} \quad \text{soit en posant } \tau = \frac{m}{k}:$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t} + \frac{\vec{V}}{\tau} = \frac{\vec{V}_l}{\tau}.$$

Résolvons l'équation différentielle vectorielle :

$$\vec{V}(t) = \vec{V}_l + \vec{A}e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Le vecteur $\vec{A}$ est défini par la condition initiale $\vec{V} = \vec{V}_0$ à $t = 0$: $\vec{A} = \vec{V}_0 - \vec{V}_l$

$$\boxed{\vec{V}(t) = \vec{V}_l + (\vec{V}_0 - \vec{V}_l)e^{-\frac{t}{\tau}}} \quad (1)$$

En intégrant une nouvelle fois par rapport à t, on obtient :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \vec{V}_l t + (\vec{V}_0 - \vec{V}_l)(-\tau)e^{-\frac{t}{\tau}} + \vec{B}.$$

$\vec{B}$ est défini par la condition initiale $\overrightarrow{OM} = \vec{0}$ à $t = 0$:

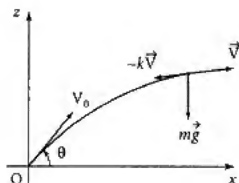
$$\vec{B} = \tau(\vec{V}_0 - \vec{V}_l)$$

d'où

$$\boxed{\overrightarrow{OM}(t) = \vec{V}_l t + \tau(\vec{V}_0 - \vec{V}_l)\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)} \quad (2)$$

d'où en projection sur $(\vec{u}_x, \vec{u}_z)$, avec $\vec{V}_l = -V_l \vec{u}_z$ (V_l est un module...) :

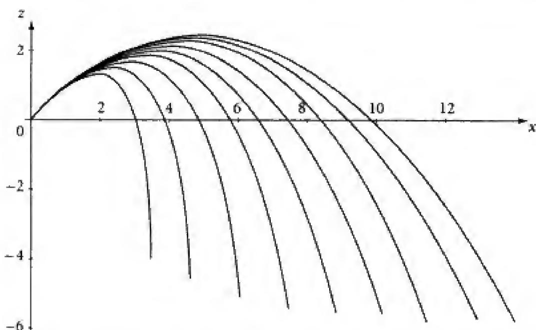
$$\vec{V}\begin{cases} V_x = V_0\cos\theta e^{-\frac{t}{\tau}} \\ V_z = -V_l + (V_0\sin\theta + V_l)e^{-\frac{t}{\tau}} \end{cases}$$



On retrouve bien sûr que pour $t \to \infty$ $\vec{V} \to \vec{V}_l$

$$\overrightarrow{OM}\begin{cases} x = \tau V_0\cos\theta\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \\ z = -V_l t + \tau(V_0\sin\theta + V_l)\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \end{cases}$$

Lorsque $t \to \infty$, $x \to x_{\lim} = \tau V_0\cos\theta$ ce qui correspond bien à une asymptote verticale.



2. Le sommet S de la trajectoire est déterminé par $V_z = 0$, ce qui correspond à une date t_s telle que : $0 = -V_l + (V_0\sin\theta + V_l)e^{-\frac{t_s}{\tau}}$

soit :

$$t_s = \tau\ln\left[1 + \frac{V_0}{V_l}\sin\theta\right]$$

et, en reportant :

$$x_s = \tau V_0 \cos\theta \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{V_0}{V_l}\sin\theta} \right)$$

$$z_s = -\tau V_l \ln\left(1 + \frac{V_0}{V_l}\sin\theta\right) + \tau(V_0 \sin\theta + V_l) \cdot \left(1 - \frac{V_l}{V_0 \sin\theta + V_l}\right)$$

$$z_s = \tau V_0 \sin\theta - \tau V_l \ln\left(1 + \frac{V_0}{V_l}\sin\theta\right)$$

si $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $V_0 = +V_l$, il vient :

$$\begin{cases} x_s = 0 \\ z_s = \tau V_l - \tau V_l \ln 2 = \tau V_l (1 - \ln 2) \end{cases}$$

En l'absence de tout frottement de l'air, le mouvement sur l'axe Oz devient :

$$\ddot{z} = -g$$

$$\dot{z} = -gt + V_0, \text{ d'où } \quad t_{s'} = \frac{V_0}{g}$$

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 t$$

et $$z_{s'} = z(t_{s'}) = \frac{V_0^2}{2g}.$$

Pour comparer les altitudes de S et S', exprimons z_s en fonction de V_0 et g :

$$\left(V_l = V_0 \text{ et } \tau = \frac{m}{k} = \frac{V_l}{g} = \frac{V_0}{g}\right) : z_s = \frac{V_0^2}{g}(1 - \ln 2)$$

d'où :

$$\frac{z_s}{z_{s'}} = 2(1 - \ln 2) \# 0{,}6.$$

$z_s < z_{s'}$: le résultat est bien cohérent ; en présence de frottement le point matériel monte moins haut.

103 Deux mouvements sur la même trajectoire

A. Un mobile M décrit une hélice circulaire d'axe Oz, son mouvement étant défini en coordonnées cylindriques (r, θ, z) par les équations :

$$r = R \quad \theta = \omega t \quad z = H \cdot \left(1 - \frac{\theta}{2\pi}\right)$$

expressions dans lesquelles R, ω et H sont des constantes positives. On pourra poser $h = \frac{H}{2\pi}$. Le mobile part à l'instant $t = 0$, et fait un tour complet avant d'atteindre le plan $z = 0$.

1. Exprimer la vitesse $\vec{V}$ du mobile, dans la base associée aux coordonnées cylindriques. Préciser son module et son orientation.
Calculer la longueur de la trajectoire pour un tour du mobile.
Représenter la trajectoire dans un plan, en portant Rθ sur l'axe horizontal et z sur l'axe vertical.

2. Exprimer de même l'accélération $\vec{A}$ du mobile.

Que peut-on dire du produit scalaire $\vec{A} \cdot \vec{V}$? Quelle(s) conclusion(s) peut-on en tirer ?

B. Le mouvement de M est maintenant défini par les équations :

$$r = R \quad \theta = \frac{1}{2}at^2 \quad z = H \cdot \left(1 - \frac{\theta}{2\pi}\right)$$

a étant une constante positive.

1. Qu'y a-t-il d'inchangé et qu'y a-t-il de changé par rapport au mouvement précédent ?

2. Exprimer le vecteur vitesse dans la base des coordonnées cylindriques ; en déduire son module.

1. Ce qu'il faut savoir

- Vitesse et accélération en coordonnées cylindriques.

2. Ce qu'il faut comprendre

A. 1. Il s'agit de mettre la vitesse sous la forme $\vec{V} = V \cdot \vec{u_T}$ ($\vec{u_T}$ unitaire), en précisant chacun des deux termes.

Le système de coordonnées choisi facilitera l'interprétation géométrique, la grandeur V restant constante.

2. L'accélération $\vec{A}$ se déduira des expressions classiques de ses composantes en coordonnées cylindriques.

B. 1. Dans tout mouvement, on peut distinguer la trajectoire (parcours géométrique), et l'équation horaire du mobile sur celle-ci : dans le cas présent, seule l'équation horaire est modifiée…

2. Les calculs sont analogues à ceux du **A. 1.** La remarque précédente permet de prévoir une partie du résultat : le vecteur $\vec{u_T}$ est inchangé.

3. Solution

A. 1. La vitesse $\vec{V}$ a pour expression générale, dans la base des coordonnées cylindriques :

$$\vec{V} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{z}\,\vec{u}_z.$$

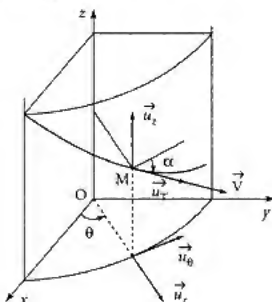
Ici $\dot{r} = 0$, $\dot{\theta} = \omega$ et $\dot{z} = \frac{dz}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = -\frac{H}{2\pi}\cdot\dot{\theta} = -h\omega$

d'où : $\boxed{\vec{V} = R\omega\,\vec{u}_\theta - h\omega\,\vec{u}_z}$

et $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_z$ étant orthogonaux :

$V = \|\vec{V}\| = \sqrt{(R\omega)^2 + (h\omega)^2}$

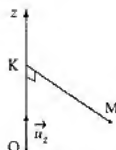
$\boxed{V = \omega\sqrt{R^2 + h^2}}$ (V = constante).



POINT COURS

Composition des mouvements :

Le mouvement peut se décomposer en un mouvement de translation selon Oz, de vitesse $\vec{V}_{tr} = \dot{z}\,\vec{u}_z$ et en mouvement de rotation autour de Oz à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ (vecteur rotation $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\,\vec{u}_z$).



Dans le plan $(\vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, la direction de $\vec{V}$ est donnée par $\tan\alpha = -\frac{h\omega}{R\omega} = -\frac{h}{R}$.

C'est donc une direction fixe de ce plan…

Écrivant $\vec{V} = V\cdot\vec{u}_T$ ($\vec{u}_T$ est donc orienté dans le sens du mouvement, puisque $V > 0$), le vecteur $\vec{u}_T$ a pour composantes sur $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_z$:

$$\vec{u}_T \left| \begin{array}{l} \cos\alpha = \dfrac{R\omega}{V} = \dfrac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}} \\ \sin\alpha = -\dfrac{h\omega}{V} = \dfrac{-h}{\sqrt{R^2 + h^2}}. \end{array} \right.$$

L'abscisse curviligne sur la trajectoire est déterminée par $\frac{ds}{dt} = V$, soit, puisque la vitesse V est constante :

$s = V \cdot t = \omega t\sqrt{R^2 + h^2}$ (avec $s(0) = 0$).

Pour un tour du mobile, $\theta = \omega t = 2\pi$, ce qui donne pour s :

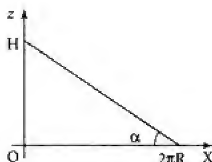
$$s_{(\theta = 2\pi)} = l = 2\pi\sqrt{R^2 + h^2}.$$

On peut représenter la trajectoire dans un plan, en posant $X = R\theta$.

On a alors $z = H - \frac{H}{2\pi} \cdot \theta = H - h \cdot \frac{X}{R}$.

La trajectoire est représentée par une droite de pente $-\frac{h}{R}$ qui fait donc un angle α avec l'axe OX.

Cette représentation correspond à « dérouler » la surface latérale du cylindre (axe Oz, $r = R$) sur lequel est tracée la trajectoire réelle du mobile $\left(X = R\theta = R\omega t = \int_0^t \vec{V} \cdot \vec{u_\theta} \cdot dt\right)$.



A. 2. L'accélération $\vec{A}$ a pour expression générale, dans la base des coordonnées cylindriques :

$$\vec{A} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{u_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\vec{u_\theta} + \ddot{z}\,\vec{u_z}$$

ce qui donne, en tenant compte de $\dot{r} = 0$, $\dot{\theta} = \omega$ et $\dot{z} = -h\omega$:

$$\boxed{\vec{A} = -R\omega^2\,\vec{u_r}}$$

> POINT COURS
>
> **On peut obtenir l'accélération en dérivant directement l'expression de la vitesse :**
>
> $$\vec{V} = \omega R\,\vec{u_\theta} - \omega h\,\vec{u_z} \Rightarrow \vec{A} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \omega R \cdot \frac{d\vec{u_\theta}}{dt}$$
>
> **avec $\frac{d\vec{u_\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\,\vec{u_r}$, il vient $\vec{A} = -\omega^2 R\,\vec{u_r}$.**

On constate immédiatement que $\vec{A} \cdot \vec{V} = 0$: l'accélération est donc purement normale, car le mouvement étudié ici est uniforme $\left(V = \text{cte.} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 0\right)$.

B. 1. La relation entre z et θ est inchangée : la trajectoire reste donc la même, et sa représentation plane (z en fonction de $R\theta$) également.

Le vecteur $\vec{u_T}$, défini à partir de la trajectoire, ne change pas, mais les expressions de V et $\vec{A}$ seront différentes, puisque l'équation horaire est différente.

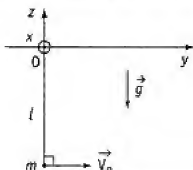
B. 2. Le calcul est le même qu'au A. 1., en tenant compte de la nouvelle expression de $\dot{\theta} = at$ (au lieu de ω...).

Donc $\qquad \vec{V} = \mathrm{R}at\,\vec{u_\theta} - hat\,\vec{u_z}$

et $\qquad V = at \cdot \sqrt{\mathrm{R}^2 + h^2}$.

104 Pendule simple

Un pendule simple est constitué d'une corde inextensible et sans masse de longueur l à laquelle est suspendu un point matériel M de masse m.



L'autre extrémité est fixée en un point O, et le point M se déplace dans le plan vertical Oyz.

À l'instant initial, on lance M, fil tendu, avec une vitesse horizontale $\vec{V_0} = V_0\vec{u_y}$.

Que peut-on dire du mouvement ultérieur de la masse m ?

1. Ce qu'il faut savoir

- Théorème de l'énergie mécanique.
- Loi fondamentale de la dynamique.
- Accélération pour un mouvement circulaire.

2. Ce qu'il faut comprendre

Le fil étant initialement tendu, la masse m amorce un mouvement circulaire de centre O et de rayon l. Son altitude augmentant elle gagne en énergie potentielle de pesanteur et corrélativement elle perd en énergie cinétique.

A priori, trois cas peuvent se produire.

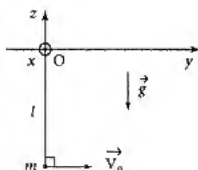
- La corde reste tendue et le mouvement du pendule est oscillatoire $\left(\theta_{max} < \frac{\pi}{2}\right)$.

• La corde reste tendue et le mouvement du pendule est révolutif, ce qui exige une énergie initiale suffisamment importante.

• La vitesse V_0 est trop faible pour qu'un mouvement révolutif ait lieu et trop forte pour que le mouvement soit oscillatoire. La corde finira par se détendre.

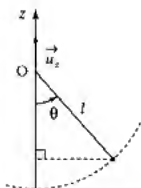
3. Solution

• On peut rapporter la vitesse V à V_0 et la tension T du fil à mg (T = mg à l'équilibre) et définir ainsi les variables réduites $\frac{V}{V_0}$ et $\frac{T}{mg}$, variables sans dimension qui vont dépendre de θ et du paramètre $\eta = \frac{V_0^2}{gl}$ (grandeur également sans dimension que l'on peut former à partir de V_0, g, l grandeurs caractérisant le problème physique).



• **Déterminons $\frac{V}{V_0} = f(\eta, \theta)$ tant que la corde reste tendue :**

La corde étant tendue, le point matériel décrit un arc de cercle et la tension $\vec{T}$ ne travaille pas ($\vec{T}$ perpendiculaire au déplacement). Il en résulte la conservation de l'énergie mécanique du système :



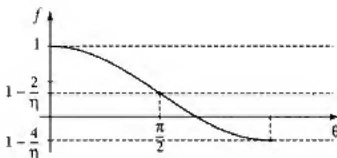
$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mV_0^2 - mgl$$

(origine de l'énergie potentielle prise en O)

$$E_p = -mgz \Rightarrow \frac{1}{2}mV^2 - mgl\cos\theta = \frac{1}{2}mV_0^2 - mgl.$$

Soit : $$\boxed{\left(\frac{V}{V_0}\right)^2 = 1 + \frac{2}{\eta}(\cos\theta - 1)} \quad (1)$$

Traçons la courbe $\theta \to f(\theta) = 1 + \frac{2}{\eta}(\cos\theta - 1)$.



• **Déterminons la tension $T = g(\eta, \theta)$ de la corde tendue :**

D'après la loi fondamentale de la dynamique, on a en projection sur $\vec{u}_r$: $ma_r = -T + mg\cos\theta$

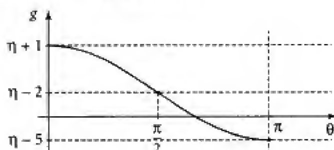
avec $a_r = -\dfrac{V^2}{l}$, d'où : $T = mg\cos\theta + m\dfrac{V^2}{l}$.

Soit $\dfrac{T}{mg} = \cos\theta + \dfrac{V^2}{gl}$

et avec (1) $\Rightarrow \dfrac{T}{mg} = \cos\theta + \eta\left[1 + \dfrac{2}{\eta}(\cos\theta - 1)\right]$.

Finalement : $\boxed{\dfrac{T}{mg} = 3\cos\theta + \eta - 2}$ (2)

Traçons la courbe $\theta \to g(\theta) = 3\cos\theta + \eta - 2$.



Discussion

■ **1er cas : mouvement révolutif.**

La corde doit être toujours tendue et la vitesse ne doit pas s'annuler ce qui exige :

$$\eta - 5 > 0 \quad (T > 0) \quad \text{et} \quad 1 - \frac{4}{\eta} > 0 \quad (V^2 > 0).$$

Soit en définitif : $\eta > 5$.

■ **2e cas : mouvement non révolutif et la corde reste toujours tendue.**

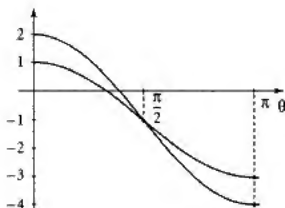
On observe alors des oscillations entre des valeurs extrêmes $\pm\theta_{max}$. Il faut donc que l'on ait : $V^2(\theta_{max}) = 0$ et $T(\theta) > 0$ pour $\theta \in (0, \theta_{max})$.

La fonction $V^2(\theta)$ s'annule pour $\theta = \theta_V$ tel que $\cos\theta_V = 1 - \dfrac{\eta}{2}$. De même, la fonction $T(\theta)$ s'annule pour $\theta = \theta_T$ tel que $\cos\theta_T = \dfrac{2}{3} - \dfrac{\eta}{3}$.

Ces deux valeurs n'existent que pour $\eta < 4$. D'autre part, la condition cherchée impose $\theta_V < \theta_T$ $(\theta \in [0, \pi])$, la vitesse devant s'annuler avant que la tension ne puisse le faire. Il faut donc que l'on ait :

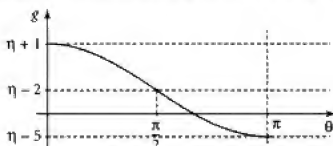
$$\cos\theta_V > \cos\theta_T \Rightarrow 1 - \frac{\eta}{2} > \frac{2}{3} - \frac{\eta}{3}$$

ce qui donne $6 - 3\eta > 4 - 2\eta \Rightarrow \eta < 2$. Dans ces conditions, on obtient un mouvement pendulaire d'amplitude inférieur à $\dfrac{\pi}{2}$ $\left(\theta_{max} = \text{Arcos}\left(1 - \dfrac{\eta}{2}\right)\right)$.

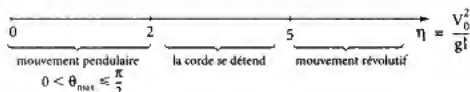


■ 3ᵉ cas : $2 < \eta < 5$.

La corde finit par se détendre pour une valeur de θ comprise entre $\frac{\pi}{2}$ et π. La tension s'annule avant la vitesse ($\theta_V > \theta_T$). La suite du mouvement est celui d'une particule de masse m dans le seul champ de pesanteur (mouvement parabolique) du moins tant que le fil reste détendu... La corde se détend pour $\theta = \theta_T = \text{Arcos}\left(\frac{2-\eta}{3}\right)$.



Conclusion



105 Pendule dont le fil casse

Un pendule simple – masse m, fil de longueur l, inextensible et de masse négligeable – est suspendu en un point fixe O et lâché sans vitesse initiale depuis une position où le fil est horizontal et tendu. Soit h la distance entre le point O et le sommet de la trajectoire décrite ensuite par la masse m.

1. Donner qualitativement le domaine de variations de h.
2. Déterminer h.

1. Ce qu'il faut savoir

- Conservation de l'énergie mécanique.
- Loi fondamentale de la dynamique.

2. Ce qu'il faut comprendre

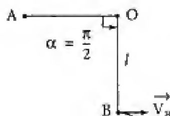
Il est inutile de déterminer l'équation de la trajectoire pour répondre à la question.

Entre le point de départ et le point atteint à l'instant où le fil casse, la masse m n'est soumise qu'à son poids et à la tension du fil qui ne travaille pas. La conservation de l'énergie mécanique permet de relier la vitesse et l'altitude.

À partir du moment où le fil casse, la masse uniquement soumise à son poids a une trajectoire parabolique. On pourra remarquer que lors de ce mouvement, la composante horizontale de la vitesse est conservée.

3. Solution

1. Notons α l'angle dont aura tourné le fil avant qu'il ne casse. Quand $\alpha \to \frac{\pi}{2}$: $h = l$.



La vitesse en B est horizontale. La masse m décrit une portion de parabole de sommet B.

Quand $\alpha \to \pi$: $h \to 0$.



La vitesse en B est nulle. La masse m décrit la verticale à B puisqu'elle n'est soumise qu'à son poids.

2.

POINT COURS

Considérons un point matériel soumis à des forces conservatives (donc dérivant d'une énergie potentielle. Leur travail élémentaire est $\delta W = -dE_p$) et à des forces non conservatives dont le travail élémentaire est $\delta W'$. Appliquons au point M le théorème de l'énergie cinétique :

$$dE_{cin} = \delta W + \delta W' = -dE_p + \delta W'$$

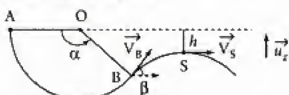
$$d(E_{cin} + E_p) = \delta W'.$$

$E_{cin} + E_p$ constitue l'énergie mécanique du point M.

La variation d'énergie mécanique du point M est égale au travail des forces non conservatives s'appliquant à M. Si ces forces non conservatives ne travaillent pas, alors l'énergie mécanique du point M se conserve.

Le mouvement de la masse m, soumise à son poids et à la tension du fil, s'effectue dans le plan vertical contenant le fil à l'instant initial : $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$.

Le poids est une force conservative. La tension $\vec{T}$ du fil ne travaille pas. Il y a donc conservation de l'énergie mécanique du point M.



$E_{cin} + E_p(m\vec{g}) = \text{constante}.$

POINT MÉTHODE

Calcul de l'énergie potentielle dont dérive une force conservative :

On reviendra à la définition $\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}}E_p$. Lorsque le problème est à un degré de dimension, on exprimera cette relation dans une base possédant un vecteur unitaire colinéaire à $\vec{f}$. Ainsi, pour le poids, $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u_z} = -\dfrac{dE_p}{dz}\vec{u_z}$

d'où $\quad E_p = mgz + \text{constante}.$

Choisissons A pour origine de l'énergie potentielle et écrivons l'énergie mécanique en A, B et S :

$$E_{cin} + E_p = 0 + 0 = \frac{1}{2}mV_B^2 - mgl\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2}mV_S^2 - mgh.$$

Or, entre B et S, où seul le poids intervient, la projection horizontale de la quantité de mouvement est conservée $\left(\dfrac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{g}\right)$ et : $V_S = V_B\cos\beta = V_B \cdot \sin\alpha$

d'où : $$h = \frac{V_S^2}{2g} = \frac{V_B^2\sin^2\alpha}{2g}.$$

Or d'après (1) : $$V_B^2 = 2gl \cdot \sin\alpha$$

soit : $$\boxed{h = l\sin^3\alpha}$$

Commentaire

Pour $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ et $\alpha = \pi$, on retrouve les résulats du 1.

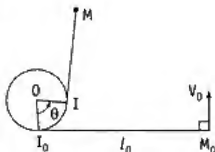
106 Enroulement d'un fil sur un cylindre

Un point matériel M, de masse m est mobile sans frottement sur un plan horizontal. Il est attaché à une ficelle (de masse négligeable et inextensible) qui s'enroule sur un cylindre d'axe vertical et de rayon a.

Initialement, la masse m est lancée avec une vitesse V_0 perpendiculaire à la ficelle, qui est tendue, et de longueur l_0. Soit $\theta(t)$ l'angle dont s'est enroulé le fil à l'instant t.

1. Préciser la vitesse – module et orientation – du mobile à la date t.

2. En déduire la loi $\theta(t)$ du mouvement. Au bout de combien de temps le point M touchera-t-il le cylindre ? Commenter.



1. Ce qu'il faut savoir

- Coordonnées polaires.
- Théorème de l'énergie cinétique.
- Loi fondamentale de la dynamique.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. On construira la base polaire $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$ permettant de repérer le point I(t) où la ficelle quitte le cylindre ($\vec{u}_r$ porté par $\overrightarrow{OI}$).

On écrira $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}$, et on montrera que la vitesse $\vec{V}$ du point M est perpendiculaire à IM et donc au fil.

On en déduira que la vitesse garde une norme constante V_0.

2. La loi $\theta(t)$ et l'instant t_1 se déduisent directement des résultats précédents.

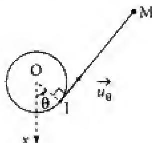
Il faudra s'assurer que la ficelle reste tendue au cours du mouvement. On cherchera donc à déterminer sa tension $\vec{T}(t)$, et le problème physique, tel qu'il est posé, n'a de sens que si $\|\vec{T}\|$ reste borné…

3. Solution

1. Dans le référentiel terrestre (supposé galiléen), le mobile est soumis à trois forces : son poids et la réaction du plan (qui se compensent), la tension $\vec{T}$ du fil qui incurve la trajectoire de M vers le cylindre.

La ficelle restant tendue la partie libre IM est un segment de droite tangent en I au cylindre.

Repérons ce point I par l'angle θ (*cf.* figure) et introduisons la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.



On a : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}$.

D'où : $\overrightarrow{V}(M) = \overrightarrow{V_I} + \frac{d}{dt}(\overrightarrow{IM})$.

Or $\overrightarrow{V_I} = a\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$ et $\overrightarrow{IM} = l\overrightarrow{u_\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}(\overrightarrow{IM}) = \dot{l}\overrightarrow{u_\theta} + l\cdot(-\dot{\theta}\overrightarrow{u_r})$.

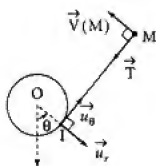
Finalement $\overrightarrow{V}(M) = (a\dot{\theta} + \dot{l})\overrightarrow{u_\theta} - l\dot{\theta}\overrightarrow{u_r}$.

Il reste à traduire que la longueur de la ficelle est invariable, soit :

$$l_0 = l(t) + a\theta(t) \Rightarrow 0 = \dot{l} + a\dot{\theta}.$$

Dès lors on obtient : $\overrightarrow{\mathbf{V}}(\mathbf{M}) = -l\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_r}$ (1)

Cette vitesse reste, à chaque instant, perpendiculaire au brin IM de la ficelle. Il en résulte que la tension $\overrightarrow{T}$ qu'exerce le fil sur la masse m ne travaille pas.



L'application du théorème de la puissance cinétique au point matériel M donne alors :

$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{\overrightarrow{T}} = 0$ (le poids et la réaction du support se compensent)

d'où E_c = cste et $\|\overrightarrow{V}(M)\| = V_0$.

En conclusion on a :

$$\boxed{\overrightarrow{V}(M) = -V_0\overrightarrow{u_r}} \quad (2)$$

2. La loi du mouvement s'obtient immédiatement en comparant (1) et (2).

$$l\dot{\theta} = V_0 \quad \text{et} \quad l + a\theta = l_0.$$

D'où en éliminant $l(t)$ entre ces deux équations :

$$(l_0 - a\theta)\dot{\theta} = V_0 \quad (3)$$

Équation différentielle en $\theta(t)$ qui s'intègre immédiatement (avec $l = l_0$ et $\theta = 0$ à $t = 0$) :

$$l_0\theta - a\frac{\theta^2}{2} = V_0 t$$

ou encore $\theta^2 - 2\frac{l_0}{a}\theta + \frac{2V_0}{a}t = 0 \Rightarrow \left(\theta - \frac{l_0}{a}\right)^2 = \frac{l_0^2}{a^2} - \frac{2V_0}{a}t$ (4).

La solution physique est alors donnée par (la ficelle s'enroule sur le cylindre et $\theta(t)$ croit avec t) :

$$\theta(t) = \frac{l_0}{a} - \frac{l_0}{a}\sqrt{1 - \frac{2V_0 at}{l_0^2}} \Rightarrow \boxed{\theta(t) = \frac{l_0}{a}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{2V_0 at}{l_0^2}}\right]} \quad (5)$$

Le point M arrivera au contact du cylindre (si le problème physique a un sens) lorsque $a\theta = l_0$, soit à l'instant t_1 tel que (*cf.* (4) ou (5)) :

$$\boxed{t_1 = \frac{l_0^2}{2V_0 a}}$$

Commentaires

On aurait pu essayer d'évaluer t_1 à partir d'arguments simples définissant des ordres de grandeur.

Une fois la ficelle totalement enroulée autour du cylindre, l'angle θ aura varié de $\Delta\theta = \frac{l_0}{a}$.

D'autre part la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ vaut $\frac{V_0}{l_0}$ sur un voisinage de $t = 0^+$.

On peut donc penser que le temps t_1 cherché va dépendre des grandeurs l_0, a, V_0 définissant le problème physique selon : $t_1 = \frac{\Delta\theta}{\dot{\theta}_0} = \left(\frac{l_0/a}{V_0/l_0}\right) = \frac{l_0^2}{aV_0}$.

On retrouve ainsi les variations pertinentes de t_1 avec l_0, a et V_0.

Il reste à remarquer que l diminuant $\dot{\theta}$ va augmenter et qu'en identifiant $t_1 = \frac{l_0^2}{aV_0}$ on aboutirait à une surévaluation de t_1. De façon plus précise, entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$, on aurait :

$$\begin{cases} \mathrm{d}\theta = -\frac{\mathrm{d}l}{a} \quad (\mathrm{d}\theta > 0 \text{ et } \mathrm{d}l < 0) \\ \dot{\theta} = \frac{V_0}{l}. \end{cases}$$

$$\text{D'où : } \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\theta}{\dot{\theta}} = \frac{\frac{-\mathrm{d}l}{a}}{\frac{V_0}{l}} = -\frac{1}{aV_0}l\,\mathrm{d}l \quad \text{et} \quad \int_0^{t_1}\mathrm{d}t = -\frac{1}{aV_0}\int_{l_0}^{0} l\,\mathrm{d}l \Rightarrow \boxed{t_1 = \frac{l_0^2}{2aV_0}}$$

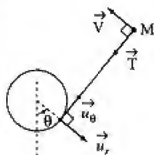
• La résolution précédente suppose que la ficelle demeure constamment tendue et que la situation physique envisagée reste réaliste. Il nous faut donc calculer la tension $T(t)$ de la ficelle.

À cet effet appliquons la loi fondamentale de la dynamique au point matériel M : $m\vec{a}(M) = \vec{T}$

or $\vec{V} = -V_0\vec{u}_r$ et $\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t} = -V_0\frac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t} = -V_0\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ (6).

D'où $\vec{T} = -mV_0\dot{\theta}\vec{u}_\theta$.

Posons $\vec{T} = -T\vec{u}_\theta \Rightarrow T = mV_0\dot{\theta}$.



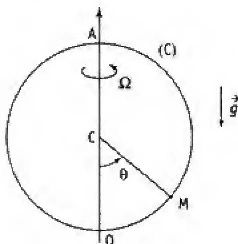
$$\text{Et d'après (3) : } T = \frac{mV_0^2}{l_0 - a\theta(t)} \Rightarrow \boxed{T = \frac{mV_0^2}{l_0\sqrt{1 - \frac{t}{t_1}}}}$$

On a bien $T > 0$ pour $0 < t < t_1$, et la ficelle reste effectivement tendue. Cependant l'expression de T nous montre que $T \to \infty$ quand $t \to t_1^-$ ce qui n'est pas cohérent (dans cette modélisation – point matériel M sans dimension... – la ficelle casserait avant de s'être complètement enroulée...).

On a pour $t = \frac{99}{100}t_1$ $l = \frac{l_0}{10}$ et $T = 10T_0$...

107 Anneau coulissant sur un cercle Analyse de portraits de phase

Une circonférence, de rayon a, est située dans un plan vertical et tourne à vitesse angulaire Ω constante autour de son diamètre vertical. Sur cette circonférence, un petit anneau M, assimilable à un point matériel de masse m, glisse sans aucun frottement. Sa position sur le cercle est repérée par l'angle θ que fait le rayon CM avec la verticale descendante (*cf.* figure).



Le référentiel terrestre est supposé galiléen, et l'accélération de la pesanteur est notée g.

En posant $\omega_0^2 = \dfrac{g}{a}$ et $\lambda = \dfrac{\Omega^2}{\omega_0^2}$, l'équation différentielle du mouvement de la masse m sur la circonférence peut se mettre sous la forme :

$\ddot{\theta}(t) = \omega_0^2 \sin\theta(\lambda\cos\theta - 1)$ (1)

l'équation de conservation de l'énergie mécanique dans le référentiel lié à la circonférence peut s'écrire :

$\dfrac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \omega_0^2 u(\theta) = K$ (constante) (2)

avec $u(\theta) = 1 - \cos\theta - \dfrac{1}{2}\lambda\sin^2\theta$.

$u(\theta)$ représente au facteur mga près l'énergie potentielle du système avec :
$m = 5 \cdot 10^{-2}$ kg ; $g = 9{,}8$ m $\cdot$ s^{-2} ; $a = 0{,}39$ m.

1. En analysant la courbe $\dfrac{\dot{\theta}}{\omega_0} = y(\theta)$ (fig. 2) donnée pour **une valeur particulière** de λ, montrer qu'il y a **dans ce cas** trois types possibles de mouvement de l'anneau. À l'aide de la figure 1, représentant $u(\theta)$ pour différentes valeurs de λ, montrer que chaque type de mouvement correspond à un domaine précis de l'énergie mécanique : préciser les limites de ces différents domaines.

2. La figure 3 représente $\dfrac{\dot{\theta}}{\omega}$ en fonction de θ avec $\omega = \omega_0\sqrt{1-\lambda}$.
Déterminer la valeur de λ correspondant à l'ensemble de ces courbes.
Pour quelles valeurs du coefficient $K = \dfrac{E_m}{mga}$ l'oscillation de l'anneau est-elle à peu près sinusoïdale ?

3. La figure 4 représente $\dfrac{\dot{\theta}}{\omega_0}$ en fonction de θ pour $\lambda = 1$. L'oscillation de l'anneau est-elle approximativement sinusoïdale ?

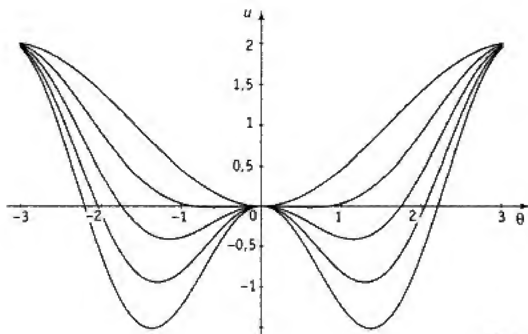


Fig. 1

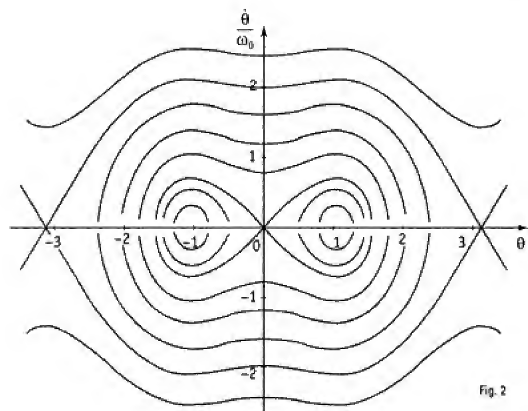


Fig. 2

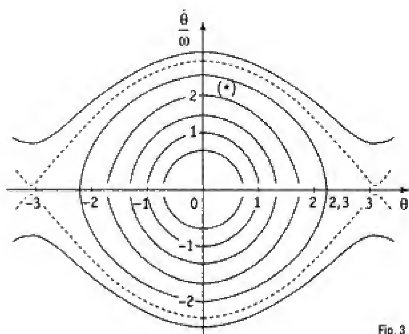


Fig. 3

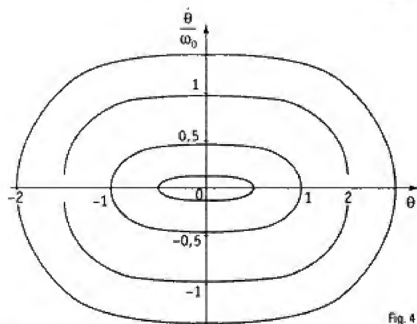


Fig. 4

1. Ce qu'il faut savoir

- Énergie cinétique – énergie potentielle – conservation de l'énergie – oscillations.
- Portrait de phase.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. Le portrait de phase $\dot{\theta} = f(\theta)$ permet d'étudier qualitativement un mouvement. Les courbes d'énergie potentielle permettent également, en utilisant la conservation de l'énergie mécanique, de prévoir des oscillations…

2. En choisissant des variables réduites, le portrait de phase d'une oscillation harmonique est un cercle…

3. Autour d'une position d'équilibre stable, les oscillations ne sont pas forcément sinusoïdales.

3. Solution

POINT COURS

Le portrait de phase représente $\dot{\theta}$ au facteur $\frac{1}{\omega_0}$ près en fonction de θ.

Des oscillations se caractérisent par un changement de signe de $\dot{\theta}$ en θ_{max} et donc par des courbes fermées.

Pour $\dot{\theta} > 0$, θ augmente jusqu'à θ_{max}, alors $\dot{\theta} = 0$ puis $\dot{\theta} < 0$, donc θ diminue jusqu'à $-\theta_{max}$ (s'il n'y a pas de frottement).

Au contraire, si $\dot{\theta}$ garde un signe constant, θ varie toujours dans le même sens, il n'y donc pas d'oscillations.

1. On reconnaît trois types de mouvements sur la figure 2.

(a) Courbes fermées, intérieures à la courbe en huit passant par l'origine. Il s'agit d'oscillations autour de positions d'équilibre différentes de $\theta = 0$.

(b) Courbes fermées, entourant l'origine. Il s'agit d'oscillations autour de la position d'équilibre $\theta = 0$.

(c) Courbes non fermées, $\dot{\theta}$ garde un signe constant : l'anneau fait le tour complet sur le cercle, $\theta(t)$ croît indéfiniment, $\dot{\theta}(t)$ est périodique.

Étudions les courbes d'énergie potentielle. Les minima correspondent aux positions d'équilibre.

Alors $\frac{du}{d\theta} = 0 = \sin\theta - \lambda\sin\theta\cos\theta$. L'anneau est donc en équilibre pour $\sin\theta = 0$ soit $\theta = 0$ ou π et pour $\theta = \pm\theta_e$ avec $\cos\theta_e = \frac{1}{\lambda}$, ces dernières positions n'existant que si $\lambda > 1$.

Le signe de $\frac{d^2u}{d\theta^2}$ permet d'établir la stabilité des positions d'équilibre.

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \cos\theta - \lambda\cos^2\theta + \lambda\sin^2\theta = \cos\theta + \lambda - 2\lambda\cos^2\theta$$

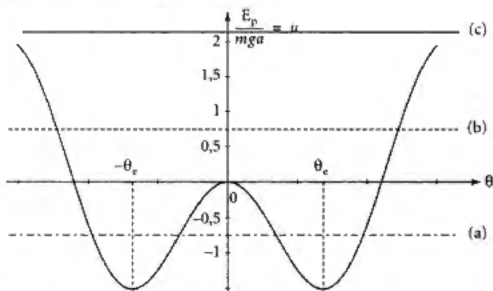
$\theta = \pi$ est une position d'équilibre toujours instable $\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)_{\theta=\pi} = -1-\lambda < 0$.

$\theta = 0$ est une position d'équilibre stable si $\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)_{\theta=0} = 1-\lambda > 0$ donc pour $\lambda < 1$.

$\theta_e = \text{Arccos}\frac{1}{\lambda}$ est une position d'équilibre stable si $\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)_{\theta_e} = \frac{1}{\lambda} + \lambda - \frac{2}{\lambda} = \lambda - \frac{1}{\lambda} > 0$ donc pour $\lambda > 1$, c'est-à-dire lorsque cette solution existe.

Les courbes de la figure 2 ont donc été tracées pour une valeur de $\lambda > 1$ qui permet d'observer des oscillations autour des positions d'équilibre θ_e et $-\theta_e$.

L'énergie potentielle a donc la forme suivante :



• Si $E_m < 0$, il y a possibilité d'oscillations autour des positions θ_e ou $-\theta_e$ → courbe (a).

> **POINT COURS**
>
> **E_m = constante est représentée par une droite horizontale. Or $E_m = E_{cin} + E_{pot}$ et $E_{cin} \geqslant 0$. Seuls les points tels que $E_m - E_{pot} \geqslant 0$, c'est-à-dire $E_{pot} \leqslant E_m$, sont possibles pour le système.**

• Si $0 < \dfrac{E_m}{mga} < 2$, il y a oscillations autour de $\theta = 0$ ⇒ courbes (b).

• Si $\dfrac{E_m}{mga} > 2$, l'angle θ peut prendre toutes les valeurs possibles, il y a mouvement révolutif → courbes (c).

2. Les courbes de la figure 3 correspondent à une seule cuvette de potentiel autour de l'origine donc $\lambda \leqslant 1$. Chaque courbe correspond à des conditions initiales, donc des valeurs de K, différentes.

On fait une mesure pour $\theta = 0$ et $\dot\theta = \dot\theta_{max}$ sur une courbe donnée (* par exemple sur la fig. 3) : $\frac{1}{2}\dot\theta^2_{max} = K$ car $u(0) = 0$, puis une mesure pour $\dot\theta = 0$ et $\theta = \theta_{max}$ sur la même courbe.

$\omega_0^2\left(1 - \cos\theta_{max} - \frac{1}{2}\lambda\sin^2\theta_{max}\right) = K.$

Pour $\theta = 0$ sur la courbe (*), on lit $\dfrac{\dot\theta_{max}}{\omega_0\sqrt{1-\lambda}} = 2$ et pour $\dot\theta_{max} = 0$, on lit sur la même courbe $\theta_{max} = 2{,}3$ rad.

de $\begin{cases} K = \frac{1}{2}\dot\theta^2_{max} = \frac{1}{2} \times 2^2 \times \omega_0^2(1-\lambda) \\ K = \omega_0^2\left(1 - \cos 2{,}3 - \frac{1}{2}\lambda\sin^2 2{,}3\right) \end{cases}$ on tire $\boxed{\lambda = 0{,}2}$

La figure 3 a donc été tracée pour $\lambda = 0{,}2$.

Point méthode

La conservation de l'énergie s'écrit : $\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \omega_0^2\left(1 - \cos\theta - \frac{1}{2}\lambda\sin^2\theta\right) = K.$

Pour θ petit, $1 - \cos\theta \sim \frac{\theta^2}{2}$; $\sin\theta \sim \theta.$

Alors $\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \omega_0^2\frac{\theta^2}{2}(1-\lambda) = K.$

Si l'on représente $\dot{\theta}$ en fonction de θ, on obtient une ellipse.

On a également $\frac{\dot{\theta}^2}{\omega^2} + \theta^2 = \frac{2K}{\omega^2}$ $(\lambda < 1$ et $\omega^2 = \omega_0^2(1-\lambda)).$

Si l'on représente $\frac{\dot{\theta}}{\omega}$ en fonction de θ, on obtient alors un cercle de rayon $\frac{\sqrt{2K}}{\omega}$.

On a choisi ici de représenter $\frac{\dot{\theta}}{\omega}$ (variable réduite) pour obtenir un cercle lorsque les oscillations sont sinusoïdales. On voit que l'on obtient des oscillations sinusoïdales pour des amplitudes θ_{max} inférieures à environ 1 rad ce qui correspond à $K \leqslant 0{,}39\,\omega_0^2$.

Soit une énergie mécanique $E_m = Kma^2 \leqslant 0{,}39 \times gma$.

Application numérique : $E_m \leqslant 0{,}075$ J.

3. La figure 4 représente $\frac{\dot{\theta}}{\omega_0}$ en fonction de θ.

Quelle que soit la valeur de K, les courbes ne sont manifestement pas des ellipses : l'oscillation de l'anneau n'est jamais sinusoïdale.

Ici la courbe qui représente $u(\theta)$ pour $\lambda = 1$ présente un « méplat » en 0 caractéristique d'une dérivée seconde $\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)_{\theta=0} = 0$. Le développement limité de u autour de $\theta = 0$ nous donne alors :

$$u(\theta) = u(0) + \left(\frac{du}{d\theta}\right)_{\theta=0}\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)_{\theta=0}\theta^2 + o(\theta^2)$$

$\left(\frac{du}{d\theta}\right)_{\theta=0} = 0$ puisque $\theta = 0$ est position d'équilibre

$\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)_{\theta=0} = 1 - \lambda = 0$ pour $\lambda = 1$

$u(\theta)$ n'est donc pas parabolisable et les oscillations ne sont pas sinusoïdales.

108 Ralentissement d'une voiture

Une automobile de masse $m = 10^3$ kg est équipée d'un moteur d'une puissance maximale $P_m = 50$ kW. Avec cette puissance, la voiture atteint la vitesse maximale $V_m = 144 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. En supposant que les forces de frottement que subit la voiture sont essentiellement dues à l'air, et de la forme $f = -kv^2$ (v étant la vitesse, et k une constante), calculer le temps τ nécessaire pour que, en roue libre (moteur débrayé), la voiture ralentisse de sa vitesse maximale jusqu'à la moitié de cette valeur. Quelle est la distance d parcourue pendant ce temps ?
Quelle distance la voiture parcourra-t-elle avant de s'arrêter ? Que pensez-vous de ce résultat ?

Solution

Lorsque le moteur est débrayé, la voiture est soumise uniquement à la force de freinage due à l'air (poids et réaction du sol se compensent). D'après le théorème du centre d'inertie : $m\dfrac{dv}{dt} = -kv^2$.

Équation à variable séparable que l'on intègre de 0 à τ, v variant de V_m à $\dfrac{V_m}{2}$

$$\tau = -\frac{m}{k}\int_{V_m}^{\frac{V_m}{2}} \frac{dv}{v^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{\tau = \frac{m}{kV_m}}$$

Déterminons k en appliquant le théorème de la puissance cinétique. Lorsque la voiture roule à vitesse constante V_m, la puissance du moteur sert à vaincre la force de frottement soit : $\dfrac{dE_{cin}}{dt} = 0 = P_m + P(f(V_m))$

d'où $\quad P_m = -P(f(V_m)) = -(-kV_m^2) \cdot V_m$

$$\text{soit} \quad k = \frac{P_m}{V_m^3} \quad \text{et} \quad \boxed{\tau = \frac{mV_m^2}{P_m}}$$

L'application numérique donne : $\tau = 32$ s.
La loi d'évolution de la vitesse se détermine de façon analogue. Pour un instant t quelconque :

$$t = -\frac{m}{k}\int_{V_m}^{v} \frac{dv}{v^2} \quad \text{soit} \quad t = -\frac{m}{k}\left(-\frac{1}{v} + \frac{1}{V_m}\right)$$

d'où $\quad \dfrac{1}{v} = \dfrac{1}{V_m}\left(1 + \dfrac{V_m k}{m}t\right) = \dfrac{1}{V_m}\left(1 + \dfrac{t}{\tau}\right)$.

Enfin $\quad v = \dfrac{V_m}{1 + \dfrac{t}{\tau}}$ expression d'où l'on déduit la distance parcourue : $x = \displaystyle\int_0^t v(t)dt$

$$x = \int_0^t \frac{V_m}{1 + \frac{t}{\tau}}dt \quad \text{soit} \quad x = \tau V_m \ln\left(1 + \frac{t}{\tau}\right).$$

Donc à l'instant $t = \tau$, la voiture aura parcouru une distance :

$$d = \tau V_m \ln 2 = \frac{mV_m^3}{P_m}\ln 2$$

Soit numériquement $d = 887$ m.

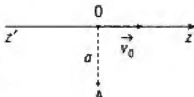
D'après les calculs précédents, la vitesse décroit mais ne tend vers zéro que pour t tendant vers l'infini, et $x(t \to \infty) \to +\infty$, ce qui est manifestement irréaliste.

Cela provient du « modèle » choisi pour représenter les forces de frottements ($f = -kv^2$) : la force de frottement tend trop rapidement vers zéro aux basses vitesses.

109 Mouvement sur un axe dans un champ gravitationnel

Une particule de masse m est assujettie à se déplacer sans frottement sur un axe $z'z$. Elle est soumise à la réaction de l'axe et au champ gravitationnel de la masse M (fixe) placée au point A. On note a la distance de A à l'axe $z'z$.

À l'instant initial $t = 0$, la particule se trouve en O (projection de A sur l'axe) avec une vitesse :



$$\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_z \quad (v_0 > 0).$$

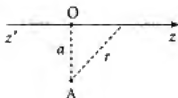
1. Que peut-on dire du mouvement ultérieur de la particule ?

2. Dans le cas où le mouvement reste borné, déterminer ses caractéristiques lorsque la particule reste localisée **au voisinage** du point O. On notera T_0 la période d'un tel mouvement et on en donnera l'expression.

Solution

1. Le mouvement s'effectuant sans frottements, appliquons le théorème de l'énergie cinétique. La seule force intervenant dans ce théorème correspond à l'interaction gravitationnelle entre les masses M et m.

Cette interaction est associée à une énergie potentielle E_p donnée par l'expression :



$$E_p = -\frac{\mathcal{G}Mm}{r}.$$

On a donc $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mathcal{G}Mm}{r} = \text{cste} = K.$

La constante est déterminée par les conditions initiales :

à $t = 0$, $v = v_0$ d'où $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mathcal{G}Mm}{r} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{\mathcal{G}Mm}{a}$.

Ce qui s'écrit encore $v^2 = v_0^2 - \frac{2\mathcal{G}M}{a}\left(1 - \frac{a}{r}\right)$ (1)

Cette quantité reste positive dès que $v_0^2 > \frac{2\mathcal{G}M}{a}$. Il apparaît ainsi une valeur critique v_c de la vitesse définie selon :

$$v_c^2 = \frac{2\mathcal{G}M}{a}.$$

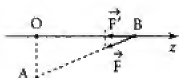
Pour $v_0 = v_c$ la constante K a une valeur nulle, ce qui donne dans ce cas $v^2 = v_c^2 \cdot \left(\frac{a}{r}\right)$, et la particule va à l'infini où sa vitesse s'annule.

L'équation (1) devient : $\boxed{v^2 = (v_0^2 - v_c^2) + v_c^2 \frac{a}{r}}$ (2)

Deux cas sont alors envisageables :

• $v_0 \geqslant v_c$: d'où $v^2 \geqslant 0$ pour tout r. La particule va à l'infini sa vitesse diminuant de la valeur v_0 à la valeur $\sqrt{v_0^2 - v_c^2}$.

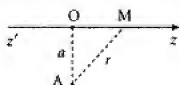
• $v_0 < v_c$: la relation (2) fait apparaître une valeur limite r_1 de r où la vitesse s'annule : r_1 est défini par $0 = v_0^2 - v_c^2 + v_c^2 \frac{a}{r_1} \Rightarrow r_1 = \frac{a}{1 - \left(\frac{v_0}{v_c}\right)^2}$.



Dans un premier temps, la particule se déplace du point O (vitesse v_0) au point B de cote z_B telle que $z_B = \sqrt{r_1^2 - a^2}$ $(v_B = 0)$. En ce point, la projection $\vec{F}'$ sur l'axe Oz de la force $\vec{F}$ n'est pas nulle. Le point B ne correspond pas à une position d'équilibre et la particule va rebrousser chemin.

Elle repassera aux mêmes points avec, d'après (2), une vitesse de même module mais de sens opposé. Elle décrira finalement un mouvement périodique entre les points extrêmes $B(z_B)$ et $B'(-z_B)$.

2. Le mouvement devant rester borné, cela exige $v_0 < v_c$.



Il s'effectuera dans un voisinage du point O d'autant plus réduit que le paramètre $\eta = \frac{v_0}{v_c}$ est petit devant l'unité. En effet, on a : $a < r < r_1 = \frac{a}{1 - \eta^2}$.

L'équation (2) se réécrit en fonction de z selon ($r = \sqrt{a^2 + z^2}$ et $v = \dot{z}$) :

$$\dot{z}^2 = (v_0^2 - v_c^2) + v_c^2 \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{a^2}}} \quad (3)$$

Et pour $|z| \ll a$ on a $\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{z^2}{a^2}}} \approx 1 - \dfrac{z^2}{2a^2} + o(z^3)$

(3) devient, à l'ordre considéré : $\dot{z}^2 + \dfrac{v_c^2}{2a^2}z^2 \# \text{ cste} \quad (4)$

Cette dernière relation s'identifie à l'équation énergétique d'un oscillateur harmonique libre non amorti de pulsation propre $\omega_0 = \dfrac{v_c}{\sqrt{2}a}$.

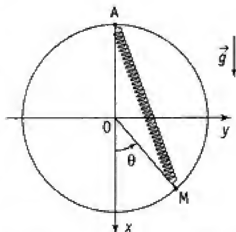
Soit une période $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow \boxed{T_0 = 2\pi\dfrac{a\sqrt{2}}{v_c}}$

Remarque

La solution approchée à (4) est $z(t) = \dfrac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$ puisque $z(0) = 0$ et $\dot{z}(0) = v_0$. On est bien dans le cadre des petits mouvements pour $\dfrac{v_0}{\omega_0} \ll a$, soit encore :

$$\frac{v_0}{\dfrac{v_c}{\sqrt{2}}} \ll 1 \Rightarrow v_0 \ll v_c \quad (\eta \ll 1 \text{ comme il se doit}).$$

110 Particule dans une cuvette



Une particule M de masse m peut se déplacer sans frottements sur un cercle vertical de centre O et de rayon a. Elle est reliée au point A le plus haut du cercle par un ressort sans masse, de raideur k et de longueur à vide l_0.

On note θ l'angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$ et on prendra $-\pi < \theta < \pi$.

1. Justifier que la position $\theta = 0$ est une position d'équilibre. Étudier simplement sa stabilité.

2. a. Déterminer, par application du théorème de l'énergie cinétique, l'intégrale première du mouvement :

$$\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + \left\{\frac{1}{2}k\left[2a\cos\frac{\theta}{2} - l_0\right]^2 - mga\cos\theta\right\} = \text{cte}$$

b. Dénombrer les positions d'équilibre possibles pour la masse m. Tracer les courbes donnant $|\theta_{eq}|$ (pour $\theta_{eq} \neq 0$) en fonction de $\dfrac{mg}{ka}$ pour des valeurs de la grandeur $\dfrac{l_0}{2a}$ égales à 0,5 puis 0,8.

3. a. Étudier la stabilité des positions d'équilibre $\theta_e \neq 0$ lorsqu'elles existent. On vérifiera que l'on a :

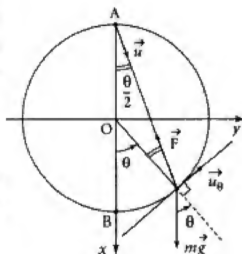
$$\left.\frac{d^2E_p}{d\theta^2}\right)_{\theta_e \neq 0} = ka^2\left(1 - \frac{mg}{ka}\right)\sin^2\frac{\theta_e}{2}$$

b. On fait $\frac{l_0}{2a} = 0{,}4$.

α) Représenter la fonction $\theta \rightarrow E_p(\theta)$ pour des valeurs de $\frac{mg}{ka}$ égales à 0,2 ; 0,6 puis 1. Commenter.

β) On prend $\frac{mg}{ka} = 0{,}2$. Déterminer la pulsation Ω des petites oscillations par rapport aux positions d'équilibre stables. Donner la valeur de Ω en fonction de $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Solution



1. Le point B ($\theta = 0$) constitue une position d'équilibre pour laquelle la réaction normale $\vec{R}$ du support s'ajuste pour équilibrer l'action du poids $\vec{P} = mg\,\vec{u}_x$ et du ressort $\vec{F} = -k(AB - l_0)\vec{u}_x$.

On aura $\vec{0} = R\vec{u}_x + mg\,\vec{u}_x - k(AB - l_0)\,\vec{u}_x$.

Pour étudier la stabilité de cet équilibre, envisageons un petit déplacement par rapport à cette position et appliquons au point matériel le théorème du moment cinétique au point O (on élimine ainsi la réaction $\vec{R}$ qui passe par O).

$$\frac{d\vec{\sigma}(O)}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge (\vec{F} + m\vec{g}) \quad (1)$$

où $\vec{\sigma}(O) = ma^2\dot{\theta}\vec{u}_z$

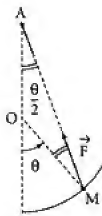
On a $\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{g} = -mga\sin\theta\,\vec{u}_z$

et $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = aF\sin\frac{\theta}{2}\,\vec{u}_z$

où $F = k(AM - l_0)$ ($F > 0$ pour $AM > l_0$).

L'équation (1) s'écrit alors :

$$ma^2\ddot{\theta} = -mga\sin\theta + ka(AM - l_0)\sin\frac{\theta}{2}.$$



Il suffit alors de se limiter aux petites valeurs de θ ($\theta_{eq} = 0$). Ainsi au premier ordre en θ, le second membre s'écrit :

$$-mga\theta - ka[l_0 - AM(\theta = 0)]\frac{\theta}{2}.$$

On a donc, à cet ordre avec $AM(\theta = 0) = 2a$:

$$ma^2\ddot{\theta} \# -mga\theta - ka(l_0 - 2a)\frac{\theta}{2}$$

c'est-à-dire : $$\ddot{\theta} = -\frac{1}{ma}\left[mg - k\left(a - \frac{l_0}{2}\right)\right]\theta.$$

La position d'équilibre $\theta = 0$ est stable si l'équation précédente s'identifie à celle d'un oscillateur harmonique. Ce qui est le cas pour :

$$mg > k\left(a - \frac{l_0}{2}\right).$$

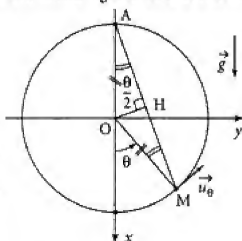
Conclusion

• Pour $l_0 > 2a$, $\theta = 0$ est toujours une position d'équilibre stable, le poids et la force du ressort agissent dans le même sens (forces de rappel).

• Pour $l_0 < 2a$, le poids (force de rappel) et la force du ressort agissent en sens inverse. Deux cas peuvent alors se présenter :

$\frac{mg}{ka} > 1 - \frac{l_0}{2a}$ $\theta = 0$ stable

$\frac{mg}{ka} < 1 - \frac{l_0}{2a}$ $\theta = 0$ instable.



2. a. Le mouvement de M s'effectuant sans frottements, il y a conservation de l'énergie mécanique $E_m = E_c + E_p$.

L'énergie cinétique du point M se déplaçant sur l'arc de cercle de centre O s'écrit simplement :

$$E_c = \frac{1}{2}m(a\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2$$

(puisque $\vec{v} = a\dot{\theta}\vec{u}_\theta$).

L'énergie potentielle a deux origines, l'une liée à la pesanteur, l'autre au ressort, d'où :

$E_p = E_p(\text{pesanteur}) + E_p(\text{ressort})$

avec $$\begin{cases} E_p(\text{pesanteur}) = -mgx \quad \text{(origine en O)} \\ E_p(\text{ressort}) = \frac{1}{2}k[AM - l_0]^2. \end{cases}$$

Or $AM = 2AH = 2OA\cos\frac{\theta}{2} = 2a\cos\frac{\theta}{2}$ $(-\pi < \theta < \pi)$.

Finalement : $E_p(\theta) = -mga\cos\theta + \frac{1}{2}k\left[2a\cos\frac{\theta}{2} - l_0\right]^2.$

La conservation de l'énergie se traduit alors par l'équation :

$$\boxed{\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + \left[\frac{1}{2}k\left[2a\cos\frac{\theta}{2} - l_0\right]^2 - mga\cos\theta\right] = E_m = \text{cste}} \quad (1)$$

2. b. Les positions d'équilibre correspondent ici aux extremums de l'énergie potentielle $E_p(\theta)$. Les valeurs de θ cherchées vérifient donc $\frac{dE_p}{d\theta} = 0$.

Soit : $$mga\sin\theta - k\left(2a\cos\frac{\theta}{2} - l_0\right)a\sin\frac{\theta}{2} = 0.$$

Soit encore : $$2\frac{mg}{k}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} - \left(2a\cos\frac{\theta}{2} - l_0\right)\sin\frac{\theta}{2} = 0$$

d'où : $$\sin\frac{\theta}{2}\left[l_0 - 2\left(a - \frac{mg}{k}\right)\cos\frac{\theta}{2}\right] = 0.$$

La solution $\theta_1 = 0$ est toujours position d'équilibre (stable ou instable). Il existe deux autres positions d'équilibre θ_2 et $-\theta_2$ si l'équation $l_0 = 2\left(a - \frac{mg}{k}\right)\cos\frac{\theta_2}{2}$ admet des solutions $\left(\text{avec } \theta_2 \in (0, \pi) \text{ et donc } \frac{\theta_2}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$.

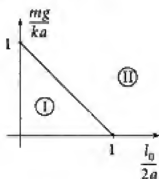
Il faut donc que l'on ait $\frac{l_0}{2a} < 1 - \frac{mg}{ka}$ soit $\frac{mg}{ka} < 1 - \frac{l_0}{2a}$.

Pour que cette condition soit réalisée, il est donc nécessaire que l'on ait $l_0 < 2a$.

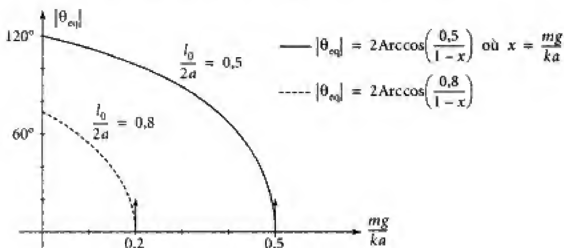
Conclusion

Domaine (I) : trois positions d'équilibre $\theta_1 = 0$ et $\pm\theta_2$ avec $\cos\frac{\theta_2}{2} = \frac{l_0}{2\left(a - \frac{mg}{k}\right)}$.

Domaine (II) : une position d'équilibre $\theta_1 = 0$.



• Courbes $|\theta_{eq}| = f\left[\frac{mg}{ka}\right]$ pour $\frac{l_0}{2a} = 0{,}5$ puis $\frac{l_0}{2a} = 0{,}8$:



3. a. La stabilité de la position d'équilibre $\theta = 0$ a déjà été étudiée (*cf.* **1.**). Plaçons-nous alors dans le cas où $\frac{mg}{ka} < 1 - \frac{l_0}{2a}$ et considérons la position d'équilibre $\theta = \theta_2$. L'étude de la stabilité peut se faire en développant la fonction $E_p(\theta)$ au voisinage de $\theta = \theta_2$. On a ainsi :

$$E_p(\theta) = E_p(\theta_2) + (\theta - \theta_2)\left.\frac{dE_p}{d\theta}\right)_{\theta_2} + \frac{1}{2}(\theta - \theta_2)^2\left.\frac{d^2E_p}{d\theta^2}\right)_{\theta_2} + o[(\theta - \theta_2)^2].$$

$\left.\frac{dE_p}{d\theta}\right)_{\theta_2} = 0$ puisque θ_2 est une position d'équilibre. Il nous faut alors calculer la dérivée seconde de cette énergie potentielle.

Or $\frac{dE_p}{d\theta} = mga\sin\theta - ka\left[2a\cos\frac{\theta}{2} - l_0\right]\sin\frac{\theta}{2}$

$$\frac{dE_p}{d\theta} = (mga - ka^2)\sin\theta + kal_0\sin\frac{\theta}{2}$$

d'où
$$\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = ka^2\left\{\left[\frac{mg}{ka} - 1\right]\cos\theta + \frac{l_0}{2a}\cos\frac{\theta}{2}\right\}.$$

Déterminons enfin l'expression de $K = \left.\frac{d^2E_p}{d\theta^2}\right)_{\theta_2}$ avec $\cos\frac{\theta_2}{2} = \frac{\frac{l_0}{2a}}{1 - \frac{mg}{ka}}$.

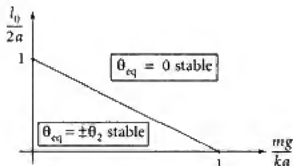
$$K = ka^2\left[1 - \frac{mg}{ka}\right]\left\{-\cos\theta_2 + \cos^2\frac{\theta_2}{2}\right\}$$

$$K = ka^2\left[1 - \frac{mg}{ka}\right]\left\{1 - 2\cos^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta_2}{2}\right\}$$

$$K = ka^2\left[1 - \frac{mg}{ka}\right]\left[1 - \cos^2\frac{\theta_2}{2}\right] = ka^2\left(1 - \frac{mg}{ka}\right)\sin^2\frac{\theta_2}{2}.$$

K est défini positif et les positions d'équilibre $\pm\theta_2$ sont bien stables lorsqu'elles existent.

Conclusion



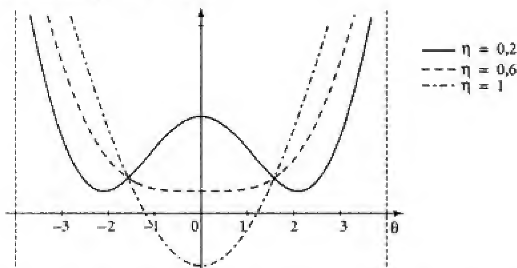
3. b. α) Représentons la fonction $\theta \to E_p(\theta)$, soit encore (*cf.* **2.a.**) :

$$y(\theta) = \frac{E_p(\theta)}{ka^2} = -\frac{mg}{ka}\cos\theta + 2\left[\cos\frac{\theta}{2} - \frac{l_0}{2a}\right]^2.$$

On fixe ici la valeur de $\frac{l_0}{2a}$ $\left(\frac{l_0}{2a} = 0{,}4\right)$ et on trace :

$$\theta \rightarrow y(\theta) = -\eta\cos\theta + 2\left[\cos\frac{\theta}{2} - 0{,}4\right]^2$$

pour les valeurs $\eta = 0{,}2$; 0,6 et 1 :s



• Pour $\eta = 0{,}2$ on a bien $\frac{mg}{ka} < 1 - \frac{l_0}{2a}$ et le graphe confirme que $\theta = 0$ est une position d'équilibre instable (maximum local de E_p) alors que les valeurs $\pm\theta_2$ de θ correspondant aux minimums de E_p sont stables.

• Pour $\eta = 0{,}6$ on a $\frac{mg}{ka} = 1 - \frac{l_0}{2a}$ et les valeurs θ_2 et $\theta_1 = 0$ se confondent. $\theta = 0$ est stable, mais la cuvette de potentiel *n'est pas harmonique* au voisinage de $\theta = 0$.

• Pour $\eta = 1$ il vient $\frac{mg}{ka} > 1 - \frac{l_0}{2a}$ et le graphe nous montre qu'il n'existe qu'une seule position d'équilibre $\theta = 0$, et qu'elle est stable.

3. b. β) Pour $\frac{l_0}{2a} = 0{,}4$ et $\frac{mg}{ka} = 0{,}2$ les positions d'équilibre stable sont $\pm\theta_2$ avec :

$$\cos\frac{\theta_2}{2} = \frac{\frac{l_0}{2a}}{1 - \frac{mg}{ka}} = \frac{0{,}4}{0{,}8} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_2 = \frac{2\pi}{3}.$$

D'autre part, $K = ka^2\left[(0{,}2 - 1)\cos\frac{2\pi}{3} + 0{,}4\cos\frac{\pi}{3}\right] = ka^2[0{,}4 + 0{,}2] = 0{,}6ka^2$.

L'énergie potentielle développée au second ordre en $\theta - \theta_2$ donne :

$$E_p = E_p(\theta_2) + \frac{1}{2}K(\theta - \theta_2)^2 + o[(\theta - \theta_2)^2].$$

Et la conservation de l'énergie s'écrit à cet ordre :

$$\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}K(\theta - \theta_2)^2 = \text{constante.}$$

Soit encore $\quad [(\dot{\overline{\theta - \theta_2}})]^2 + \frac{K}{ma^2}(\theta - \theta_2)^2 = \text{constante.}$

Il s'agit là de l'équation énergétique d'un oscillateur harmonique de pulsation Ω telle que : $\quad \Omega^2 = \frac{K}{ma^2}$.

D'où $$\Omega^2 = 0{,}6\frac{k}{m} \Rightarrow \boxed{\Omega = 0{,}77\,\omega_0}$$

Chapitre

2

Électrocinétique 1

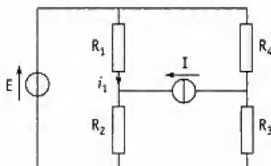
A · Régime continu

B · Régime transitoire

A. Régime continu

201 Intensité dans une branche

On considère le montage représenté ci-dessous.



1. Les deux générateurs étant parfaits, déterminer le courant i_1 traversant le résistor R_1 :

a. par une méthode directe ;

b. en calculant les courants imposés dans R_1 par chaque générateur supposé seul générateur présent dans le circuit :

– générateur E seul : alors $I = 0$ (ce qui correspond à un circuit ouvert) ;

– générateur I seul : alors $E = 0$ (ce qui correspond à un court-circuit).

2. Que devient le courant i_1 si on tient compte du caractère non parfait du générateur de tension E (on ajoute une résistance r en série avec lui) ?

1. Ce qu'il faut savoir

- Circuits linéaires en régime continu.
- Théorème de superposition.

2. Ce qu'il faut comprendre

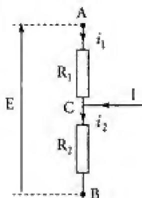
1. a. On remarquera que les courants traversant R_1 et R_2 sont parfaitement définis à partir des résistances R_1 et R_2 et des générateurs E et I. Ils ne dépendent pas de R_3 et R_4.

b. Le circuit linéaire comportant deux générateurs parfaits (l'un de tension E, l'autre de courant I), l'application du théorème de superposition permet, dans chaque cas, d'aboutir à un circuit plus simple.

2. On pourra partiellement se ramener au 1. en notant u la tension aux bornes du générateur de tension imparfait.

Dans les deux cas, ladétermination du générateur équivalent aux bornes de R_1 ne parait pas très judicieuse, car elle fait disparaitre les éléments de symétrie existant entre les quatre résistances...

3. Solution



1. a. On peut tout d'abord remarquer que les courants i_1 et i_2 traversant R_1 et R_2 ne dépendent que de E et I et pas de R_3 et R_4.

On a en effet :

$$i_2 = i_1 + I \quad \text{(loi des nœuds en C)}$$

$$\text{et} \quad E = R_1 i_1 + R_2 i_2.$$

D'où en éliminant i_2 entre ces deux équations :

$$E = R_1 i_1 + R_2(i_1 + I).$$

Donc :

$$\boxed{i_1 = \frac{E - R_2 I}{R_1 + R_2}} \quad (1)$$

Commentaires

- Quand $E = R_2 I$, tout le courant I passe dans R_2 et on a bien : $i_1 = 0$.
- Lorsque la branche BC est ouverte ($R_2 \to \infty$), il vient comme il se doit : $i_1 = -I$.
- Enfin, si la branche AC est coupée ($R_1 \to \infty$), $i_1 = 0$ ce que redonne la formule (1).

1. b. Tous les éléments du circuit sont linéaires. Le courant dans une branche est donc une expression linéaire des forces électromotrices et des courants des générateurs autonomes. On a donc ici :

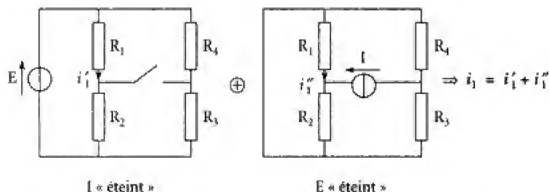
$$i_1 = \alpha E + \beta I$$

avec $\alpha = \left.\frac{i_1}{E}\right)_{I=0}$ et $\beta = \left.\frac{i_1}{I}\right)_{E=0}$

ce que l'on peut encore noter :

$$i_1 = i'_1 + i''_1$$

$$\text{où} \quad i'_1 = i_1)_{I=0} \text{ et } i''_1 = i_1)_{E=0}.$$

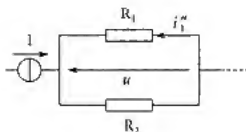


Calcul de i'_1 : I étant « éteint », le même courant i'_1 parcourt les résistances R_1 et R_2, d'où :

$$E = (R_1 + R_2)i'_1 \quad \text{et} \quad i'_1 = \frac{E}{R_1 + R_2}.$$

Calcul de i''_1 : E « éteint » correspond à un court-circuit. Les résistances R_1 et R_2 en parallèle sont parcourues par le courant total I.

Il en est de même des résistances R_3 et R_4 :



$$u = -R_1 i''_1 \quad \text{et} \quad I = \frac{u}{R_1} + \frac{u}{R_2}$$

d'où le résultat : $$i''_1 = -\frac{R_2}{R_1 + R_2} I.$$

Commentaire

On retrouve le résultat d'un pont diviseur de courant.

Le courant total cherché a donc pour expression :

$$\boxed{i_1 = \frac{E - R_2 I}{R_1 + R_2}}$$

2. Le schéma du circuit devient (le générateur de tension n'est plus parfait et il faut tenir compte de sa résistance interne r) :

Notons u la tension aux bornes du générateur. Le calcul de i_1 en fonction de u et I nous ramène à la question 1. d'où :

$$i_1 = \frac{u - R_2 I}{R_1 + R_2} \quad (2)$$

Pour déterminer u, il faut connaître le courant i_r traversant r.
Or $i_r = i_1 + i_4$.
Il faut donc calculer i_4. Mais la configuration $R_4 - R_3$ est identique à celle $R_1 - R_2$ au changement près $I \rightarrow -I$, d'où :

$$i_4 = \frac{u + R_3 I}{R_3 + R_4}$$

soit $i_r = \dfrac{u - R_2 I}{R_1 + R_2} + \dfrac{u + R_3 I}{R_3 + R_4}$.

Et pour la branche BA contenant E :

$$u = E - i_r r = E - r\left\{\frac{u - R_2 I}{R_1 + R_2} + \frac{u + R_3 I}{R_3 + R_4}\right\}.$$

Soit encore :

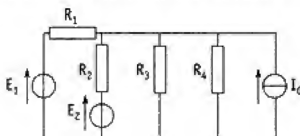
$$u\left[1 + r\left\{\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4}\right\}\right] = E + r\left\{\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4}\right\}I \quad (3)$$

Et en reportant dans (2) la valeur de u, tirée de l'expression (3) :

$$\boxed{i_1 = \frac{1}{R_1 + R_2}\left[\frac{E + rI\left\{\dfrac{R_2}{R_1 + R_2} - \dfrac{R_3}{R_3 + R_4}\right\}}{1 + r\left\{\dfrac{1}{R_1 + R_2} + \dfrac{1}{R_3 + R_4}\right\}} - R_2 I\right]} \quad (4)$$

202 Association en parallèle

Déterminer l'intensité du courant passant dans la résistance R_4.



1. Ce qu'il faut savoir

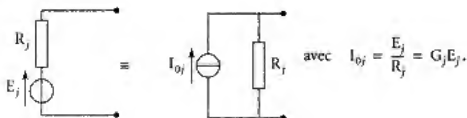
- Représentation de Thévenin, de Norton d'un générateur.
- Pont diviseur de courant.

2. Ce qu'il faut comprendre

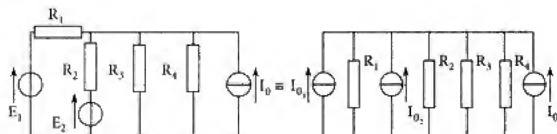
Les branchements étant parallèles, on cherchera à substituer aux générateurs de tension des générateurs de courant.
Il sera astucieux de mettre le montage sous la forme d'un diviseur de courant.

3. Solution

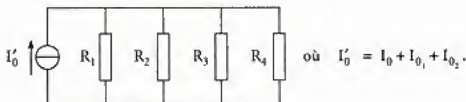
Transformons le circuit en remplaçant les dipôles $[E_1, R_1]$ et $[E_2, R_2]$ par les générateurs de Norton équivalents.
Nous avons :



D'où :

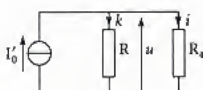


Tous les branchements obtenus étant parallèles, on peut regrouper les générateurs de courant ; le circuit devient :



où $I'_0 = I_0 + I_{0_1} + I_{0_2}$.

Les conductances $G_1 = \frac{1}{R_1}$, $G_2 = \frac{1}{R_2}$, $G_3 = \frac{1}{R_3}$ en parallèle s'ajoutent, d'où $G = \frac{1}{R} = G_1 + G_2 + G_3$ et :



Notons i et k les courants dans R_4 et R, nous avons :

$$\begin{cases} u = R_4 i = Rk \\ I'_0 = i + k \end{cases}$$

D'où $$i \cdot \left(1 + \frac{R_4}{R}\right) = I'_0$$

et $$i = \frac{G_4}{G_4 + G} I'_0 = \frac{G_4}{G_1 + G_2 + G_3 + G_4} I'_0 .$$

Or $I'_0 = I_0 + G_1E_1 + G_2E_2$. Finalement :

$$i = \frac{G_4 \cdot (I_0 + G_1E_1 + G_2E_2)}{G_1 + G_2 + G_3 + G_4} \Rightarrow \boxed{i = \frac{\frac{1}{R_4}\left(I_0 + \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}\right)}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}}}$$

POINT MÉTHODE

Pont diviseur de courant

Dans le dernier circuit représenté, on reconnait un diviseur de courant.

• Diviseur de courant : considérons deux résistances R_1 et R_2 en parallèle sur un générateur de courant I_0.



$R_1 i_1 = R_2 i_2$ et $I_0 = i_1 + i_2$ ce qui donne :

$$I_0 = i_1 \cdot \left(1 + \frac{G_2}{G_1}\right) \Rightarrow \boxed{i_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} I_0}$$

et le courant I_0 se distribue dans les résistances en proportion de leurs conductances G_i.

Ainsi pour des résistances $R_1, \dots R_N$ en parallèle sur I_0, on aurait :

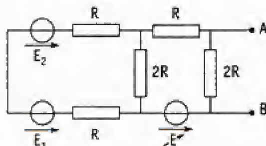
$$i_p = \frac{G_p}{\sum_{1}^{N} G_m} I_0.$$

Le courant le plus important passera par la résistance la plus faible (c'est-à-dire celle de conductance la plus élevée), ce qui est bien naturel.

203 Circuit actif réductible à une résistance

On considère le circuit représenté ci-dessous. On prendra :

$R = 5\ \Omega$, $E_1 = 2$ V et $E_2 = 8$ V.



1. Déterminer le générateur de Thévenin équivalent entre les bornes A et B.

2. a. En déduire la valeur de E pour laquelle le circuit est équivalent (entre A et B) à une résistance pure R_{eq} dont on précisera la valeur.

b. Retrouver ce résultat en faisant une analyse directe de la condition $(V_A - V_B)_{co} = 0$: (co pour circuit ouvert) : condition nécessaire pour que le dipôle soit réductible à une résistance (on admettra que cette condition est suffisante).

1. Ce qu'il faut savoir

- Association de résistances.
- Diviseur de tension.

2. Ce qu'il faut comprendre

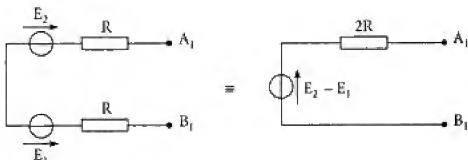
1. Le plus rapide est de modifier le circuit de proche en proche, en utilisant les règles d'association de résistances et de f.é.m. et en tirant profit des modèles de Thévenin et de Norton appliqués à des sous-systèmes plus simples.

2. Le dipôle AB étant remplacé par son générateur de Thévenin équivalent (E_{eq}, R_{eq}) déterminé précédemment, il suffira d'annuler E_{eq} (E_{eq} s'exprimera nécessairement sous une forme linéaire de E_1, E_2, E et plus précisément de E et $E_2 - E_1$).

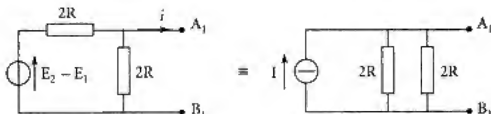
Une autre méthode consisterait à traduire directement que E_{eq} doit s'annuler ou ce qui revient au même que l'on doit avoir $(V_A - V_B)_{co} = 0$ **(co pour circuit ouvert).**

3. Solution

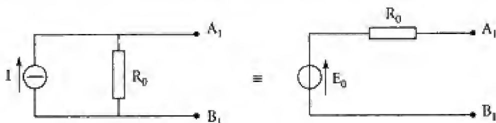
1. Les générateurs $[E_1, R]$ et $[E_2, R]$ sont en série ; ils sont donc réductibles au générateur $[E_2 - E_1, 2R]$:



Ajoutons la résistance 2R en parallèle entre A_1 et B_1. Nous obtenons en représentation de Norton :



avec $I = \dfrac{E_2 - E_1}{2R}$; les deux résistances 2R en parallèle sont équivalentes à une seule résistance R_0, d'où, en revenant à la représentation de Thévenin :



avec $R_0 = (2R\,//\,2R)$.

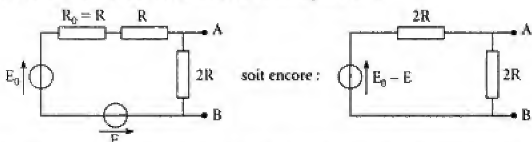
Soit : $R_0 = \dfrac{2R \cdot 2R}{2R + 2R}$

$$\boxed{R_0 = R}$$

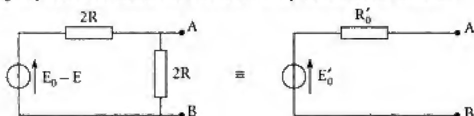
Et : $E_0 = R_0 I = R_0 \cdot \dfrac{E_2 - E_1}{2R}$

$$\boxed{E_0 = \frac{1}{2}(E_2 - E_1)}$$

Le circuit initial devient, en utilisant les résultats précédents :



On refait alors – comme plus haut – la double transformation : représentation de Norton, regroupement des résistances, et retour à la représentation de Thévenin :



On a $R'_0 = (2R \,//\, 2R) \Rightarrow R'_0 = R$.

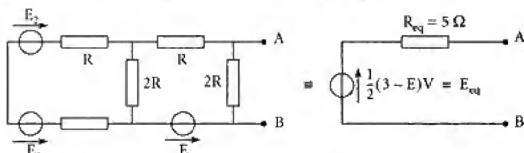
Et : $E'_0 = R'_0 I' = R'_0 \cdot \dfrac{E_0 - E}{2R} = \dfrac{1}{2}(E_0 - E)$

$$E'_0 = \frac{1}{4}(E_2 - E_1 - 2E).$$

Finalement, le circuit proposé est équivalent entre les bornes A et B à un générateur (dit de Thévenin) caractérisé par :

– une résistance interne $R_{eq} = R'_0 = R \Rightarrow R_{eq} = 5\ \Omega$;

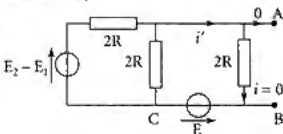
– une f.é.m. $E_{eq} = E'_0 = \dfrac{1}{4}(E_2 - E_1 - 2E) \Rightarrow E_{eq} = \dfrac{1}{2}(3 - E)$.



2. a. le circuit se réduit à une résistance pure pour $E_{eq} = 0$, soit : $E = 3$ V.

Il est alors équivalent à une résistance pure égale à $R_{eq} = 5\ \Omega$.

2. b. Si on suppose nulle la tension $(V_A - V_B)_{co}$ aux bornes du circuit proposé, alors aucun courant ne passe dans la résistance 2R en parallèle entre A et B, la tension à ses bornes étant nulle.



D'où :

$(V_A - V_C)_{co} = V_B - V_C = E.$

Or (diviseur de tension puisque $i' = 0$) :

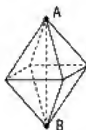
$$(V_A - V_C)_{co} = \frac{2R}{2R + 2R}(E_2 - E_1) = \frac{1}{2}(E_2 - E_1)$$

ou $$(V_A - V_C)_{co} = \frac{1}{2}(E_2 - E_1) = E \Rightarrow E = 3\text{ V}.$$

204 Résistances équivalentes

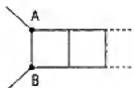
1. Déterminer la résistance équivalente des dipôles A-B représentés ci-dessous. Chaque branche possède la même résistance r.

a.



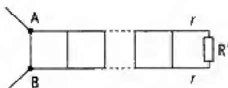
octaèdre régulier

b.

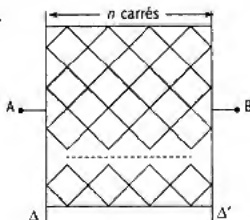


motif infini

Comment obtenir – pour b. – le même résultat avec un nombre fini N de cellules, la dernière cellule étant branchée sur une résistance R′ à déterminer ?



2.



Le motif carré est répété n fois en ligne et p fois en colonne. Les côtés Δ et Δ′ sont infiniment conducteurs. On notera λ la résistance par unité de longueur du fil utilisé pour réaliser ces maillages.

Déterminer la résistance équivalente entre A et B.

1. Ce qu'il faut savoir

- Éléments de symétrie.
- Associations série et parallèle de résistances.

2. Ce qu'il faut comprendre

Il n'est guère intéressant de chercher à déterminer les courants traversant chacune des branches pour un courant d'entrée I donné. Il est plus rapide de tenir compte des symétries (ou antisymétries) caractérisant éventuellement le système (cas a.) afin de substituer à ce dernier un système plus simple. Le calcul de la résistance équivalente s'effectue ensuite par application des règles d'association des résistances.

Il est également possible de supprimer judicieusement certains contacts existants, et de prouver, pour le système ainsi obtenu, que les potentiels de chaque couple de points ainsi créé sont les mêmes, ce qui démontre l'équivalence entre les deux systèmes (cas 2.).

Enfin, pour les systèmes infinis (cas b.), on peut procéder de deux façons différentes :

– soit en considérant un système fini (de résistance notée R_n), et en construisant à partir de ce système un système similaire mais comportant une maille de plus (soit R_{n+1} sa résistance). On cherche alors à établir une relation de récurrence liant R_{n+1} et R_n. La résistance cherchée apparaît comme la limite de R_n quand n tend vers l'infini. Ainsi si $R_{n+1} = f(R_n)$, R est solution de $R = f(R)$;

– soit en ajoutant un maillon au système infini considéré : on obtient un système infini de même nature…

3. Solution

Point cours

• À propos de la symétrie et de l'antisymétrie :

– Un axe Δ sera dit axe de symétrie si la topologie du système est invariante par la symétrie d'axe Δ et si cette symétrie ne modifie pas le signe des courants d'entrée et de sortie.

Les courants sont alors à répartition symétrique par rapport à Δ.

Un axe Δ′ sera dit axe d'antisymétrie si la topologie du système est invariante par la symétrie d'axe Δ et si cette symétrie change le signe des courants d'entrée et de sortie.

La répartition des courants est alors antisymétrique.

Pour les potentiels, on peut remarquer que les potentiels aux nœuds symétriques sont opposés (pour des potentiels en A et B qui le seraient). Il en résulte que les potentiels des nœuds appartenant à Δ′ sont nuls et de façon plus générale égaux.

1. a. Le plan EFGH est un plan d'antisymétrie pour la distribution de courants.

On a donc : $i(A \to G) = i'(G \to B)$.

D'où $V_G = \dfrac{V_A + V_B}{2} = V_F = V_E = V_H$.

Les branches EF, HE, HG et FG ne sont parcourues par aucun courant. Il reste donc quatre résistances $R' = 2r$ en parallèle, d'où :

$$\frac{1}{R} = \frac{4}{R'} \Rightarrow R = \frac{R'}{4} \Rightarrow \boxed{R = \frac{r}{2}}$$

1. b.

POINT MÉTHODE

• On a cette fois-ci un motif théoriquement infini. Le plus simple consiste à remarquer que l'on ne change pas la valeur de la résistance équivalente en ajoutant – en amont – un maillon supplémentaire.

• On pourrait également établir une relation de récurrence sur la suite R_n des résistances équivalentes associées à des chaînes de n maillons. La résistance cherchée R est la limite de R_n quand $n \to +\infty$.

Envisageons la première méthode :

On a :

De même :

On a donc :

D'où $$R = r \,//\, (2r + R) \Rightarrow R = r\frac{(2r + R)}{3r + R} \quad (1)$$

La résistance cherchée est donc solution de l'équation :

$$R^2 + 3rR = 2r^2 + rR \Rightarrow R^2 + 2rR = 2r^2.$$

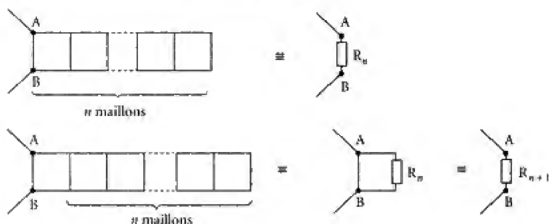
Soit encore : $(R + r)^2 = 3r^2$ et $R = -r + \sqrt{3}r$ $(R > 0)$.

Finalement, nous obtenons

$$\boxed{R = (\sqrt{3} - 1)\,r}$$

Commentaires

La deuxième méthode consiste à relier R_n à R_{n+1}.



On a donc :

$$R_{n+1} = (r \,/\!/\, (2r + R_n)).$$

D'où
$$R_{n+1} = \frac{r(2r + R_n)}{3r + R_n} = f(R_n).$$

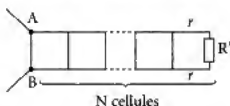
La résistance équivalente R d'un système infini est alors donnée par la solution de l'équation :

$$R = f(R).$$

Soit ici : $R(3r + R) = r(2r + R) \Rightarrow R^2 + 2rR - 2r^2 = 0 \Rightarrow (R + r)^2 = 3r^2$

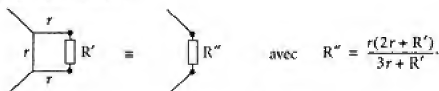
et $R = r(\sqrt{3} - 1)$.

Considérons maintenant une série de N cellules branchée sur une résistance R′, soit :



Il suffit donc de prendre $R' = R$ pour que la résistance équivalente vue entre les points A et B soit également R. En effet, on peut alors remplacer R′ par la chaîne infinie étudiée précédemment.

D'une autre manière, on a :



$$R'' = \frac{r(2r + R')}{3r + R'}.$$

On a donc $R'' = f(R')$. Or R est solution de : $R = f(R)$ (*cf.* (1)).

Le choix $R' = R$ implique donc $R'' = R$ et de proche en proche :

$$R_{eq})_{AB} = R \text{ comme il se doit.}$$

1. Les droites Δ et Δ' étant infiniment conductrices, elles constituent des lignes équipotentielles non résistives. Décomposons le système comme l'indique la figure ci-dessous.

On a supprimé les contacts (P_0, P'_1) (P''_1, P'_2), etc.

Soit V_0 la d.d.p. créée entre les points B et A. On a alors :

$$V(Q_1) = \frac{V_0}{n}; \quad V(P'_1) = \frac{V_0}{2n} = V(P''_1).$$

De même $V(Q_2) = \dfrac{V_0}{n}$

et $V(P'_2) = V(P''_2) = \dfrac{V_0}{2n}$.

Enfin, on a également $V(P_0) = \dfrac{V_0}{2n}$,

le brin OP_0 représentant la fraction $\dfrac{1}{2n}$ de la longueur totale OO'.

Il en résulte que : $V(P_0) = V(P'_1) = V(P''_1) = V(P'_2) = \ldots$

On a de même : $V(S_0) = V(S'_1) = V(S''_1) = V(S'_2)$.

Le système considéré est alors équivalent à celui proposé dans l'énoncé (on peut relier les points au même potentiel P_0 et P'_1, S_0 et S'_1, ..., P''_1 et P'_2,...).

On a donc en parallèle p rangées de n losanges et deux lignes droites OO' et JJ'.

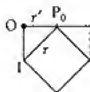
Or



avec $R' = (2r \,//\, 2r) = r \Rightarrow R\,(1 \text{ rangée}) = nr$

et $R(p \text{ rangées en } //) = \dfrac{nr}{p}$ où $r = a\lambda$.

De plus $OP_0 = IP_0\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $r(OP_0) = \dfrac{r}{\sqrt{2}}$.



D'où $R(OO') = 2n\dfrac{r}{\sqrt{2}} = R(JJ')$.

Finalement

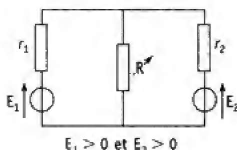
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{2}{R(OO')} + \frac{1}{R(p \text{ rangées} //)}.$$

D'où $\quad \dfrac{1}{R_{eq}} = \dfrac{\sqrt{2}}{nr} + \dfrac{p}{nr} \Rightarrow R_{eq} = \dfrac{nr}{\sqrt{2}+p}.$

Soit avec $r = \lambda a$: $\quad \boxed{R_{eq} = \dfrac{n\lambda a}{\sqrt{2}+p}}$

205 Générateurs ou récepteurs

Le circuit représenté ci-contre comprend deux accumulateurs A_1 et A_2 de forces électromotrices E_1 et E_2 et de résistances internes r_1 et r_2. Ces accumulateurs sont branchés en parallèle sur le résistor R dont on peut faire varier la résistance.



$E_1 > 0$ et $E_2 > 0$

On cherche à déterminer, selon les domaines de valeurs de R, le type de fonctionnement de chacune des sources (générateur ou récepteur).

1. Justifier que l'on peut se limiter au cas $E_2 \geq E_1$.

2. a. On suppose $E_2 > E_1$.

Que se passe-t-il pour $R \to 0$, puis pour $R \to \infty$? Mettre en évidence l'existence d'une valeur critique R_c de R. Donner l'expression de R_c.

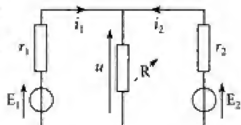
b. Que se passe-t-il pour $E_2 = E_1$?

c. Conclure.

3. Reprendre l'étude d'une façon plus générale.

Solution

1. La permutation des indices « 1 » et « 2 » ne change pas le problème physique. On aura donc intérêt à choisir des notations respectant cette « symétrie » (courants i_1 et i_2).



Du fait même de cette « symétrie », on peut imposer dès le départ $E_2 \geq E_1$.

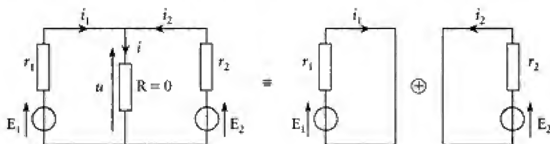
Le cas $E_1 > E_2$ s'en déduit immédiatement en permutant les indices « 1 » et « 2 ».

Remarquons de plus que l'accumulateur A_2 se comportera effectivement comme un générateur si i_2 (tel qu'il est noté sur la figure ci-dessus) est positif. On sera donc amené à calculer les courants i_1 et i_2 et à discuter leur signe.

On peut également déterminer la tension u aux bornes de R, le signe de i_1 et de i_2 s'en déduisant par simple comparaison de u à E_1 et E_2 :

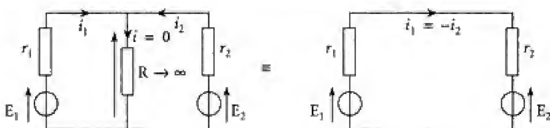
$$i_1 = \frac{E_1 - u}{r_1} \quad \text{et} \quad i_2 = \frac{E_2 - u}{r_2}.$$

2. a. • Quand R tend vers une valeur nulle (court-circuit pour $R = 0$) tout se passe – à la limite – comme si les deux mailles étaient découplées ($u = 0$ et $i = i_1 + i_2$) :



Il vient alors $i_1 = \dfrac{E_1}{r_1}$ et $i_2 = \dfrac{E_2}{r_2}$, A_1 et A_2 fonctionnent en générateurs.

• Pour $R \to \infty$ (branche R ouverte à la limite), les deux accumulateurs tendent vers une situation où ils sont en série et en opposition :



C'est celui qui possède la f.é.m. la plus grande qui aura un fonctionnement en générateur, le deuxième jouant le rôle de récepteur, d'où :

$$R \to \infty \quad \begin{vmatrix} E_2 > E_1 \Rightarrow A_2 \equiv \text{générateur et } A_1 \equiv \text{récepteur} \\ E_2 = E_1 \Rightarrow \text{aucun courant ne traverse } A_1 \text{ et } A_2 \quad (i_1 = -i_2 = 0). \end{vmatrix}$$

• **Résistance critique R_c :**

L'examen des cas particuliers $R \to 0$ et $R \to +\infty$ a mis en évidence deux états limites du système :

(I) $R \to 0$ $\begin{cases} A_1 \text{ générateur} \\ A_2 \text{ générateur} \end{cases}$	(II) $R \to \infty$ et $E_2 > E_1$ $\begin{cases} A_1 \text{ récepteur} \\ A_2 \text{ générateur} \end{cases}$

Or les courants sont des fonctions continues de R. Il existe donc (pour $E_2 > E_1$) une valeur critique R_c de R telle que le système est dans une configuration du type (I) pour $R < R_c$ et du type (II) pour $R > R_c$.

La valeur de R_c s'obtient en remarquant que pour $R = R_c$, l'accumulateur A_1 n'est traversé par aucun courant ($E_2 > E_1$), ce qui correspond au passage de A_1 de l'état générateur à l'état récepteur. On a alors :

$u = E_1$ et $u = E_2 \dfrac{R_c}{R_c + r_2}$ (diviseur de tension).

D'où : $E_1 = E_2 \dfrac{R_c}{R_c + r_2}$

soit
$$\boxed{R_c = r_2 \frac{E_1}{E_2 - E_1}, \quad \text{pour } E_2 > E_1}$$

On a donc :



2. b. Pour $E_2 = E_1$, les deux accumulateurs fonctionnent en générateur (faire $R_c \to +\infty$ sur le diagramme précédent), quelle que soit la valeur de R, avec :

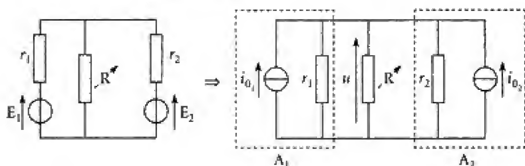
$$\begin{cases} i_1 > 0 \text{ et } i_2 > 0 & \text{pour} \quad r_1 \neq r_2 \\ i_1 = i_2 = 0 & \text{pour} \quad r_1 = r_2 \quad (\textit{cf.} \text{ symétrie du circuit}). \end{cases}$$

2. c. Conclusion :

En posant $R_c = r_2 \dfrac{E_1}{E_2 - E_1}$, on obtient :

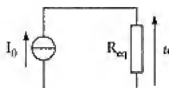
$E_2 > E_1$	$R > R_c$	A_1 récepteur A_2 générateur	$i_1 < 0$ $i_2 > 0$
	$R = R_c$	A_1 « neutre » A_2 générateur	$i_1 = 0$ $i_2 > 0$
	$R < R_c$	A_1 générateur A_2 générateur	$i_1 > 0$ $i_2 > 0$
Pour $E_1 > E_2$, on permute les indices « 1 » et « 2 » et R_c devient $R'_c = r_1 \dfrac{E_2}{E_1 - E_2}$			
$E_1 = E_2$		A_1 et A_2 générateurs	$i_1 > 0$, $i_2 > 0$ pour $r_1 \neq r_2$ $i_1 = i_2 = 0$ pour $r_1 = r_2$

3. Déterminons dans un premier temps la tension u aux bornes de r. À cet effet, les branchements étant plutôt du type **parallèle**, il semble judicieux de remplacer les accumulateurs A_1 $[E_1, r_1]$ et A_2 $[E_2, r_2]$ par leurs **représentations de Norton** :



On a $i_{0_1} = \dfrac{E_1}{r_1}$ et $i_{0_2} = \dfrac{E_2}{r_2}$.

Soit encore, en associant les deux générateurs de courant et en remplaçant les conductances $g_1 = \dfrac{1}{r_1}$, $g_2 = \dfrac{1}{r_2}$ et $G = \dfrac{1}{R}$ en parallèle par leur conductance équivalente $G_{eq} = \dfrac{1}{R_e}$:



$G_{eq} = g_1 + g_2 + G$, soit :

$\dfrac{1}{R_{eq}} = \dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2} + \dfrac{1}{R}$, et :

$I_0 = i_{0_1} + i_{0_2} = \dfrac{E_1}{r_1} + \dfrac{E_2}{r_2} = g_1 E_1 + g_2 E_2$.

Nous obtenons alors $G_{eq} u = I_0$; d'où $u = \dfrac{I_0}{G_{eq}} = R_{eq} I_0$ et :

$$u = \frac{g_1 E_1 + g_2 E_2}{g_1 + g_2 + G}.$$

• Pour déterminer le type de fonctionnement de l'accumulateur A_1, il suffit alors de comparer u à E_1.

Or $u - E_1 = \dfrac{g_1 E_1 + g_2 E_2}{g_1 + g_2 + G} - E_1 = \dfrac{g_2 E_2 - (g_2 + G) E_1}{g_1 + g_2 + G}$.

Le courant i_1 est donné par $i_1 = \dfrac{1}{r_1}(E_1 - u) = g_1(E_1 - u)$.

A_1 fonctionnera en **récepteur** dès que i_1 est négatif, c'est-à-dire pour $u > E_1$, soit pour

$E_1 < E_2 \dfrac{g_2}{g_2 + G}$ (1) soit encore :

$E_1\left(\dfrac{1}{r_2} + \dfrac{1}{R}\right) < \dfrac{E_2}{r_2} \Rightarrow \dfrac{1}{R} E_1 < \dfrac{E_2 - E_1}{r_2}$.

• Limitons pour l'instant l'étude au cas où $E_2 > E_1$; il vient alors $(E_2 - E_1 > 0)$:

– pour $R > r_2 \dfrac{E_1}{E_2 - E_1}$: **A_1 récepteur et A_2 nécessairement générateur**

(Au moins l'un des accumulateurs fonctionne en générateur quand les courants sont non nuls : il faut fournir l'énergie dissipée par effet Joule dans les résistors.)

– pour $R < r_2 \dfrac{E_1}{E_2 - E_1}$: A_1 générateur. Et il en est de même de A_2, A_2 fonctionnant en générateur dès que $E_2 > E_1 \dfrac{g_1}{g_1 + G}$ (on a permuté les indices « 1 » et « 2 » dans (1), où l'on a changé le sens de l'inégalité (récepteur → générateur)). Cette relation est automatiquement vérifiée pour $E_2 > E_1$;

– pour $R = r_2 \dfrac{E_1}{E_2 - E_1}$: il ne passe aucun courant dans A_1 ($i_1 = 0$) et A_2 fonctionne en générateur $\left(E_2 > E_1 > E_1 \dfrac{g_1}{g_1 + G}\right)$.

D'où les résultats avec $R_c = r_2 \dfrac{E_1}{E_2 - E_1}$:



• Pour $E_2 = E_1$, on a $E_1 > E_2 \dfrac{g_2}{g_2 + G}$ et $E_2 > E_1 \dfrac{g_1}{g_1 + G}$, ce qui montre que A_1 et A_2 se comportent en générateurs. Dans ce cas, la valeur de R n'a plus d'importance.

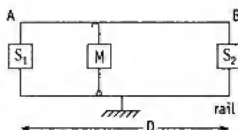
Tous les courants sont nuls pour $r_1 = r_2$ (système complètement symétrique).

On retrouve bien tous les résultats du 2. On peut remarquer que l'accumulateur de plus grande f.é.m. fonctionne systématiquement en générateur, et ceci quelles que soient les valeurs de R, r_1 et r_2... Il est donc normal que A_1 et A_2 soient générateurs lorsque $E_1 = E_2$.

206 Voie électrifiée

Une locomotive électrique est alimentée en courant continu. L'alimentation est réalisée par des sous-stations S_i distantes de D.

Ces sous-stations relient les rails (au potentiel nul) à la caténaire AB. Chaque source S_i sera représentée par un générateur idéal de tension E (borne ⊕ du côté de la caténaire).



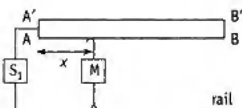
La motrice « M » est branchée entre les rails et la caténaire. On supposera que son moteur doit être alimenté par un courant constant I.

De plus, la caténaire présente une résistance linéïque de valeur ρ et on négligera la résistance des rails et des câbles de liaison à la caténaire.

1. On considère une section de ligne de longueur D alimentée par deux sous-stations (*cf.* figure ci-dessus). On note x la longueur de caténaire séparant la motrice de la sous-station S_1. Exprimer la tension U aux bornes de la motrice, et en déduire la chute de tension $\Delta U = E - U$.

Calculer la valeur maximale D_{max} de D pour $\rho = 5 \cdot 10^{-5}\ \Omega \cdot m^{-1}$; $I = 800$ A et $(\Delta U)_{max} = 45$ V.

2. Une section de même longueur D est – dans cette question – alimentée par une seule station selon le schéma ci-contre. La caténaire est constituée de deux fils identiques AB et A'B' (longueur D, résistance linéïque ρ) reliés aux extrémités. La motrice est branchée entre les rails et l'un des fils.

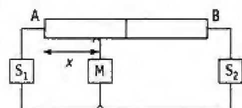


Reprendre les questions du **1.**

3. On revient à un système de deux stations, mais avec une caténaire à deux fils court-circuités au milieu de la ligne.

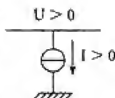
Calculer ΔU et D_{max}.

Que pensez-vous de ces trois systèmes ?

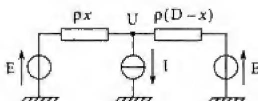


Solution

1. Étant donné le sens de E, la motrice absorbera un courant la traversant dans le sens indiqué sur le dessin ci-contre (ainsi la puissance absorbée UI est bien positive).



Le dispositif étudié se réduit donc au circuit électrique représenté ci-dessous :



Les deux résistances ρx et $\rho(D-x)$ sont soumises à la même tension $E-U$; tout se passe comme si elles étaient en parallèle entre la motrice et une seule source de tension E.

Donc
$$R_{eq} = \frac{\rho^2 x(D-x)}{\rho x + \rho(D-x)}$$

$$R_{eq} = \rho \cdot \frac{x(D-x)}{D}$$

et
$$\boxed{\Delta U = \rho I \cdot \frac{x(D-x)}{D}} \quad (\Delta U = R_{eq} \cdot I).$$

Commentaire

On peut aussi calculer U en faisant le bilan des courants au point de potentiel U :

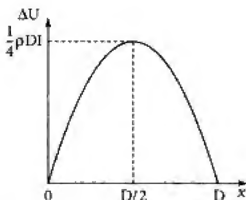
$$\frac{E-U}{\rho x} + \frac{E-U}{\rho(D-x)} - I = 0$$

ce qui donne :

$$E - U = \Delta U = I \cdot \frac{\rho^2 x(D-x)}{\rho x + \rho(D-x)} = R_{eq} \cdot I.$$

Cette méthode correspond à l'application du théorème de Millmann au point de potentiel U...

Cette chute de tension ΔU est bien évidemment nulle pour $x = 0$ et $x = D$ (proximité immédiate des sous-stations qui imposent un potentiel E par rapport à la terre).



Elle est maximale pour $x = \frac{D}{2}$ avec :

$$\boxed{\Delta U_{max} = \frac{1}{4}\rho DI}$$

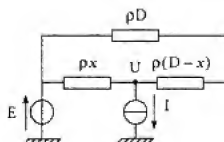
D'où, pour ΔU_{max} fixé :

$$D = D_{max} = \frac{4\Delta U_{max}}{\rho I}.$$

Pour $\Delta U_{max} = 45$ V, il vient $D_{max} = \frac{4 \times 45}{5 \cdot 10^{-5} \times 800}$.

D'où $D_{max} = 4{,}5$ km.

2. De la même manière que pour la première question, redessinons le circuit électrique : on remarque que la résistance ρD est alors en série avec $\rho(D-x)$, ce qui donne une résistance totale égale à $\rho(2D-x)$.



Cette résistance $\rho(2D - x)$ est elle-même en parallèle avec la résistance ρx, d'où ici :

$$R_{eq} = \frac{\rho^2 x(2D - x)}{\rho x + \rho(2D - x)}$$

$$R_{eq} = \frac{\rho x(2D - x)}{2D}.$$

Commentaire

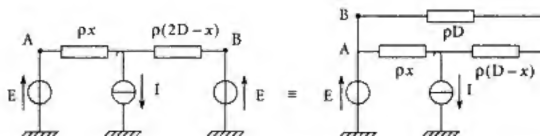
On peut aussi remarquer, en « dépliant » vers la droite le fil A′B′ et en ajoutant une source de tension E en A′ (pour maintenir son potentiel à E), que l'on retrouve le montage de la question 1., avec simplement 2D à la place de D...

On en déduit ($\Delta U = R_{eq} \cdot I$) :

$$\boxed{\Delta U = \rho I \cdot \frac{x(2D - x)}{2D}}$$

L'expression trouvée ici est de même nature que celle établie au 1., D y étant remplacée par 2D. Ainsi, une ligne de longueur D pour le deuxième système est équivalente à une « demi-ligne » de longueur 2D.

En effet, on a :



Il résulte de cette remarque que l'on peut reprendre l'application numérique de la première question sous la forme :

$(2D)_{max} = 4{,}5$ km d'où $D_{max} = 2{,}25$ km.

3. Remarquons tout d'abord que la symétrie du système impose :

$U(x) = U(D - x)$ (positions symétriques par rapport au milieu de la ligne).

On peut donc limiter l'étude à $0 \leqslant x \leqslant \frac{D}{2}$.

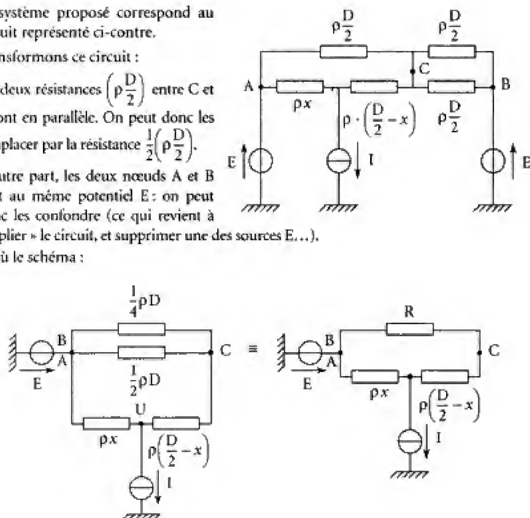
Le système proposé correspond au circuit représenté ci-contre.

Transformons ce circuit :

Les deux résistances $\left(\rho\frac{D}{2}\right)$ entre C et B sont en parallèle. On peut donc les remplacer par la résistance $\frac{1}{2}\left(\rho\frac{D}{2}\right)$.

D'autre part, les deux nœuds A et B sont au même potentiel E : on peut donc les confondre (ce qui revient à « replier » le circuit, et supprimer une des sources E...).

D'où le schéma :



où $R = \left[\left(\frac{1}{2}\rho D\right) // \left(\frac{1}{4}\rho D\right)\right]$; soit $R = \frac{1\times 2}{1+2}\cdot\left(\frac{1}{4}\rho D\right)$ et $R = \frac{1}{6}\rho D$.

D'où :

$$R' = R + \rho\cdot\left(\frac{D}{2}-x\right)$$

$$R' = \rho\cdot\left(\frac{2D}{3}-x\right)$$

et finalement :

$$R_{eq} = \frac{\rho x R'}{\rho x + R'} = \frac{\rho^2 x\left(\frac{2D}{3}-x\right)}{\rho x + \rho\left(\frac{2D}{3}-x\right)}$$

$$R_{eq} = \frac{\rho x(2D-3x)}{2D}.$$

On en déduit ($\Delta U = R_{eq} \cdot I$) :

$$\boxed{\Delta U = \rho x \frac{(2D - 3x)I}{2D}} \quad \text{avec} \quad 0 \leq x \leq \frac{D}{2}.$$

Cette chute est maximale pour x_0 tel que :

$$\frac{d}{dx}[x(2D - 3x)] = 0 \Rightarrow (2D - 3x_0 - 3x_0 = 0) \quad \text{soit} \quad x_0 = \frac{D}{3}.$$

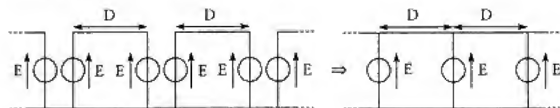
La chute maximale de tension a pour valeur :

$$(\Delta U)_{max} = \frac{\rho \frac{D}{3}(2D - D)}{2D} \quad \text{et} \quad \boxed{(\Delta U)_{max} = \frac{1}{6}\rho DI}$$

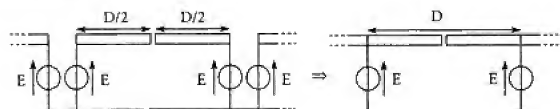
Ce qui donne $\quad D_{max} = $ **6,75 km.**

Pour comparer les trois systèmes, redessinons une ligne comportant plusieurs sections :

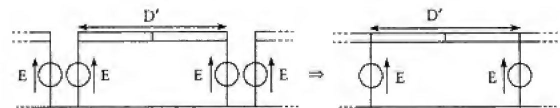
• Système (I) : (D = 4,5 km)



• Système (II) : (D = 4,5 km)



• Système (III) : (D' = 6,75 km = 1,5D)

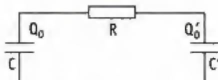


Les figures de droite représenteraient une optimisation du coût d'établissement de la ligne (minimisation du nombre de stations). Ainsi, les systèmes (I) et (II) sont semblables mais (II) nécessite deux fois plus de cuivre (ligne double). Le système (III) semble plus avantageux dans le sens où il exige moins de stations pour une même longueur de ligne.

B. Régime transitoire

211 Bilan d'énergie

On relie deux condensateurs (capacités C et C', charges initiales respectives Q_0 et Q'_0) par une résistance R :



1. Déterminer l'évolution du système, et préciser l'état d'équilibre final.

2. Faire un bilan énergétique : on exprimera les résultats en fonction de C et C' et des tensions de charge initiale U_0 et U'_0 des condensateurs.

1. Ce qu'il faut savoir

- Tension aux bornes d'un condensateur.
- Énergie emmagasinée dans un condensateur.

2. Ce qu'il faut comprendre

L'état d'équilibre final correspond à un courant nul, et la tension aux bornes de chaque condensateur résultera de la conservation de la charge électrique « emprisonnée » sur les armatures des condensateurs.

Faire un bilan énergétique consiste à montrer que la perte d'énergie emmagasinée dans les condensateurs entre le début et la fin est égale (en valeur absolue) à l'énergie électrique absorbée par la résistance et dissipée sous forme thermique (effet Joule).

3. Solution

1.

POINT COURS

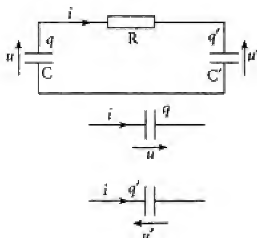
$$\boxed{q = Cu} \quad \text{et} \quad \boxed{i = \frac{dq}{dt}}$$

Ces relations concernent les condensateurs en convention récepteur, en notant q la charge de l'armature par laquelle entre le courant i.



Remarque : i et q peuvent être négatifs.

Soit i le courant dans la résistance R. Avec les orientations précisées sur le schéma, il vient :



$$i = -\frac{dq}{dt} = -C\frac{du}{dt}$$

$$i = +\frac{dq'}{dt} = +C\frac{du'}{dt}.$$

D'après la loi des mailles :

$$-u + Ri + u' = 0.$$

On dérive cette équation, et on élimine les tensions :

$$-\frac{du}{dt} + R\frac{di}{dt} + \frac{du'}{dt} = 0$$

$$\frac{i}{C} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C'} = 0.$$

Soit finalement :

$$\boxed{\frac{RCC'}{C + C'} \cdot \frac{di}{dt} + i = 0}$$

C'est une équation différentielle du 1er ordre dont la solution générale s'écrit :

$$i(t) = Ae^{-t/\tau} \quad \text{en posant} \quad \tau = \frac{RCC'}{C + C'}.$$

La valeur de A est déterminée par les conditions initiales :

$$A = i(0^+) = \frac{1}{R}(u_0 - u_0')$$

(d'après la loi des mailles à l'instant initial, les tensions aux bornes des condensateurs sont des fonctions continues du temps...).

Finalement :

$$i(t) = \frac{1}{R}(u_0 - u_0')e^{-t/\tau}$$

$$\boxed{i(t) = \frac{1}{R}\left(\frac{Q_0}{C} - \frac{Q_0'}{C'}\right)e^{-t/\tau}}$$

Le régime permanent ($t \to +\infty$) correspond bien à $i = 0$,

soit $u = u' = u_\infty$ ou encore $\dfrac{Q_\infty}{C} = \dfrac{Q'_\infty}{C'} = u_\infty$

Q_∞ et Q'_∞ désignant les charges finales des deux condensateurs.

> **POINT COURS**
>
> **La conservation de la charge emprisonnée entre les armatures des condensateurs découle de la définition de i :**
>
> $$i = -\frac{dq}{dt} = \frac{dq'}{dt} \quad \text{d'où} \quad \frac{dq}{dt} + \frac{dq'}{dt} = 0$$
>
> **soit en intégrant $q(t) + q'(t) = \text{cte}$.**

Cette conservation des charges impose ici :

$$Q_0 + Q'_0 = q + q' = Q_\infty + Q'_\infty$$

d'où : $u_\infty = \dfrac{Q_\infty}{C} = \dfrac{Q'_\infty}{C'} = \dfrac{Q_\infty + Q'_\infty}{C + C'} = \dfrac{Q_0 + Q'_0}{C + C'}$.

Il est alors facile d'obtenir l'expression de $u(t)$, nécessairement de la forme $u(t) = (\lambda + \mu e^{-t/\tau})$ (puisque $\dfrac{du}{dt} = -\dfrac{i}{C}$ ...) et vérifiant $u(0^+) = u_0$ et $u(t \to \infty) = u_\infty$,

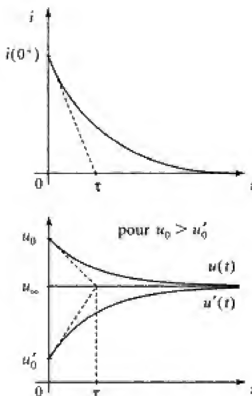
soit $\lambda = u_\infty$ et $\lambda + \mu = u_0$

ce qui impose :

$$\boxed{u(t) = u_\infty + (u_0 - u_\infty)e^{-t/\tau}}$$

et l'expression analogue pour $u'(t)$.

Allure des courbes :

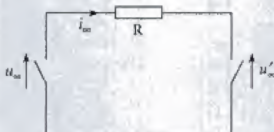


Point méthode

Étude du régime permanent

En régime permanent continu, un condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.

On obtient donc pour $t \to \infty$ le schéma suivant.



On doit donc avoir $i_\infty = 0$ (circuit ouvert)

et $u_\infty = u'_\infty$.

Il est toujours bon de vérifier que le comportement attendu correspond bien à l'étude mathématique faite précédemment.

2. Calculons les énergies des condensateurs dans l'état initial ($t = 0$) et dans l'état final ($t \to +\infty$) :

$$E_i = \frac{1}{2}Cu_0^2 + \frac{1}{2}C'u_0'^2$$

$$E_f = \frac{1}{2}Cu_\infty^2 + \frac{1}{2}C'u_\infty'^2 = \frac{1}{2}(C + C')u_\infty^2 \quad (u'_\infty = u_\infty).$$

On en déduit la variation d'énergie du système :

$$\Delta E = E_f - E_i = \frac{1}{2}(C + C')u_\infty^2 - \frac{1}{2}Cu_0^2 - \frac{1}{2}C'u_0'^2$$

$$\Delta E = \frac{1}{2}\left[\frac{(Cu_0 + C'u'_0)^2}{C + C'} - Cu_0^2 - C'u_0'^2\right]$$

$$\Delta E = \frac{1}{2(C + C')} \cdot [2CC'u_0u'_0 - CC'u_0^2 - CC'u_0'^2]$$

$$\Delta E = -\frac{1}{2} \cdot \frac{CC'}{C + C'}(u_0 - u'_0)^2.$$

D'autre part, l'énergie reçue par la résistance a pour expression :

$$W_J = \int_0^\infty Ri^2 dt$$

$$W_J = R\int_0^\infty i^2(0^+)e^{-2t/\tau}dt$$

$$W_J = Ri^2(0^+) \cdot \left[-\frac{\tau}{2}e^{-2t/\tau}\right]_0^\infty = \frac{1}{2}\tau Ri^2(0^+)$$

soit, en remplaçant τ :

$$W_J = \frac{1}{2}\cdot\frac{CC'}{C+C'}[Ri(0^+)]^2$$

et (loi des mailles : $Ri(0^+) = u(0^+) - u'(0^+) = u_0 - u'_0$) :

$$W_J = \frac{1}{2}\cdot\frac{CC'}{C+C'}(u_0 - u'_0)^2.$$

On a bien $\Delta E + W_J = 0$

ou encore, avec le langage de la thermodynamique et en notant U l'énergie interne du système total (l'ensemble du circuit) **thermostaté** :

$$\Delta U = W^{ext} + Q_{th}$$

ici $W^{ext} = 0$ d'où $\Delta U = Q_{th}$.

Or $\Delta U = \Delta E$ que l'on vient de calculer (pas de modification de l'état thermique du système)

soit $\Delta E = Q_{th} \Rightarrow Q_{th} = -W_J$.

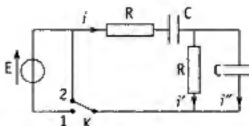
La température du système étant imposée, l'effet Joule correspond à un transfert d'énergie thermique au thermostat ($Q_{th} < 0$).

212 Conditions initiales – conditions d'équilibre

On donne le circuit ci-contre.

Pour $t < 0$, l'interrupteur K est dans la position 2, et les deux condensateurs (de même capacité C) sont déchargés.

À la date $t = 0$, K bascule de la position 2 à la position 1.



Déterminer les valeurs des courants i, i' et i'' (voir figure) à la date $t = \varepsilon$, ε positif et très voisin de zéro.

Au bout d'un temps T suffisamment long (les courants étant alors tous nuls), l'interrupteur K bascule à nouveau, et revient en position 2.

Déterminer les valeurs des courants i, i' et i'' aussitôt après le basculement de K, puis lorsque le régime permanent est atteint.

1. Ce qu'il faut savoir

- Loi de continuité aux bornes d'un condensateur.

2. Ce qu'il faut comprendre

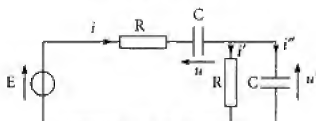
L'exercice n'est pas du tout calculatoire. Il demande de déterminer les différentes grandeurs (intensité ou tension) en utilisant la loi de continuité aux bornes d'un condensateur (aux changements d'états) ou les lois du régime permanent (pour un temps infiniment long).

3. Solution

> **POINT COURS**
>
> **Lorsqu'on bascule un interrupteur dans un circuit, il y a continuité de la charge des condensateurs (et donc de la tension aux bornes des condensateurs).**

Par continuité de la tension aux bornes des condensateurs, on a :

$$\begin{cases} u(\varepsilon) = u(0^-) = 0 \\ u'(\varepsilon) = u'(0^-) = 0 \end{cases}$$



ce qui entraîne, puisque $u' = Ri'$: $\boxed{i'(\varepsilon) = 0}$

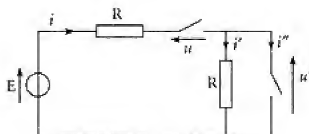
D'après la loi des mailles, $E = Ri + u + u'$ d'où : $\boxed{i(\varepsilon) = \frac{E}{R}}$

Et puisque $i'' = i - i'$ $\boxed{i''(\varepsilon) = \frac{E}{R}}$

• Au bout d'un temps T suffisamment long, le régime permanent est atteint.

> **POINT COURS**
>
> **En régime permanent continu, les condensateurs se comportent comme des interrupteurs ouverts (intensité nulle).**

On a alors :

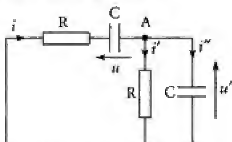


Puisque $i' = i - i''$, $i''(T) = 0$ d'où $\boxed{u'(T) = 0}$

et puisque $E = Ri + u + u'$, $\boxed{u(T) = E}$

On bascule alors l'interrupteur dans la position 2.

Le circuit devient :



On a donc, par continuité aux bornes des condensateurs :

$$\begin{cases} u(T+\varepsilon) = u(T) = E \\ u'(T+\varepsilon) = u'(T) = 0 \end{cases}$$

On a toujours : $u' = Ri'$, alors $\boxed{i'(T+\varepsilon) = 0}$

En maintenant, $0 = Ri + u + u'$ soit $\boxed{i(T+\varepsilon) = -\dfrac{E}{R}}$

On en déduit :

$$\boxed{i''(T+\varepsilon) = -\frac{E}{R}} \quad (i'' = i - i').$$

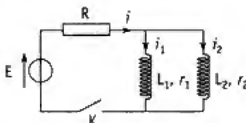
Au bout d'un temps suffisamment long, un nouveau régime permanent est atteint, alors $\boxed{i_\infty = i''_\infty = 0}$

d'où $\boxed{i'_\infty = 0}$

soit $u'_\infty = 0$ et $u_\infty = 0$. Les condensateurs sont déchargés.

213 Deux bobines en parallèle

On ferme l'interrupteur K à l'instant $t = 0$.



1. On suppose dans cette question que les deux bobines sont identiques ($L_1 = L_2 = L$ et $r_1 = r_2 = r$). Déterminer les courants $i(t)$, $i_1(t)$ et $i_2(t)$.

Commenter les résultats obtenus.

2. Même question dans le cas où $L_1 \neq L_2$ et $r_1 \neq r_2$ avec cependant $\dfrac{L_1}{r_1} = \dfrac{L_2}{r_2} = \tau$.

On pourra également poser, avec $R_{//} = \dfrac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$; $\tau' = \dfrac{\tau}{1 + \dfrac{R}{R_{//}}}$; $i_\infty = \dfrac{E}{R + R_{//}}$.

Commenter.

3. On se place désormais dans le cas général et on pose :

$$\tau_1 = \frac{L_1}{r_1}; \quad \tau_2 = \frac{L_2}{r_2}; \quad T_1 = \frac{L_1}{R} \quad \text{et} \quad T_2 = \frac{L_2}{R}.$$

a. Donner le système différentiel du premier ordre vérifié par le couple de variables $[i_1(t), i_2(t)]$. Que peut-on en déduire sur la nature des solutions en $i_1(t)$, $i_2(t)$ et $i(t)$? On ne développera pas les calculs.

b. On donne ci-dessous les courbes $\frac{t}{\tau_1} \to i_1(t)$, $\frac{t}{\tau_1} \to i_2(t)$ et $\frac{t}{\tau_1} \to i(t)$ pour $r_1 = r_2$; $\frac{E}{r_1} = 1$ A ; $L_1 = 50\ L_2$ et différentes valeurs du paramètre $\eta = \frac{R}{r_1}$:

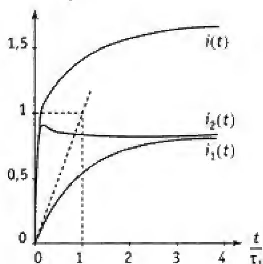


Fig. 1 : $\frac{R}{r_1} = 0{,}1$

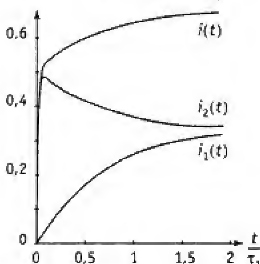


Fig. 2 : $\frac{R}{r_1} = 1$

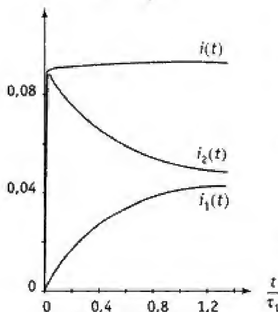


Fig. 3 : $\frac{R}{r_1} = 10$

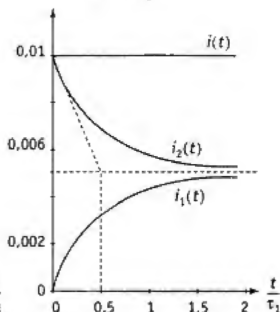


Fig. 4 : $\frac{R}{r_1} = 100$

Commenter ces courbes.

1. Ce qu'il faut savoir

Points de cours

- Circuit rL série.
- Continuité du courant dans une bobine.
- Régime transitoire – régime permanent.

Outils mathématiques

- Équation différentielle linéaire du 1er ordre.
- Système différentiel linéaire du 1er ordre.

2. Ce qu'il faut comprendre

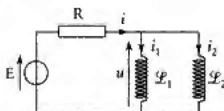
1 et 2. La présence des bobines retarde l'établissement des courants i_1 et i_2, et donc du courant i dans la branche principale. Pour R suffisamment faible, les constantes de temps qui vont intervenir sont certainement celles des bobines, à savoir $\tau_1 = \frac{L_1}{r_1}$ et $\tau_2 = \frac{L_2}{r_2}$.

Le problème se présentera simplement lorsque $\tau_1 = \tau_2$, les deux bobines ayant des comportements « similaires ».

Au bout d'un temps suffisamment long, les courants seront établis et les inductances L_1 et L_2 pourront être supprimées. On a alors un circuit purement résistif, et les valeurs asymptotiques $(i)_\infty$, $(i_1)_\infty$ et $(i_2)_\infty$ sont connues. Il pourra être utile de faire intervenir la tension u aux bornes des deux bobines.

3. Solution

1. Les lois de l'électrocinétique permettent d'écrire :



$$u = r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} \quad \text{(bobine } \mathscr{L}_1\text{)}$$

$$u = r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} \quad \text{(bobine } \mathscr{L}_2\text{)}$$

$u = E - Ri$ avec $i = i_1 + i_2$ (loi des nœuds).

Nous nous sommes placés dans le cas où les deux bobines sont identiques ce qui implique bien évidemment $i_1(t) = i_2(t) = \frac{i}{2}$.

Les équations précédentes donnent alors :

$$u = E - Ri = r\frac{i}{2} + \frac{L di}{2 dt}$$

soit encore $\frac{L}{2}\frac{di}{dt} + \left(R + \frac{r}{2}\right)i = E.$

Posons $\tau' = \frac{L}{2R + r}$

$$\Rightarrow \boxed{\tau'\frac{di}{dt} + i = \frac{2E}{2R + r}}$$

La solution générale de cette équation différentielle est fournie par :

$$i(t) = \frac{2E}{2R + r} + \lambda e^{-\frac{t}{\tau'}}.$$

Or à $t = 0^+$, on doit avoir $i_1(0^+) = i_2(0^+) = 0$ (continuité du courant dans les bobines)

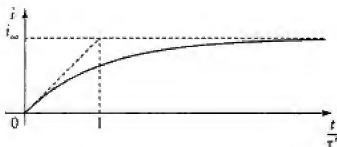
d'où $i(0^+) = i_1(0^+) + i_2(0^+) = 0$ et $\lambda = -\frac{2E}{2R + r}$.

Finalement :

$$\boxed{i(t) = \frac{2E}{2R + r}\left(1 - e^{-\frac{(2R + r)t}{L}}\right)}$$

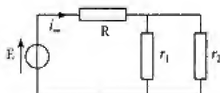
$$\text{et} \quad i_1(t) = i_2(t) = \frac{i}{2}.$$

$i_\infty = \frac{2E}{2R + r}$



Commentaires

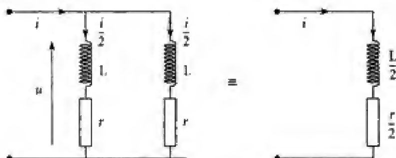
• Le courant i_∞ correspond au régime continu établi pour lequel le circuit est purement résistif $\left(\frac{di_1}{dt} = \frac{di_2}{dt} = 0\right)$.



On a donc :

$i_\infty = \frac{E}{R_{eq}}$ où $R_{eq} = R + (r_1 // r_2) = R + \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = R + \frac{r}{2}$ $(r_1 = r_2 = r)$.

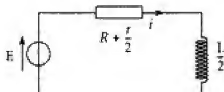
On aurait pu remarquer directement que, les mêmes courants traversant les deux bobines identiques, on pouvait réduire l'ensemble de ces deux bobines (L, r) à une bobine unique $\left(\frac{L}{2}, \frac{r}{2}\right)$.



Dans les deux cas, on a bien : $u = L\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{i}{2}\right) + r\dfrac{i}{2} = \dfrac{L}{2}\dfrac{di}{dt} + \dfrac{r}{2}i$.

Le circuit global devient :

et $\boxed{E = \left(R + \dfrac{r}{2}\right)i + \dfrac{L}{2}\dfrac{di}{dt}}$



2. Cette fois, les deux bobines sont différentes bien que leurs constantes de temps aient une même valeur $\left(\dfrac{L_1}{r_1} = \dfrac{L_2}{r_2} = \tau\right)$.

Les équations précédentes peuvent se réécrire de la façon suivante :

$$\begin{cases} u = E - Ri = r_1\left(i_1 + \tau\dfrac{di_1}{dt}\right) = r_2\left(i_2 + \tau\dfrac{di_2}{dt}\right) \\ \text{avec} \quad i = i_1 + i_2 \end{cases} \quad (1)$$

D'où $\left.\begin{aligned} i_1 + \tau\dfrac{di_1}{dt} &= \dfrac{1}{r_1}(E - Ri) \\ i_2 + \tau\dfrac{di_2}{dt} &= \dfrac{1}{r_2}(E - Ri) \end{aligned}\right\} \quad (i_1 + i_2) + \tau\dfrac{d}{dt}(i_1 + i_2) = \left(\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2}\right)(E - Ri).$

Soit $\quad i + \tau\dfrac{di}{dt} = \dfrac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}(E - Ri)$; notons $R_{//} = \dfrac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$

et regroupons les termes : $\quad \tau\dfrac{di}{dt} + i\left[1 + \dfrac{R}{R_{//}}\right] = \dfrac{E}{R_{//}}$

$$\boxed{\frac{\tau}{1 + \dfrac{R}{R_{//}}}\frac{di}{dt} + i(t) = \frac{E}{R + R_{//}}}$$

Soit en notant $i_\infty = \dfrac{E}{R + R_{//}}$ et $\tau' = \dfrac{\tau}{1 + \dfrac{R}{R_{//}}}$:

$$\boxed{i(t) = i_\infty\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right)\right)} \quad \text{puisque } i(0) = 0.$$

Soit encore $$i(t) = \frac{E}{R + \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}}\left[1 - \exp\left(-\left[1 + \frac{R}{\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}}\right]\frac{t}{\tau}\right)\right] \quad (2)$$

On a d'autre part, d'après (1) : $i_1 + \tau\frac{di_1}{dt} = \frac{E}{r_1} - \frac{R}{r_1}i = \frac{E}{r_1} - \frac{R}{r_1}i_\infty\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau'}}\right)$

soit en posant $i_{1\infty} = \frac{E - Ri_\infty}{r_1}$:

$$i_1 + \tau\frac{di_1}{dt} = i_{1\infty} + \frac{R}{r_1}i_\infty e^{-\frac{t}{\tau'}}.$$

Nous avons donc $i_1(t) = i_{1\infty} + i'_1(t)$ ($i_{1\infty}$: solution de régime permanent), $i'_1(t)$ étant solution de l'équation différentielle du premier ordre :

$$i'_1 + \tau\frac{di'_1}{dt} = \frac{R}{r_1}i_\infty e^{-\frac{t}{\tau'}} \quad (3)$$

La solution de l'équation homogène est $\lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$.

La solution particulière est de la forme $Ae^{-\frac{t}{\tau'}}$ avec, en reportant dans (3) :

$$A\left(1 - \frac{\tau}{\tau'}\right) = \frac{R}{r_1}i_\infty.$$

Finalement, nous obtenons :

$$i_1(t) = i_{1\infty} + \lambda e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{R}{r_1}i_\infty\frac{1}{1 - \frac{\tau}{\tau'}}e^{-\frac{t}{\tau'}}$$

et avec $i_1(0^+) = 0$:

$$i_1(t) = i_{1\infty}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + \frac{R}{r_1}\frac{i_\infty}{1 - \frac{\tau}{\tau'}}\left(e^{-\frac{t}{\tau'}} - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

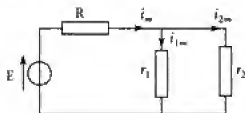
Il apparaît ainsi deux constantes de temps : $\tau_1 = \tau$ et $\tau_2 = \tau' = \frac{\tau}{1 + \frac{R}{\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}}}$.

Commentaires

- La valeur de i_∞ est donnée par : $i_{1\infty} = \frac{E}{r_1} - \frac{R}{r_1}i_\infty$ soit :

$$i_{1\infty} = \frac{E}{r_1} - \frac{R}{r_1}\frac{E(r_1 + r_2)}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2} = \frac{Er_1 r_2}{r_1[R(r_1 + r_2) + r_1 r_2]}.$$

D'où $i_{1\infty} = \dfrac{Er_2}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2}$, expression que l'on peut retrouver à partir du montage équivalent en régime continu établi.

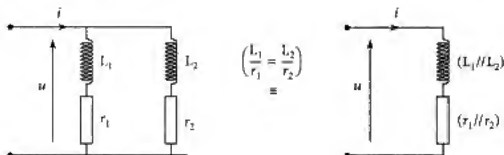


On a ainsi (diviseur de courant) : $i_{1\infty} = i_\infty \dfrac{r_2}{r_2 + r_1}$ avec $i_\infty = \dfrac{E}{R + \dfrac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}}$ d'où le résultat.

• Pour déterminer le courant $i(t)$, on peut remplacer le système (L_1, r_1) en parallèle avec (L_2, r_2) par une bobine unique d'inductance $L_{//} = \dfrac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$ et de résistance $R_{//} = \dfrac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$. En effet, pour $\dfrac{L_1}{r_1} = \dfrac{L_2}{r_2}$, on a :

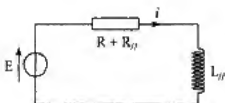
$$\left.\begin{aligned} \frac{u}{r_1} &= i_1 + \tau\frac{di_1}{dt} \\ \frac{u}{r_2} &= i_2 + \tau\frac{di_2}{dt} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} u\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) &= (i_1 + i_2) + \tau\frac{d}{dt}(i_1 + i_2) \\ u &= R_{//} i + \tau R_{//}\frac{di}{dt}. \end{aligned}$$

On a bien $R_{//} = \dfrac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$ et $L_{//} = \tau R_{//} = \dfrac{L_1}{r_1}\dfrac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = L_1 \dfrac{1}{\dfrac{L_1}{L_2} + 1} = \dfrac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$.



Le circuit global devient alors :

d'où $\boxed{E = (R + R_{//})i + L_{//}\dfrac{di}{dt}}$



3. a. Désormais les deux bobines sont distinctes et leurs constantes de temps sont différentes ($\tau_1 \neq \tau_2$). On a donc :

$$\begin{cases} u = E - Ri & \text{et} \quad i = i_1 + i_2 \\ u = r_1 i_1 + L_1 \dfrac{di_1}{dt} & \text{et} \quad u = r_2 i_2 + L_2 \dfrac{di_2}{dt} \end{cases}$$

soit encore

$$r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} = E - R(i_1 + i_2) = r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

d'où

$$\frac{di_1}{dt} = -\left(\frac{r_1}{L_1} + \frac{R}{L_1}\right) i_1 - \frac{R}{L_1} i_2 + \frac{E}{L_1}.$$

L'équation permettant d'obtenir $\dfrac{di_2}{dt}$ résulte de la permutation des indices 1 et 2, d'où le système différentiel du 1er ordre par rapport aux variables $i_1(t)$ et $i_2(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{di_1}{dt} = -\left(\dfrac{1}{\tau_1} + \dfrac{1}{T_1}\right) i_1 - \dfrac{1}{T_1} i_2 + \dfrac{E}{L_1} \\ \dfrac{di_2}{dt} = -\left(\dfrac{1}{\tau_2} + \dfrac{1}{T_2}\right) i_2 - \dfrac{1}{T_2} i_1 + \dfrac{E}{L_2} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{matrix} \tau_1 = \dfrac{L_1}{r_1} & \tau_2 = \dfrac{L_2}{r_2} \\ T_1 = \dfrac{L_1}{R} & T_2 = \dfrac{L_2}{R}. \end{matrix}$$

Avec les conditions initiales $i_1(0^+) = i_2(0^+) = 0$.

D'autre part, le système précédent implique :

$$\left.\frac{di_1}{dt}\right)_{0^+} = \frac{E}{L_1} \quad \text{et} \quad \left.\frac{di_2}{dt}\right)_{0^+} = \frac{E}{L_2}.$$

Posons alors $i_1(t) = i_{1\infty} + i'_1(t)$ et $i_2(t) = i_{2\infty} + i'_2(t)$ où $i_{1\infty}$ a été défini au 2. et $i_{2\infty} = i_\infty - i_{1\infty}$ d'où :

$$\begin{cases} \dfrac{di'_1}{dt} = -\left(\dfrac{1}{\tau_1} + \dfrac{1}{T_1}\right) i'_1 - \dfrac{i'_2}{T_1} \\ \dfrac{di'_2}{dt} = -\left(\dfrac{1}{\tau_2} + \dfrac{1}{T_2}\right) i'_2 - \dfrac{i'_1}{T_2} \end{cases} \quad (4)$$

Il suffit alors de chercher des solutions de la forme $i'_1(t) = A_1 e^{pt}$ et $i'_2(t) = A_2 e^{pt}$.

En reportant dans (4), on peut alors remarquer que p doit vérifier une équation du second degré dont les deux solutions sont nécessairement de la forme :

$$p = -\frac{1}{\tau''} \quad \text{et} \quad lp = -\frac{1}{\tau'''}$$

(un régime pseudo-périodique est ici impossible).

Finalement, on aura :

$$\begin{cases} i_1(t) = i_{1\infty} + \lambda_1 e^{-\frac{t}{\tau'}} + \mu_1 e^{-\frac{t}{\tau''}} \\ i_2(t) = i_{2\infty} + \lambda_2 e^{-\frac{t}{\tau'}} + \mu_2 e^{-\frac{t}{\tau''}} \\ i(t) = i_{\infty} + (\lambda_1 + \lambda_2) e^{-\frac{t}{\tau'}} + (\mu_1 + \mu_2) e^{-\frac{t}{\tau''}} \end{cases}$$

Les coefficients λ_1, λ_2, μ_1 et μ_2 se calculent avec les conditions initiales précisées plus haut.

3. b. Les courbes données sont bien représentatives des résultats précédents.

■ Valeurs asymptotiques :

$$i_{\infty} = \frac{E}{R + \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}} = \frac{\frac{E}{r_1}}{\frac{R}{r_1} + \frac{r_2}{r_1 + r_2}} \text{ ; or } \frac{E}{r_1} = 1 \text{ et } r_1 = r_2 \text{ d'où :}$$

$$i_{\infty} = \frac{1}{\frac{R}{r_1} + 0{,}5} \quad \text{et} \quad i_{1\infty} = i_{\infty}\frac{r_2}{r_1 + r_2} = 0{,}5 i_{\infty} = i_{2\infty}.$$

$\frac{R}{r_1}$	i_{∞}(A)	$i_{1\infty}$(A) = $i_{2\infty}$(A)
0,1	1,67	0,83
1	0,67	0,33
10	$9{,}5 \cdot 10^{-2}$	$4{,}8 \cdot 10^{-2}$
100	$\sim 10^{-2}$	$\sim 5 \cdot 10^{-3}$

■ Pentes à l'origine :

On a $$\frac{di_1}{dt} = \frac{E}{L_1} \Rightarrow \frac{di_1}{d\left(\frac{t}{\tau_1}\right)} = \frac{E}{L_1}\tau_1 = \frac{E}{r_1} = 1$$

de même $$\frac{di_2}{dt} = \frac{E}{L_2} \Rightarrow \frac{di_2}{d\left(\frac{t}{\tau_1}\right)} = \frac{E}{L_2}\tau_1 = \frac{E}{r_1}\frac{L_1}{L_2} = 50.$$

On a bien $\left.\frac{di_2}{dt}\right)_{0^+} \gg \left.\frac{di_1}{dt}\right)_{0^+}$ (rapport 50) comme l'indiquent les graphes. De plus, en traçant les tangentes à l'origine pour les courbes $t \rightarrow i_1(t)$, on montre la cohérence avec la valeur 1 calculée ci-dessus.

Par exemple, en reprenant la figure 1 (*cf.* également la figure 2) :

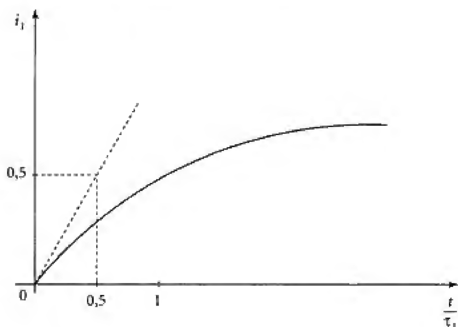


Fig. 1

■ Constantes de temps :

– Le courant $i_1(t)$ dans $\mathcal{L}_1$ ne présente pas, au voisinage de $t = 0^+$, de « brusques » variations comparativement à $i_2(t)$ (et par voie de conséquence à $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$). Ceci est dû à ce que $L_1 \gg L_2$…

– On remarque également que le temps d'établissement du régime permanent semble diminuer quand R augmente, ce qui paraît naturel.

– Pour R suffisamment grand, le courant $i(t)$ devient, très vite, pratiquement constant, les courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$ évoluent alors en sens inverse avec la même constante de temps.

On pourrait montrer que pour R « très grand », les constantes de temps τ'' et τ''' tendent asymptotiquement vers les valeurs :

$$\frac{1}{\tau''} = R\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right) \sim \left(\frac{R}{L_2} \quad \text{ici}\right)$$

$$\frac{1}{\tau'''} = \frac{r_1 + r_2}{L_1 + L_2} \sim \left(\frac{2r_1}{L_1} \quad \text{ici}\right).$$

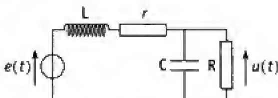
τ'' correspond en fait à la constante de temps du circuit que l'on obtiendrait en négligeant r_1 et r_2 ($R \gg r_1$ et $R \gg r_2$).

τ''' est associée à la constante de temps des deux bobines en série.

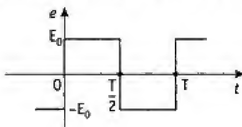
On peut vérifier sur la figure 4 ($\frac{R}{r_1} = 100$ et donc $R \gg (r_1 = r_2)$) que l'on a bien $\tau''' \sim 0{,}5\,\tau_1$ (*cf.* courbe $\frac{t}{\tau_1} \to i_2(t)$)…

214 Circuit LC réel en signaux carrés

On donne le circuit :



Il est alimenté par un générateur de « signaux carrés », périodiques, de période T.



1. Préliminaires :

a. Rappeler l'expression de la résistance critique r_c d'un circuit rLC série.

b. Dans le cas où le régime transitoire s'amortit suffisamment rapidement, déterminer les valeurs asymptotiques de $u(t)$, quand $t \to \left(n+\frac{1}{2}\right)T^-$ puis $t \to (n+1)T^-$.

2. Établir l'équation différentielle régissant la fonction $u(t)$.

Classer les différents types de solutions à l'aide d'une condition portant sur r, r_c et R. Commenter les résultats obtenus.

On posera $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; $\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau}+\frac{1}{\tau'}\right)$ avec $\tau = RC$ et $\tau' = \frac{L}{r}$.

3. Dans le cas où le régime est pseudo-périodique amorti et d'amortissement relativement faible (on supposera que l'on a : $\lambda \ll \omega_0\sqrt{1+\frac{r}{R}}$), quel doit être l'ordre de grandeur de T pour que chaque « train » d'oscillations – généré par la commutation du générateur – soit indépendant du « train » précédent, c'est-à-dire indépendant de la valeur précise de T ? Donner l'expression de $u(t)$ dans ce cas.

1. Ce qu'il faut savoir

Points de cours

- Circuit rLC série : étude du régime transitoire.
- Régimes pseudo-périodique, apériodique critique et apériodique hypercritique.

Outil mathématique

- Résolution d'une équation différentielle linéaire du second ordre avec second membre.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. a. Étant donné un circuit rLC série, la valeur critique r_c de r est celle qui permet de passer d'un régime transitoire pseudo-périodique ($r < r_c$, « faible » amortissement) à un régime transitoire apériodique ($r \geqslant r_c$, « fort » amortissement).

b. Pour $e = E_0$ (ou $e = -E_0$), le régime transitoire s'étant suffisamment amorti, le système finit par atteindre un régime continu où courants et tensions sont des constantes.

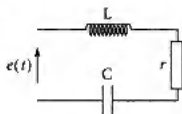
2. L'établissement de l'équation différentielle ne présente guère de difficultés. C'est une équation du second ordre (présence simultanée de L et C) et la nature des solutions dépendra du signe du discriminant de l'équation caractéristique associée.

3. Les oscillations de $u(t)$ sont simples à étudier dans le cas où elles peuvent être considérées comme complètement amorties sur la durée $\frac{T}{2}$: chaque série d'oscillations débute dans les mêmes conditions, indépendantes de la valeur exacte de T… Ces conditions sont alors celles du régime continu permanent du circuit.

3. Solution

1. a. Considérons le circuit rLC série alimenté par un générateur continu :

$e(t) = 0$ pour $t < 0$ et $e(t) = E_0$ pour $t > 0$. L'évolution du circuit est régie par l'équation différentielle :



$$ri + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = E_0 \quad \text{avec} \quad i = \frac{dq}{dt}.$$

Soit encore :

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + r\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E_0$$

dont la solution est fournie par $q(t) = CE_0 + q'(t)$ avec :

$$L\frac{d^2q'}{dt^2} + r\frac{dq'}{dt} + \frac{q'}{C} = 0.$$

POINT COURS

La solution générale de cette équation homogène associée (équation sans second membre) s'obtient à partir de l'équation caractéristique que doit vérifier la grandeur α pour que $e^{\alpha t}$ soit solution :

$$L\alpha^2 + r\alpha + \frac{1}{C} = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \frac{r}{L}\alpha + \frac{1}{LC} = 0.$$

C'est une équation du second degré, de discriminant Δ tel que :

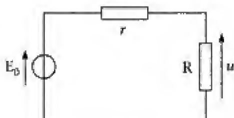
$$\Delta = \left(\frac{r}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}.$$

C'est le signe de ce discriminant qui détermine la nature des solutions du problème physique.

La résistance critique r_c correspond donc à la valeur de r qui annule Δ soit :

$$\frac{r_c^2}{L^2} = \frac{4}{LC} \Rightarrow \boxed{r_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}} \quad (1)$$

1. b. Pour $e = +E_0$, supposons le régime permanent atteint. On a alors i_L = cste et q = cste, soit encore : $u_L = 0$ et $i_C = 0$. Le circuit devient :



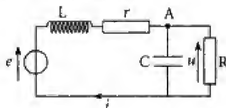
Il se réduit à un simple diviseur de tension, de sorte que :

$$\boxed{u\left(t \rightarrow \left(n+\frac{1}{2}\right)T^-\right) = E_0\frac{R}{r+R}} \quad (2)$$

De même, pour $e = -E_0$:

$$\boxed{u(t \rightarrow (n+1)T^-) = -E_0\frac{R}{r+R}} \quad (2')$$

2. Soit $i(t)$ le courant traversant le générateur.



D'après la loi des mailles :

$$L\frac{di}{dt} + ri + u - e = 0$$

et, d'après la loi des nœuds en A :

$$i = i_C + i_R = C\frac{du}{dt} + \frac{u}{R}$$

d'où, en éliminant i :

$$LC\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{L}{R}\cdot\frac{du}{dt} + rC\frac{du}{dt} + \frac{r}{R}u + u = e = \pm E_0$$

et finalement :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\frac{1}{RC} + \frac{r}{L}\right)\cdot\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}\left(1 + \frac{r}{R}\right)u = \pm\frac{E_0}{LC}.$$

Point méthode

• La solution générale de cette équation différentielle du second ordre s'écrit :

$$u(t) = \left\{\begin{array}{l}\text{solution}\\ \text{particulière}\\ \text{de l'éq. complète}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{l}\text{solution générale}\\ \text{de l'équation}\\ \text{homogène associée}\end{array}\right\}.$$

• Une solution particulière est $u = \pm E_0 \cdot \frac{R}{R+r}$.

• L'équation homogène associée admet des solutions en $e^{\alpha t}$ telles que :

$$\alpha^2 + \left(\frac{1}{RC} + \frac{r}{L}\right)\alpha + \frac{1}{LC}\left(1 + \frac{r}{R}\right) = 0 \quad (3)$$

comme on l'a déjà indiqué précédemment, la nature des solutions physiques dépendra du signe du discriminant Δ.

Posons $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $2\lambda = \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau'}\right) = \left(\frac{1}{RC} + \frac{r}{L}\right)$; (3) devient :

$$\alpha^2 + 2\lambda\alpha + \omega_0^2\left(1 + \frac{r}{R}\right) = 0$$

et $\Delta = 4\left[\lambda^2 - \omega_0^2\left(1 + \frac{r}{R}\right)\right]$.

• 1er cas : $\Delta > 0$

Les solutions de l'équation caractéristique sont alors :

$$\alpha_1, \alpha_2 = -\lambda \pm \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} \quad (\alpha_1 \text{ et } \alpha_2 < 0)$$

et les solutions $u(t)$ cherchées sont de la forme :

$$u(t) = \pm\frac{RE_0}{R+r} + Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t} \quad (4)$$

On dit que le régime est **apériodique amorti.**

• 2e cas : $\Delta = 0$

L'équation caractéristique admet une racine double $-\lambda$ et les solutions $u(t)$ s'écrivent alors :

$$u(t) = \pm\frac{RE_0}{R+r} + (A + Bt)e^{-\lambda t} \quad (5)$$

C'est le **régime apériodique critique.**

• 3e cas : $\Delta < 0$

On pose alors $\omega^2 = \omega_0^2\left(1 + \frac{r}{R}\right) - \lambda^2$

d'où $\alpha_1, \alpha_2 = -\lambda \pm i\omega \quad (i^2 = -1)$

et $u(t) = \pm\frac{RE_0}{R+r} + (A\cos\omega t + B\sin\omega t)e^{-\lambda t} \quad (6)$

et le régime est alors appelé **pseudo-périodique amorti.**

Le régime pseudo-périodique est donc obtenu pour $\Delta < 0$, c'est-à-dire pour :

$$\lambda^2 < \omega_0^2\left(1 + \frac{r}{R}\right)$$

et en revenant aux données du problème

$$\left(\frac{1}{RC} + \frac{r}{L}\right)^2 < \frac{4}{LC}\left(1 + \frac{r}{R}\right)$$

et avec $r_c^2 = 4\frac{L}{C}$:

$$\left(r + \frac{r_c^2}{4R}\right)^2 < r_c^2\left(1 + \frac{r}{R}\right) \Rightarrow \left(r - \frac{r_c^2}{4R}\right)^2 < r_c^2.$$

Finalement

$$\boxed{\left|r - \frac{r_c^2}{4R}\right| < r_c} \quad (7)$$

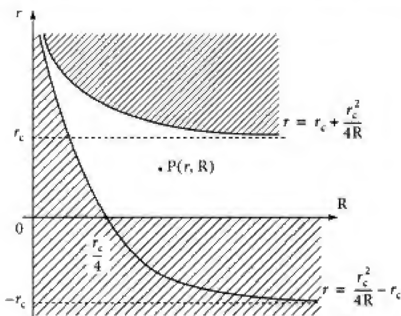
Le régime pseudo-périodique correspond donc à :

$$\frac{r_c^2}{4R} - r_c < r < r_c + \frac{r_c^2}{4R}$$

soit encore à :

$$\boxed{\sup\left[0, \frac{r_c^2}{4R} - r_c\right] < r < r_c + \frac{r_c^2}{4R}}$$

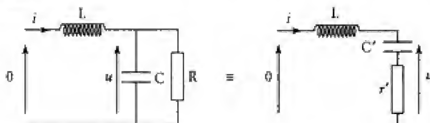
Donnons-en une représentation graphique à L et C fixés (donc à r_c fixé) :



Tout point représentatif $P(r, R)$ appartenant au domaine non hachuré convient (régime pseudo-périodique).

Commentaires

• Pour R infinie, le montage se réduit au circuit rLC série classique. Le régime pseudo-périodique correspond bien à $r < r_c$, par définition de r_c.
• Pour R = 0, il n'y a plus de valeur possible pour r, la capacité étant court-circuitée.
• Pour $r = 0$, il suffit de remarquer que l'on peut établir pour le régime transitoire l'équivalence suivante :



En effet, on a :

$$\begin{cases} 0 = L\dfrac{di}{dt} + u \\ \text{et } i = \dfrac{u}{R} + C\dfrac{du}{dt} \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = L\dfrac{di}{dt} + r'i + \dfrac{q'}{C'} \\ \text{et } i = \dfrac{dq'}{dt} \end{cases}$$

d'où $\quad i = -\dfrac{L}{R}\dfrac{di}{dt} - LC\dfrac{d^2i}{dt^2}$ $\qquad$ d'où $\quad 0 = L\dfrac{d^2i}{dt^2} + r'\dfrac{di}{dt} + \dfrac{i}{C'} = 0$

soit $\quad \dfrac{d^2i}{dt^2} + \dfrac{1}{RC}\dfrac{di}{dt} + \dfrac{1}{LC}i = 0$ $\qquad$ soit $\quad \dfrac{d^2i}{dt^2} + \dfrac{r'}{L}\dfrac{di}{dt} + \dfrac{1}{LC'}i = 0.$

Les deux équations régissant les variations de $i(t)$ deviennent identiques pour $C' = C$ et $\dfrac{r'}{L} = \dfrac{1}{RC} \Rightarrow r' = \dfrac{L}{RC} = \dfrac{r_c^2}{4R}$.

Le régime sera donc bien pseudo-périodique pour $r' < r_c$, c'est-à-dire pour :

$$\boxed{R > \frac{r_c}{4}}$$

3. La condition (7) est réalisée, et le régime est pseudo-périodique : on a donc pour les valeurs $\pm E_0$ de $e(t)$:

$$u(t) = \pm E_0\frac{R}{R+r} + e^{-\lambda t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t) \quad (8)$$

soit encore $u(t) = \pm E_0\dfrac{R}{R+r} + \sqrt{A^2+B^2}\cdot e^{-\lambda t}\cos(\omega t + \varphi)$.

On considère que les oscillations deviennent « imperceptibles » lorsque leur amplitude (à savoir $\sqrt{A^2+B^2}e^{-\lambda t}$) est devenue négligeable comparée au saut de tension $2E_0\dfrac{R}{R+r}$ imposé à $u(t)$ par le générateur.

On prendra par exemple :

$$\sqrt{A^2+B^2}e^{-\lambda t} \leq 10^{-2}\cdot 2E_0\frac{R}{R+r}$$

et si t_0 désigne la valeur de t correspondant à l'égalité, la condition cherchée s'exprimera sous la forme $t_0 \leq \dfrac{T}{2}$…

Il faut donc déterminer A et B : on peut le faire en supposant que l'on est bien dans la situation décrite ci-dessus, c'est-à-dire qu'au moment d'une commutation ($t = n\mathrm{T}$ par exemple) où $e(t)$ passe de $-\mathrm{E}_0$ à $+\mathrm{E}_0$, la tension u vaut $-\dfrac{\mathrm{RE}_0}{\mathrm{R}+r}$ et le courant i (régime permanent continu) :

$$i = -\frac{\mathrm{E}_0}{\mathrm{R}+r}.$$

D'où, en prenant une nouvelle origine des temps à cet instant :

$$u(0^+) = -\frac{\mathrm{RE}_0}{\mathrm{R}+r}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t=0^+) = \left(\frac{i}{\mathrm{C}} - \frac{u}{\mathrm{RC}}\right)_{t=0^+}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t=0^+) = -\frac{1}{\mathrm{C}}\cdot\frac{\mathrm{E}_0}{\mathrm{R}+r} + \frac{1}{\mathrm{RC}}\cdot\frac{\mathrm{RE}_0}{\mathrm{R}+r} = 0.$$

En reportant dans l'expression (8) de $u(t)$ (signe $\oplus$ pour $t > 0$) :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{RE}_0}{\mathrm{R}+r} + \mathrm{A} = -\dfrac{\mathrm{RE}_0}{\mathrm{R}+r} & \left(u(0^+) = -\dfrac{\mathrm{RE}_0}{\mathrm{R}+r}\right) \\ -\lambda\mathrm{A} + \mathrm{B}\omega = 0 & \left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) = 0\right) \end{cases}$$

Il vient $$\mathrm{A} = -2\frac{\mathrm{RE}_0}{\mathrm{R}+r} \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = \frac{\lambda}{\omega}\cdot\mathrm{A}$$

d'où l'amplitude des oscillations :

$$\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2} = 2\frac{\mathrm{RE}_0}{\mathrm{R}+r}\cdot\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{\omega^2}}$$

et la condition cherchée (avec $t_0 \leqslant \dfrac{\mathrm{T}}{2}$) :

$$e^{-\lambda\frac{\mathrm{T}}{2}} < 10^{-2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{\lambda^2}{\omega^2}}}$$

$$\lambda\frac{\mathrm{T}}{2} > 2\ln 10 + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right).$$

Si on se place dans le cas de l'amortissement faible (λ « pas trop grand », c'est-à-dire $\lambda \ll \omega_0\sqrt{1+\dfrac{r}{\mathrm{R}}}$ pour que les oscillations soient visibles sur plusieurs pseudo-périodes), on peut négliger le dernier terme :

$$\frac{\lambda^2}{\omega^2} \approx \frac{\lambda^2}{\omega_0^2\left(1+\dfrac{r}{\mathrm{R}}\right)} \ll 1 \Rightarrow \lambda\mathrm{T} \geqslant 4\ln(10) \sim 10 \text{ (ordre de grandeur).}$$

Il faut donc, avec $\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau}+\frac{1}{\tau'}\right)$ $\left(\tau = RC \text{ et } \tau' = \frac{L}{r}\right)$:

$$\boxed{T \geqslant 20\frac{\tau\tau'}{\tau+\tau'}}$$

Lorsque cette condition est réalisée, les oscillations sont effectivement amorties au bout du temps $\frac{T}{2}$, ce qui justifie les conditions initiales prises pour calculer A et B.

L'expression de $u(t)$ est bien alors :

pour $nT < T \leqslant \left(n+\frac{1}{2}\right)T$ $\boxed{u(t) = \frac{RE_0}{R+r}\left[1-2e^{-\lambda t'}\left(\frac{\lambda}{\omega}\sin\omega t' + \cos\omega t'\right)\right]}$

où $t' = t - nT$;

pour $\left(n+\frac{1}{2}\right)T < t \leqslant (n+1)T$, $u(t)$ change de signe et t' est remplacé par $t' - \frac{T}{2}$…

Commentaire

La valeur de l'expression $\frac{\tau\tau'}{\tau+\tau'}$ est toujours inférieure à la plus petite des deux valeurs τ et τ'…

On peut donc prendre (condition suffisante…)

$$\boxed{T \geqslant 20 \cdot \text{Min}(\tau, \tau')}$$

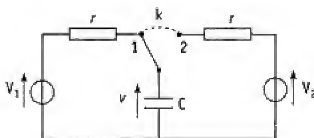
215 Simulation de résistance

Dans le circuit ci-dessous, le commutateur k bascule périodiquement d'une position à l'autre, suivant la loi :

$nT < t \leqslant \left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot T$ k en position 1

$\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot T < t \leqslant (n+1)T$ k en position 2

(n entier relatif, et $V_2 < V_1$).



On suppose le phénomène établi depuis longtemps : **toutes les grandeurs électriques du circuit sont périodiques de période T** et on prend comme instant initial $t = 0$, la commutation correspondant à $n = 0$.

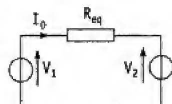
1. On pose $v(0) = V_0$: déterminer la loi donnant $v(t)$ pour $0 < t \leq \frac{T}{2}$, puis pour $\frac{T}{2} < t \leq T$. On notera $v\left(\frac{T}{2}\right) = V'_0$ et $a = \frac{T}{2rC}$.

2. Exprimer V_0 et V'_0 en fonction de V_1, V_2 et a.

En déduire l'expression de la quantité d'électricité qui transite du générateur « V_1 » au générateur « V_2 » pendant une période T, et calculer l'intensité moyenne I_0 correspondant à ce transfert de charges.

3. Quelle serait la résistance R_{eq} qui serait traversée par le même courant moyen ?
Donner son expression en fonction de r et a. Comment varie R_{eq} lorsque T (ou a) est modifié ?

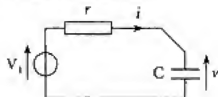
4. Interpréter physiquement les valeurs limites de R_{eq}.



Solution

1. Le commutateur k étant en position 1, le circuit se réduit à un circuit rC :

$$V_1 = ri + v$$



avec $$i = C\frac{dv}{dt}$$

soit : $$rC\frac{dv}{dt} + v = V_1$$

équation différentielle du 1er ordre dont la solution générale est de la forme :

$$v(t) = V_1 + Ae^{-t/\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = rC.$$

Tenant compte de la condition initiale

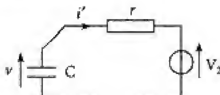
$$v(0) = V_0 = V_1 + A$$

il vient : $$A = V_0 - V_1$$

et : $$\boxed{v(t) = V_1 + (V_0 - V_1)e^{-t/\tau}} \quad \text{pour} \quad 0 < t \leq \frac{T}{2}.$$

À $t = \frac{T}{2}$, le commutateur bascule en position 2, et le circuit devient :

$$v - ri' = V_2$$



avec $$i' = -C\frac{dv}{dt}$$

soit encore :

$$rC\frac{dv}{dt} + v = V_2$$

ce qui était prévisible, étant donnée la symétrie de l'ensemble du circuit…

La solution, pour $\frac{T}{2} < t \leqslant T$, est donc de la forme :

$$v(t) = V_2 + Be^{-\frac{(t - T/2)}{\tau}}.$$

Il reste à exprimer la continuité de la tension $v(t)$ aux bornes du condensateur à la date $t = \frac{T}{2}$:

$$V_0' = v\left(\frac{T^-}{2}\right) = V_1 + (V_0 - V_1)e^{-\frac{T}{2\tau}}$$

et : $$V_0' = v\left(\frac{T^+}{2}\right) = V_2 + B$$

d'où : $$B = V_0' - V_2$$

avec $$\frac{T}{2\tau} = \frac{T}{2rC} = a, \text{ il vient } e^{+T/2\tau} = e^a$$

et finalement pour $\frac{T}{2} < t \leqslant T$: $\boxed{v(t) = V_2 + (V_0' - V_2)e^a \cdot e^{-t/\tau}}$

et $V_0' = V_1 + (V_0 - V_1)e^{-a}$ (1)

2. Le régime périodique étant supposé atteint, on doit de plus avoir :

$$v(t + T) = v(t)$$

soit : $$v(T) = V_0$$

or : $$v(T) = V_2 + (V_0' - V_2)e^a \cdot e^{-T/\tau}$$

avec $e^{-T/\tau} = e^{-2a}$: $$V_2 + (V_0' - V_2)e^{-a} = V_0 \quad (2)$$

Les relations (1) et (2) déterminent V_0 et V_0' :

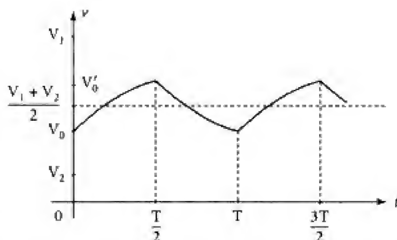
$$\begin{cases} V_0' - V_0 e^{-a} = V_1(1 - e^{-a}) \\ -V_0' e^{-a} + V_0 = V_2(1 - e^{-a}) \end{cases}$$

et, par addition : $V_0' + V_0 = V_1 + V_2$

d'où les solutions (en éliminant V_0' ou V_0)

$$\boxed{V_0 = \frac{V_2 + V_1 e^{-a}}{1 + e^{-a}}} \qquad \boxed{V_0' = \frac{V_1 + V_2 e^{-a}}{1 + e^{-a}}}$$

On en déduit l'allure de la courbe donnant $v(t)$ (V_0 et V_0' sont des barycentres des tensions V_1 et V_2, avec des coefficients positifs 1 et e^{-a}, et sont symétriques par rapport à $\frac{V_1 + V_2}{2}$ ...).



Pendant la charge de C de V_0 à V_0', le générateur « V_1 » a fourni au condensateur C la quantité d'électricité :

$$q = CV_0' - CV_0 = C(V_0' - V_0)$$

$$q = C(V_1 - V_2)\frac{1 - e^{-a}}{1 + e^{-a}}$$

$$q = C(V_1 - V_2) \cdot \tanh\left(\frac{a}{2}\right).$$

Puis, entre $\frac{T}{2}$ et T, cette même quantité d'électricité est transmise au générateur « V_2 » (décharge de C). Au total, une charge q est transmise d'un générateur à l'autre à chaque période T, ce qui correspond à une intensité moyenne :

$$I_0 = \frac{q}{T} = \frac{C}{T}(V_1 - V_2)\tanh\left(\frac{a}{2}\right)$$

ou encore :

$$\boxed{I_0 = \frac{(V_1 - V_2)}{2ra}\tanh\left(\frac{a}{2}\right)}$$

3. Par définition de R_{eq} :

$$R_{eq} = \frac{(V_1 - V_2)}{I_0}$$

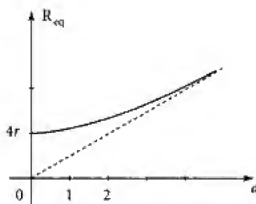
soit :

$$\boxed{R_{eq} = \frac{2ra}{\tanh\left(\frac{a}{2}\right)} = 2ra \operatorname{cotanh}\left(\frac{a}{2}\right)}$$

Si la commutation est très rapide : $T \ll rC$, soit $a \ll 1$, $\tanh\left(\frac{a}{2}\right) \# \frac{a}{2}$ et $R_{eq} \to 4r$.

Si au contraire $T \gg rC$, soit $a \gg 1$, $\tanh\left(\frac{a}{2}\right) \to 1$ et $R_{eq} \# 2ra$.

D'où le graphe :



4. On peut interpréter physiquement les valeurs limites de R_{eq} :

• Lorsque $T \gg rC$, le condensateur C a le temps de se charger (sous la tension V_1) et de se décharger (dans le générateur « V_2 ») presque complètement : la charge transférée à chaque période ne dépend plus de T et $I_0 = \frac{q}{T}$ est inversement proportionnel à T ; on a donc R_{eq} proportionnelle à T.

• Lorsque $T \ll rC$, la tension $v(t)$ varie très peu et les courants sont pratiquement constants :

$$i \# \frac{V_1 - v}{r} \# i' = \frac{v - V_2}{r}$$

et la conservation de la charge impose :

$$q = i \cdot \frac{T}{2} = i' \cdot \frac{T}{2} = I_0 \cdot T$$

et

$$I_0 = \frac{i}{2} = \frac{V_1 - v}{2r} = \frac{v - V_2}{2r} = \frac{(V_1 - v) + (v - V_2)}{2r + 2r}$$

$$I_0 = \frac{V_1 - V_2}{4r}, \text{ soit } \quad R_{eq} = 4r.$$

Ce dernier résultat est cohérent avec la conservation de l'énergie : évaluons l'effet Joule dans les résistances r :

$$W_J = ri^2 \cdot \frac{T}{2} + ri'^2 \cdot \frac{T}{2} = ri^2 \cdot T$$

avec

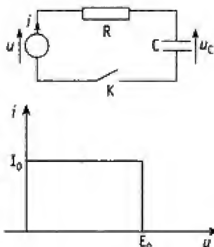
$$i = 2I_0 ; \quad W_J = 4rI_0^2 \cdot T$$

ce qui est en accord avec $R_{eq} = 4r$...

216 Attaque par un générateur à caractéristique rectangulaire

1. Un circuit RC série est attaqué par un générateur à caractéristique rectangulaire :

$$\begin{cases} i = I_0 & \text{pour} \quad u \leqslant E_0 \\ u = E_0 & \text{pour} \quad i \leqslant I_0 \end{cases}$$



(c'est un générateur parfait de tension pour les intensités inférieures à I_0, et un générateur parfait de courant – de valeur I_0 – lorsque l'intensité dans le circuit atteint cette valeur I_0 : la tension aux bornes du générateur s'établit alors à une valeur inférieure à E_0...).

Le condensateur est déchargé pour $t < 0$. L'interrupteur est fermé à $t = 0$.

Déterminer les graphes des fonctions :

$t \to i(t)$, $t \to u_C(t)$, $t \to u(t)$ pour t positif.

On pourra poser $R_0 = \dfrac{E_0}{I_0}$ et on envisagera plusieurs cas selon la valeur de R comparée à celle de R_0.

2. On remplace la capacité C par une inductance pure L, u_C devenant u_L. Reprendre la question précédente.

3. *Application numérique* :

$E_0 = 40$ V ; $I_0 = 10$ mA ; $L = 50$ mH ; $C = 2$ µF ; $R = 2$ kΩ.

1. Ce qu'il faut savoir

Points de cours

- Continuité de la charge d'un condensateur et du courant dans une bobine.
- Relation courant-tension pour une capacité et pour une inductance.

Outil mathématique

- Résolution des équations différentielles linéaires du premier degré.

2. Ce qu'il faut comprendre

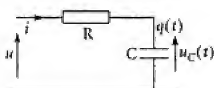
1. Le courant initial de charge d'un condensateur à travers une résistance R (et sous l'effet d'un générateur de tension de f.e.m. E_0) est $I(0) = \dfrac{E_0}{R}$. On peut donc s'attendre à ce que l'évolution du système dépende de la valeur de $I(0)$ comparée à $I_0 = \dfrac{E_0}{R_0}$,

c'est-à-dire de celle de R comparée à R_0. Deux cas seront alors à envisager selon que $I(0)$ est inférieur ou égal à I_0 (soit $R \geq R_0$), ou que $I(0)$ est supérieur à I_0 ($R < R_0$).

2. On a remplacé la capacité par une inductance. De ce fait, le courant $i(t)$ reste nul à l'instant $t = 0^+$, la tension $u(t)$ se fixant à E_0. Le courant $i(t)$ va donc s'établir dans le circuit en « tendant » asymptotiquement vers $I_\infty = \frac{E_0}{R}$. Le même problème se pose alors selon que I_∞ est inférieur ou égal à I_0 ($R \geq R_0$), ou que $I_\infty > I_0$ ($R < R_0$).

3. Solution

1. Les équations générales du circuit s'écrivent :



$$\begin{cases} u = Ri + u_C \\ i = \dfrac{dq}{dt} = C\dfrac{du_C}{dt} \quad \text{(puisque } q = Cu\text{)}. \end{cases}$$

Les conditions initiales imposent $u_C(0^+) = 0$ et par la même $u(0^+) = Ri(0^+)$. Si le courant « demandé » par le circuit RC est inférieur à I_0, le générateur fonctionne en générateur parfait de tension, et $u(0^+) = E_0$. Alors :

$$i(0^+) = \frac{E_0}{R} < I_0$$

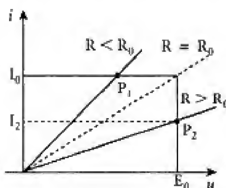
correspond à :

$$\frac{E_0}{R} < \frac{E_0}{R_0}, \text{ soit : } R > R_0.$$

Dans le cas contraire ($R < R_0$), le courant dans le circuit est limité à I_0, et on a alors :

$$u(0^+) = RI_0, \text{ avec } u(0^+) < E_0.$$

On peut représenter ces deux situations graphiquement en traçant la droite $i = \frac{u}{R}$ sur le graphe de la caractéristique du générateur :



l'intersection de cette droite avec la courbe représentative du fonctionnement du générateur donne le « point de fonctionnement » du circuit (couple de valeur (u, i) acceptable par les deux branches du circuit) :

- Pour $R < R_0$, il s'agit du point P_1 : dans un premier temps, le condensateur se chargera donc à courant constant...
- Pour $R \geq R_0$, il s'agit du point P_2 : le condensateur se charge à tension d'attaque constante ($u = E_0$). En effet, le courant de charge est maximal à $t = 0^+$ et vaut ici I_2 ; on aura donc $i(t) < I_2$ et la tension u restera bloquée à E_0.

D'où l'étude qui suit :

■ 1er cas : $R \geqslant R_0$

D'après ce qui précède, on a pour tout $t > 0$ $u = E_0 = RC\dfrac{du_C}{dt} + u_C$.

Notons $\tau = RC$ la constante de temps qui apparaît dans cette équation différentielle :

$$u_C + \tau\frac{du_C}{dt} = E_0 \quad (1) \;\Rightarrow u_C(t) = E_0 + \lambda e^{-t/\tau}.$$

La continuité de la charge du condensateur implique celle de u_C soit :

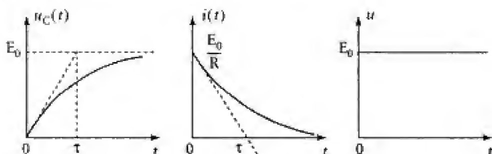
$$q(0^-) = q(0^+) = 0 \Rightarrow u_C(0^-) = u_C(0^+) = 0 \quad \text{et donc} \quad \lambda = -E_0.$$

Dès lors : $\boxed{u_C(t) = E_0(1 - e^{-t/\tau})}$

et $i(t) = C\dfrac{du_C}{dt} \Rightarrow \boxed{i(t) = \dfrac{E_0}{R}e^{-t/\tau}}$

On a bien : $i(t) \leqslant \dfrac{E_0}{R}$ soit $i(t) \leqslant I_0$ comme il se doit.

D'où les graphes :



■ 2e cas : $R < R_0$

Dans une première phase, la charge s'effectue à courant constant I_0.

La tension u_C va augmenter, et il en sera de même de u ($u = RI_0 + u_C$) qui va finir par atteindre la valeur E_0. Il s'ensuit une deuxième phase de charge à u = constante, le courant $i(t)$ diminuant et tendant vers zéro en fin de charge.

– 1re phase : $i(t) = I_0 = C\dfrac{du_C}{dt} \Rightarrow u_C = \dfrac{I_0}{C}t \quad (u_C(0^+) = 0)$.

D'autre part, $u = RI_0 + u_C$, d'où $u(t) = RI_0 + \dfrac{I_0}{C}t$

et $\boxed{u(t) = RI_0\left(1 + \dfrac{t}{\tau}\right);\ t < t_0}$

$u(t)$ atteint la valeur E_0 à l'instant t_0 défini par :

$$u(t_0) = E_0$$

$$\Rightarrow E_0 = RI_0\left(1 + \frac{t_0}{\tau}\right) \Rightarrow t_0 = \tau\left(\frac{R_0}{R} - 1\right).$$

– 2ᵉ phase : pour $t > t_0$, la tension u se bloque à E_0 et l'évolution de $u_C(t)$ est définie par l'équation (1) d'où :

$$u_C(t > t_0) = E_0 + \lambda e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}}.$$

Traduisons alors la continuité de u_C en $t = t_0$: $u_C(t_0^+) = u_C(t_0^-)$.

Or $\quad u_C(t_0^-) = \frac{I_0}{C}t_0 = \frac{I_0}{C}RC\left(\frac{R_0}{R} - 1\right) = I_0(R_0 - R) = E_0 - RI_0 = u_C(t_0^+)$.

Finalement :

$$E_0 + \lambda = E_0 - RI_0$$
$$\Rightarrow \lambda = -RI_0$$

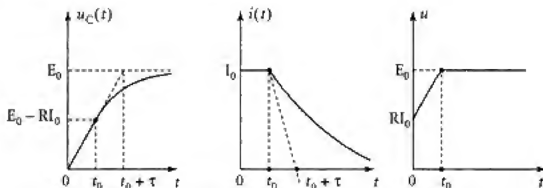
d'où :

$$\boxed{u_C(t > t_0) = E_0 - RI_0 e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}}}$$

D'autre part : $i(t) = C\frac{du_C}{dt} = \frac{RCI_0}{\tau}e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}}$

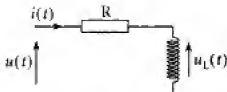
$$\Rightarrow \boxed{i(t > t_0) = I_0 e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}}}$$

D'où les graphes :



2. En remplaçant le condensateur par une bobine, les équations du circuit deviennent :

$$\begin{cases} u = Ri + L\frac{di}{dt} \\ u_L = L\frac{di}{dt} \end{cases}$$



Les conditions initiales imposent ici $i(0^+) = 0$ (continuité du flux et donc de l'intensité dans la bobine). Dans un premier temps, la tension de sortie du générateur sera fixée à E_0 (point P_0 de la caractéristique : $i = 0$ et $u = E_0$).

On a donc :

$$L\frac{di}{dt}(0^+) = u(0^+) - Ri(0^+) = E_0$$

et le courant $i(t)$ va croître à partir de 0. Tant que $i(t) < I_0$, la tension $u(t)$ conserve la valeur E_0, l'équation fixant l'évolution de $i(t)$ s'écrivant :

$$E_0 = Ri + L\frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{E_0}{R} = i(t) + \tau\frac{di}{dt} \quad \text{où} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

représente la constante de temps du circuit L-R. L'intégration de cette équation donne :

$i(t) = \dfrac{E_0}{R}(1 - e^{-t/\tau})$ tant que $i(t) \leqslant I_0$.

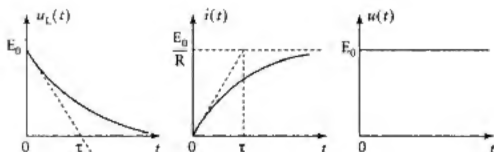
Donc deux cas sont à envisager :

• 1er cas : $\dfrac{E_0}{R} \leqslant I_0$ soit $R \geqslant R_0$ $\left(R_0 = \dfrac{E_0}{I_0}\right)$

On a bien, pour tout t, $\boxed{i(t) = \dfrac{E_0}{R}(1 - e^{-t/\tau})}$

Dès lors, $u_L = L\dfrac{di}{dt} \Rightarrow u_L = \dfrac{LE_0}{R\tau}e^{-t/\tau} \Rightarrow$ $\boxed{u_L(t) = E_0 e^{-t/\tau}}$

D'où les graphes :



• 2e cas : $R < R_0$

La première phase décrite précédemment s'arrête à l'instant t_0 tel que $i(t_0) = I_0$, d'où :

$$\frac{E_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{t_0}{\tau}}\right) = I_0 = \frac{E_0}{R_0}$$

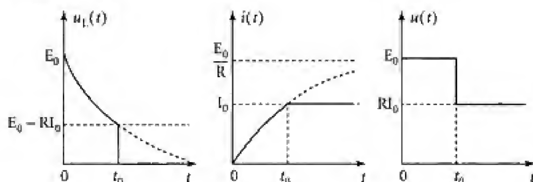
soit : $e^{-\frac{t_0}{\tau}} = 1 - \dfrac{R}{R_0} \Rightarrow t_0 = -\tau \ln\left(1 - \dfrac{R}{R_0}\right)$.

À cet instant, on a $u(t) = E_0$ et $i(t_0) = I_0$, d'où :

$$u_L(t_0^-) = u(t_0^-) - Ri(t_0^-) = E_0 - RI_0 > 0.$$

Pour $t > t_0$, le courant $i(t)$ se fixe à I_0 et la tension u_L tombe à zéro et s'y maintient, u passant à la valeur : $u = RI_0 + u_L = RI_0$.

D'où les graphes :



3. *Application numérique* :

Il nous faut donc comparer R_0 et R.

Or $R_0 = \frac{E_0}{I_0} = \frac{40}{10 \cdot 10^{-3}} = 4\ k\Omega$ et $R = 2\ k\Omega$, ce qui implique : $R < R_0$ et l'évolution du système correspond au 2e cas aussi bien avec C qu'avec L.

Les autres caractéristiques sont données dans le tableau ci-dessous :

	τ	t_0
C	4 ms	4 ms
L	25 µs	17 µs

$\tau_C = RC$

$\tau_L = \frac{L}{R}$

Chapitre

3

Optique géométrique

301 Prisme à réflexion totale

Un rayon lumineux arrive sous incidence normale sur un prisme de verre d'indice n, et ressort parallèlement au rayon incident après deux réflexions totales sous une incidence de 45° à l'intérieur du verre (*cf.* figure), lorsque le prisme est dans l'air.



Par contre, la réflexion totale n'a pas lieu si la partie inférieure du prisme est plongée dans l'eau.

Dans quelles limites se situe la valeur de l'indice n ?

L'indice de l'eau vaut $\frac{4}{3}$, et l'indice de l'air sera pris égal à 1.

1. Ce qu'il faut savoir

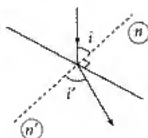
- Loi de la réfraction (Descartes) : cas de la réflexion totale.

2. Ce qu'il faut comprendre

Le rayon émergent peut ne pas exister (réflexion totale) lorsque l'indice du second milieu est plus petit que celui du premier milieu. La condition d'existence de ce rayon dépend de l'angle d'incidence et du rapport des indices des deux milieux.

3. Solution

Considérons la réfraction d'un rayon lumineux entre deux milieux d'indices respectifs n et n'. D'après la loi de Descartes, $n \sin i = n' \sin i'$



soit $\sin i' = \frac{n}{n'} \sin i$ avec, dans le cas présent,

$i = 45°$ et $\sin i = \frac{\sqrt{2}}{2}$ d'où : $\sin i' = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{n}{n'}$ (1)

La réflexion totale correspond au cas où il n'existe pas de valeur de i' vérifiant cette relation, donc pour : $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{n}{n'} > 1$.

Dans le cas contraire, il existe un rayon émergent dans la direction i' définie par la relation (1).

D'où les deux conditions :

– dans l'air, $n' = 1$, et la réflexion totale exige $n > \frac{2n'}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$;

– si le prisme est plongé dans l'eau $\left(n' = \frac{4}{3}\right)$, il existe un rayon émergent, ce qui implique : $n \leqslant \frac{2n'}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

ce qui donne, numériquement : $\boxed{1{,}414 < n \leqslant 1{,}886}$

Un tel dispositif peut servir – par exemple – de détecteur de niveau d'eau : tant que le prisme baigne dans l'eau, le faisceau émergent est très atténué, alors qu'il a l'intensité du faisceau incident lorsque le prisme est dans l'air.

302 Doubleur de focale

À l'aide d'un objectif – assimilable à une lentille mince convergente L de distance focale f' – on désire former l'image d'un objet réel AB sur une plaque photographique située à une distance D de l'objet.

1. Entre quelles valeurs peut varier D pour qu'il en soit ainsi ? Préciser la distance d séparant la lentille de la plaque photographique (on se limitera à $d \leqslant \frac{D}{2}$).

2. La lentille convergente L restant fixe par rapport à l'objet AB, on recule la plaque photographique, et on intercale entre celle-ci et L une lentille divergente L_1 de « distance » focale $f'_1 = -6$ cm.

Comment doit-on placer L_1 pour que le grandissement linéaire du système soit multiplié par deux ? De combien a-t-il fallu déplacer la plaque photographique ?

1. Ce qu'il faut savoir

- Relation(s) de conjugaison pour une lentille mince.
- Objets et images réels ou virtuels.

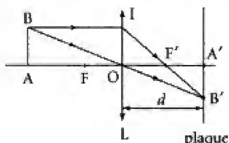
2. Ce qu'il faut comprendre

1. Le principe de l'appareil photographique exige que l'objet et l'image soient réels, ce qui ne laisse que peu de possibilités…

2. La lentille divergente L_1 doit donner une nouvelle image, agrandie et toujours réelle : c'est cette condition qui va déterminer la position de L_1 par rapport à l'image de l'objet donnée par L.

3. Solution

1. L'image A'B' d'un objet réel AB donnée par la lentille L est déterminée par la position du point B', intersection du rayon BO (qui n'est pas dévié dans L) et du rayon émergent IF' correspondant à un rayon incident parallèle à l'axe de L.



Dans le cas de figure, B' est réel ; il est virtuel lorsque BO coupe **le prolongement** (à gauche de L) du rayon IF'. Il faut donc que A soit à gauche de F ($\overline{FA} < 0$) ce qui implique (relation de conjugaison de Newton : $\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -f'^2 < 0$) que A' est à droite de F'...

En utilisant la relation de conjugaison de Descartes :

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}.$$

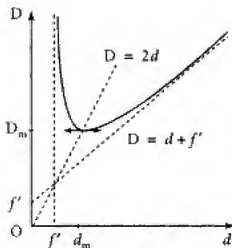
Avec $p' = \overline{OA'} = d$, $p = \overline{OA}$ et $D = \overline{AA'} = \overline{AO} + \overline{OA'} = -p + d$,

il vient
$$\frac{1}{d} + \frac{1}{D-d} = \frac{1}{f'}$$

$$\frac{1}{D-d} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{d} = \frac{d-f'}{df'}$$

et
$$D = d + \frac{df'}{d-f'} = \frac{d^2}{d-f'}.$$

Traçons le graphe de $D(d)$ pour $d \geqslant f'$:



• $d \to \infty$: $\frac{D}{d} \to 1$

et $D - d \to f'$;

• la courbe a pour asymptote la droite :

$$D = d + f' ;$$

• $d \to f'$ par valeurs supérieures :

$$D \to +\infty ;$$

• la courbe admet un minimum D_m pour $\left.\frac{\partial D}{\partial d}\right)_{d = d_m} = 0$ ce qui conduit à $d_m = 2f'$

et $D_m = \frac{d_m^2}{d_m - f'} = 4f'$.

Les solutions cherchées (avec $d \leq \frac{D}{2}$) vérifient donc $f' \leq d \leq 2f'$

et $$+\infty > D \geq 4f'.$$

Remarque : pour D fixé ($D > 4f'$), les valeurs de d supérieures à $\frac{D}{2}$ correspondent à échanger les rôles de l'objet et de l'image (D et $D-d$ jouent des rôles symétriques dans la relation de Descartes...). Ces valeurs de d correspondent aussi au cas où l'image est plus grande que l'objet (cas de la « macrophotographie »...).

2. La lentille divergente L_1 doit transformer l'image précédente $A'B'$ en une nouvelle image A_1B_1 sur la plaque photographique, telle que :

$$|\gamma_1| = \left|\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A'B'}}\right| = 2 \quad \text{et} \quad A_1B_1 \text{ réel}$$

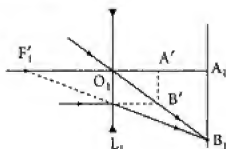
soit $\overline{O_1A_1} = p'_1 > 0$ (en notant O_1 le centre de la lentille L_1).

En utilisant la relation de Descartes, avec $p_1 = \overline{O_1A'}$:

$$\frac{1}{p'_1} - \frac{1}{p_1} = \frac{1}{f'_1} = -\frac{1}{|f'_1|}$$

$$\frac{1}{p_1} = \frac{1}{p'_1} + \frac{1}{|f'_1|} > 0 \text{ puisque } p'_1 > 0,$$

$p_1 = \overline{O_1A'} > 0$ montre que $A'B'$ joue le rôle d'objet virtuel pour L_1, ce qui est cohérent avec l'énoncé : on a placé L_1 entre L et la position initiale de la plaque photographique...



Le grandissement γ_1 est donc positif, et :

$$\gamma_1 = +2 = \frac{p'_1}{p_1} \Rightarrow p'_1 = 2p_1$$

et (relation de Descartes) :

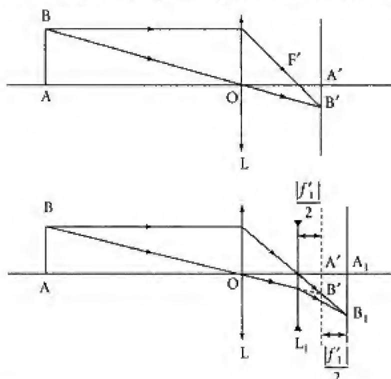
$$\frac{1}{2p_1} - \frac{1}{p_1} = -\frac{1}{|f'_1|} \Rightarrow p_1 = \frac{1}{2}|f'_1| \text{ et } p'_1 = |f'_1|.$$

La plaque photographique doit se trouver dans le plan focal objet de la lentille divergente L_1, celle-ci étant placée à une distance $\frac{1}{2}|f'_1| = 3$ cm en avant de la position initiale de la plaque photographique.

Il faut maintenant reculer la plaque photographique d'une distance :

$$p'_1 - p_1 = \frac{1}{2}|f'_1| = 3 \text{ cm}.$$

On peut facilement construire l'image de l'objet AB dans les deux cas envisagés :



Commentaires

Pour la seconde question, on peut remarquer que l'introduction de la lentille L_1 et le déplacement de la plaque photographique sont indépendants de :

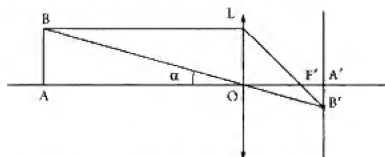
– la « mise au point », liée à la distance de l'objet AB à la lentille L,

– la distance focale f' de cette lentille.

Un tel dispositif, adaptable à un appareil photographique, est appelé « doubleur de focale » : l'image est agrandie d'un facteur deux, ce qui correspond (pour un objet éloigné, pratiquement à l'infini) à l'image que l'on obtiendrait avec une lentille unique de focale $2f'$:

pour A très éloigné $\overline{OA'} \to \overline{OF'} = f'$

et, pour α donné : $\overline{A'B'} = \alpha \cdot \overline{OA'} \approx \alpha \cdot \overline{OF'} = \alpha f'$ (α est petit…).



La dimension de l'image est pratiquement proportionnelle à f' …

Il est également possible de généraliser ce dispositif (grandissement linéaire multiplié par un facteur N donné) : il suffit de reprendre les calculs du **2.** …

Mais la qualité de l'image obtenue diminue rapidement lorsque N augmente, car ce dispositif revient à agrandir la partie centrale de l'image donnée par l'objectif seul.



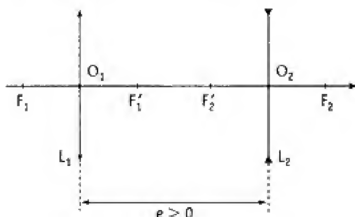
Association de deux lentilles

Soit un système centré constitué de deux lentilles :

– une lentille L_1 convergente de centre O_1 et de distance focale $f'_1 = a = \overline{O_1F'_1}$;

– une lentille L_2 divergente de centre O_2 et de distance focale $f'_2 = -a = \overline{O_2F'_2}$.

On note $e = \overline{O_1O_2}$.



1. a. Déterminer, en fonction de e et a, les grandeurs $\overline{O_1F}$ et $\overline{O_2F'}$, où F et F′ sont les foyers objet et image du système.

b. Faire deux constructions géométriques séparées et commentées permettant de définir les points F et F′.

2. a. On considère un objet AB situé dans le plan de front de F_1 ($A = F_1$).

Donner une construction géométrique claire et commentée définissant l'image A′B′ de AB.

En déduire, dans ce cas, la valeur du grandissement linéaire γ.

b. Retrouver le résultat précédent (valeur de γ) par le calcul.

c. Montrer que la connaissance des positions des foyers F et F′ ainsi que de la propriété démontrée au **2. a.** est suffisante pour construire l'image d'un objet quelconque.

1. Ce qu'il faut savoir

• Lentilles minces convergentes ou divergentes : formules de Descartes ou de Newton.

• Grandissement linéaire.

• Constructions géométriques.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. Les constructions géométriques utilisent des rayons particuliers :

– rayon parallèle à l'axe ;

– rayon passant par le centre d'une lentille ;

– rayon passant par un foyer.

• Il est également intéressant d'utiliser les propriétés des foyers secondaires d'une lentille, c'est-à-dire des points se trouvant dans le même plan de front des foyers F_i et F_i'.

2. b. Pour le calcul de γ, on prendra un objet AB quelconque (A non confondu avec F_1) puis on fera tendre A vers F_1.

2. c. On cherchera à déterminer l'image A'B' d'un objet à partir d'une simple construction géométrique utilisant à nouveau des rayons particuliers.

3. Solution

1. a.

■ **Point focal objet F du système des deux lentilles :**

$$F \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A_1' \xrightarrow{\mathcal{L}_2} \infty \quad \text{(par définition de F).}$$

Il en résulte que : $A_1' = F_2$, d'où $F \xrightarrow{\mathcal{L}_1} F_2$.

Utilisons alors la formule de conjugaison de Descartes appliquée à la lentille $\mathcal{L}_1$ de centre O_1, de foyer image F_1' :

$$\frac{1}{\overline{O_1F_2}} - \frac{1}{\overline{O_1F}} = \frac{1}{\overline{O_1F_1'}}$$

or $\quad \overline{O_1F_1'} = a \quad \overline{O_1F_2} = \overline{O_1O_2} + \overline{O_2F_2} = e + a.$

Soit $\quad \dfrac{1}{e+a} - \dfrac{1}{\overline{O_1F}} = \dfrac{1}{a}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\overline{O_1F}} = \frac{1}{e+a} - \frac{1}{a}.$$

D'où $\quad \overline{O_1F} = \dfrac{a(e+a)}{a-e-a}$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{O_1F} = -\frac{a(e+a)}{e}}$$

Commentaires

Pour $e \to 0^+$, $\overline{O_1F} \to -\infty$ et le foyer F est rejeté à l'infini, ce qui est normal puisqu'alors les deux lentilles confondues étant de focales opposées n'ont plus d'effet sur les rayons lumineux.

■ **Point focal image F′ du système des deux lentilles :**

On a cette fois-ci :

$$\infty \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A'_1 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} F' \quad \text{(par définition de F′).}$$

D'où $A'_1 = F'_1$ et $F'_1 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} F'$.

Soit avec la formule de Descartes pour la seconde lentille de centre O_2, de foyer image F'_2 :

$$\frac{1}{\overline{O_2F'}} - \frac{1}{\overline{O_2F'_1}} = \frac{1}{\overline{O_2F'_2}}$$

or $\quad \overline{O_2F'_2} = -a \quad$ et $\quad \overline{O_2F'_1} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1F'_1} = -e + a.$

D'où $\quad \dfrac{1}{\overline{O_2F'}} - \dfrac{1}{a-e} = \dfrac{1}{-a} \Rightarrow \dfrac{1}{\overline{O_2F'}} = \dfrac{1}{-a} + \dfrac{1}{a-e}$

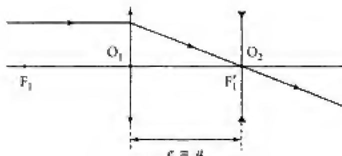
et

$$\boxed{\overline{O_2F'} = \frac{a(a-e)}{e}}$$

Commentaires

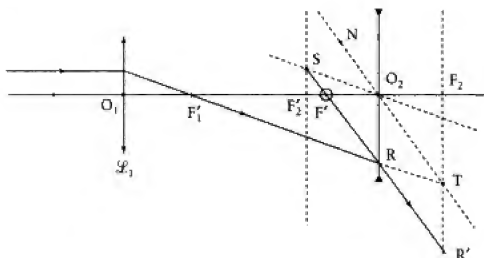
• On a également $\overline{O_2F'} \to +\infty$ quand $e \to 0$ (même raison que ci-dessus).

• D'autre part, pour $a = e$, il vient $\overline{O_2F'} = 0$ et le foyer image se confond avec le centre O_2 de la lentille $\mathcal{L}_2$:



1. b. Constructions géométriques.

■ Foyer image F′ :



Un rayon parallèle à l'axe converge vers F'_1 après la traversée de $\mathcal{L}_1$. Pour dessiner le rayon émergent de $\mathcal{L}_2$, on considère le rayon « fictif » SO_2 parallèle à F'_1 R, S appartenant au plan focal image de $\mathcal{L}_2$. Les rayons parallèles SO_2 et F'_1 R donnent après la traversée de $\mathcal{L}_2$ des rayons émergents dont les prolongements passent par S (foyer image secondaire).

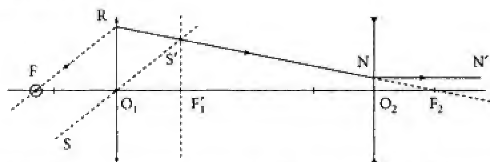
On aurait également pu considérer le foyer secondaire objet T situé dans le plan de front de F_2 et obtenu en prolongeant la droite F'_1 R.

Les rayons NO_2 et F'_1 R qui convergent en T ressortent donc parallèles. Le rayon NO_2 n'étant pas dévié, on a RR′ parallèle à O_2T.

Commentaire

Sur la figure, on a $e > a$ et $\overline{O_2F'} \in (-a, 0)$, conformément à la formule $\overline{O_2F'} = -a + \frac{a^2}{e}$.

■ Foyer objet F :

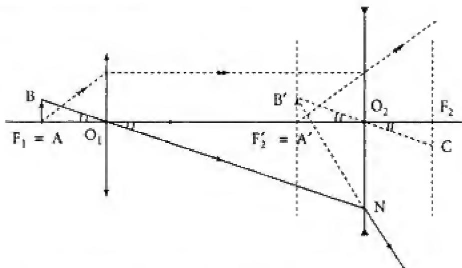


La construction peut se faire en sens inverse. Étant donné le rayon émergent NN′, parallèle à l'axe, on construit le rayon incident pour $\mathcal{L}_2$, RN, dont le prolongement passe par F_2. Ce rayon coupe le plan focal image de $\mathcal{L}_1$ en S′, foyer image secondaire. Il suffit alors de tracer la droite FR, parallèle à O_1S' (les rayons incidents parallèles SO_1 et FR convergent nécessairement en S′, SO_1 n'étant pas dévié).

2. a. On a ici $A = F_1$ d'où :

$$A = F_1 \xrightarrow{\mathcal{L}_1} \infty \xrightarrow{\mathcal{L}_2} F_2' \quad \text{et donc} \quad A = F_1 \xrightarrow{\mathcal{S}} F_2'.$$

■ **Construction géométrique :**



Le point B appartient au plan focal objet de $\mathcal{L}_1$, il a donc une image par rapport à $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ située dans le plan de front de F_2' (B est dans le plan de front de F_1).

On obtient B' en construisant le « rayon » passant par O_2 et parallèle à BO_1 : les rayons parallèles $B'O_2$ et O_1N sortent de $\mathcal{L}_2$ en semblant diverger à partie de B'.

Or $B'O_2 \,//\, BO_1 \Rightarrow$ les angles $\widehat{AO_1B}$ et $\widehat{A'O_2B'}$ sont égaux.

De plus, $AO_1 = a = A'O_2$.

On a donc :

$\overline{AB} = \overline{A'B'} \Rightarrow \gamma = +1$, le grandissement linéaire γ étant donné par $\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$.

■ **Conclusion :**

$$\boxed{\begin{array}{c} A = F_1 \Rightarrow A' = F_2' \\ \gamma = +1 \end{array}}$$

2. b. Retrouvons le résultat relatif au grandissement linéaire γ.

Prenons un objet quelconque AB (A n'est pas en F_1). On a :

$$\gamma = \gamma_1 \cdot \gamma_2$$

et d'après les formules de Newton :

$$\gamma_1 = \frac{\overline{F_1O_1}}{\overline{F_1A}} \quad \text{et} \quad \gamma_2 = \frac{\overline{F_2'A'}}{\overline{F_2'O_2}}$$

(on a privilégié F_1 pour $\mathcal{L}_1$ et F_2' pour $\mathcal{L}_2$).

D'où $\gamma = \dfrac{\overline{F_1O_1}}{\overline{F_1A}} \cdot \dfrac{\overline{F_2' A'}}{\overline{F_2' O_2}} = \dfrac{\overline{F_2' A'}}{\overline{F_1A}}$ car $\overline{F_1O_1} = \overline{F_2' O_2} = a$

or $A \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A_1' \xrightarrow{\mathcal{L}_2} A'$ avec :

$$\overline{F_1A} \cdot \overline{F_1' A_1'} = -a^2$$

$$\text{et} \quad \overline{F_2A_1'} \cdot \overline{F_2' A'} = -a^2.$$

Soit encore :

$$\overline{F_2' A'} \cdot [\overline{F_2F_1'} + \overline{F_1' A_1'}] = -a^2$$

$$\overline{F_2' A'} \cdot \left[\overline{F_2F_1'} - \frac{a^2}{\overline{F_1A}}\right] = -a^2$$

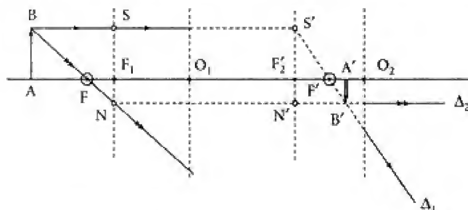
$$\text{et} \quad \overline{F_2' A'} \cdot \overline{F_2F_1'} + a^2 = a^2 \frac{\overline{F_2' A'}}{\overline{F_1A}}.$$

D'où :

$$\boxed{\gamma(A, A') = 1 + \frac{\overline{F_2F_1'}}{a^2}\overline{F_2' A'}}$$

Quand A tend vers F_1, on a montré que A' se confondait avec F_2', d'où $\overline{F_2' A'} = 0$ et $\gamma = 1$ comme il se doit.

2. c. Image d'un objet quelconque : on va utiliser les propriétés des points F et F', ainsi que les plans conjugués $[F_1, F_2']$ pour lesquels le grandissement linéaire vaut +1.



Étant donné l'objet AB, on construit :

– le rayon parallèle à l'axe issu de B : le rayon émergent Δ_1 correspondant a un prolongement qui passe par F', foyer image du système. D'autre part, les points S et S' sont images (ils appartiennent aux plans de front de F_1 et F_2', plans conjugués pour $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$, avec $\gamma = +1$), le point B' se trouve donc sur la droite Δ_1 passant par S' et F' ;

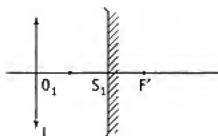
– le rayon issu de B et passant par F foyer du système : il ressort parallèlement à l'axe, or les points N et N′ sont conjugués (comme S et S′) ; le rayon émergent Δ_2 est celui qui parallèle à l'axe a un prolongement qui passe par N′ ; B′ est situé sur Δ_2.

En conclusion, on a $B' = \Delta_1 \cap \Delta_2$.

304 Miroir équivalent

On considère le système optique constitué d'une lentille mince convergente L (centre O_1, distance focale $f' = 1{,}5$ m) et d'un miroir sphérique concave (sommet S_1, rayon R = 1 m, avec $\overline{O_1S_1} = 1$ m).

Montrer que ce système est équivalent à un miroir sphérique unique, miroir dont on précisera le centre et le sommet.



1. Ce qu'il faut savoir

- Propriétés des miroirs et des lentilles.
- Formules de conjugaison.

2. Ce qu'il faut comprendre

Les propriétés remarquables du centre et du sommet d'un miroir permettent de déterminer facilement les points de l'axe du système qui possèdent ces propriétés spécifiques.

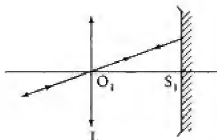
Il reste alors à démontrer que la connaissance de ces points suffit à déterminer complètement la correspondance objet-image.

3. Solution

On sait que tout rayon incident dont le support passe par le centre d'un miroir se réfléchit sur lui-même au niveau du miroir.

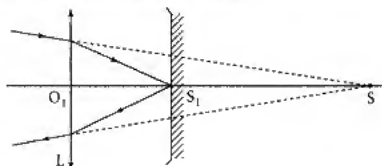
Or, ici, le centre C_1 du miroir (de sommet S_1) est confondu avec le centre O_1 de la lentille L ($R = O_1S_1$) :

tout rayon incident passant par O_1 se réfléchit sur lui-même dans le système {lentille + miroir} ; il a les propriétés du centre C d'un miroir.



D'autre part un rayon incident arrivant au sommet S d'un miroir donne un rayon émergent symétrique par rapport à l'axe.

Dans le cas présent, le rayon incident qui, après la traversée de la lentille L, se réfléchira en S_1 sur le miroir, aura ensuite un trajet symétrique par rapport à l'axe du système, et émergera donc symétriquement au rayon incident.



S_1 est donc l'image à travers L du point S intersection du rayon incident avec l'axe.

Le point S est déterminé par la relation de conjugaison de Descartes.

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$$

avec $p' = \overline{O_1S_1}$, $p = \overline{O_1S}$

soit $\frac{1}{p} = \frac{1}{p'} - \frac{1}{f'} = \frac{f'-p'}{p'f'}$

$$\Rightarrow p = \frac{p'f'}{f'-p'}$$

d'où : $\overline{O_1S} = \frac{1 \times 1{,}5}{1{,}5 - 1} = 3$ **m.**

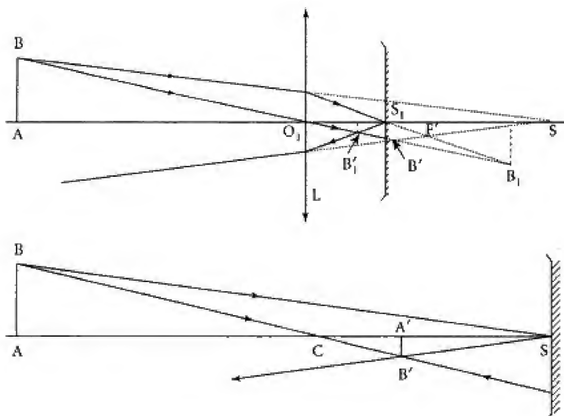
Un rayon incident « visant » S donne un rayon émergent qui semble venir de S : le point S joue le même rôle que le sommet d'un miroir…

La connaissance des propriétés du point $C = O_1$ et du point S suffit pour construire, dans tous les cas, l'image d'un objet AB donné :

B_1 est l'image de B dans L ;

B'_1 est l'image de B_1 dans le miroir de sommet S_1 ;

B' est l'image de B'_1 dans L (traversée en sens inverse).



Le point B′ est directement déterminé comme l'intersection du rayon BC (qui revient sur lui-même) et du symétrique du rayon BS : l'image A′ B′ obtenue est celle donnée par le seul miroir de centre C et de sommet S.

Commentaire

Cette équivalence entre le système {lentille + miroir} et un miroir unique est générale : le miroir équivalent est toujours déterminé par ses deux points remarquables :

– le sommet S, point dont l'image par L est le sommet S_1 du miroir « vrai »,

– le centre C, point dont l'image par L est le centre C_1 du miroir « vrai ».

Ceci suppose que les points C et S restent à la distance finie

305 Viseur

Un viseur est constitué d'un objectif L_1 (assimilé à une lentille mince convergente de distance focale $f'_1 = 10$ cm) et d'un oculaire L_2 (assimilé à une lentille mince convergente de distance focale $f'_2 = 2$ cm). La distance D entre L_1 et L_2 est réglable.

1. Déterminer D pour que le système soit afocal (réglage pour la vision à l'infini). Représenter la marche d'un pinceau lumineux venant d'un point à l'infini dans une direction faisant un angle α avec l'axe du viseur.

Calculer le grandissement angulaire $G = \dfrac{\alpha'}{\alpha}$ de l'appareil (α' est l'angle que font les rayons émergents avec l'axe).

2. On règle maintenant le viseur pour que l'œil d'un observateur, regardant à travers l'oculaire, voit nettement, sans accommoder, un objet AB situé à 20 cm en avant de la face d'entrée de l'objectif.

a. Déterminer la nouvelle valeur de D.

b. L'observateur voit alors l'image de AB sous un angle α'. Calculer, en dioptries, la quantité $P = \dfrac{\alpha'}{\overline{AB}}$.

c. En accommodant, l'œil peut voir des objets situés au-delà d'une distance minimale $d_m = 20$ cm.

L'œil de l'observateur ayant sa pupille dans le plan de l'image de L_1 donnée par L_2, quelle région de l'espace objet peut être vue nettement par l'observateur regardant à travers le viseur ?

Solution

1. Pour que le système soit afocal, il faut qu'un objet à l'infini sur l'axe ait son image également à l'infini sur l'axe.

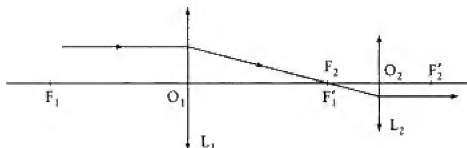
L'image par L_1 du point à l'infini sur l'axe est le foyer image F'_1 de L_1.

Pour que l'image finale soit à l'infini sur l'axe, il faut que l'objet intermédiaire soit au foyer objet F_2 de L_2.

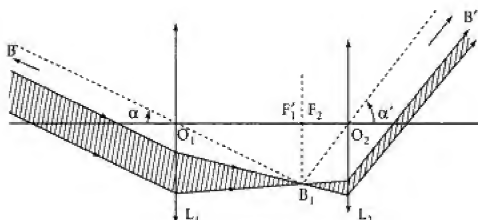
Il faut donc que F'_1 et F_2 soient confondus.

D'où : $D = \overline{O_1F'_1} + \overline{F_2O_2} = f'_1 + f'_2$.

Soit $D = 12$ cm.



Un point source B à l'infini en dehors de l'axe du viseur – dans une direction α – a pour image dans L_1 un point B_1 du plan focal image (plan de front de F'_1...), et ce point B_1 a pour image dans L_2 un point B' à l'infini dans une direction α', d'où la marche d'un pinceau de rayons lumineux :



Le rapport $\frac{\alpha'}{\alpha}$ se calcule immédiatement dans les triangles $O_1F'_1B_1$ et $O_2F_2B_1$ ($F_2 = F'_1$) :

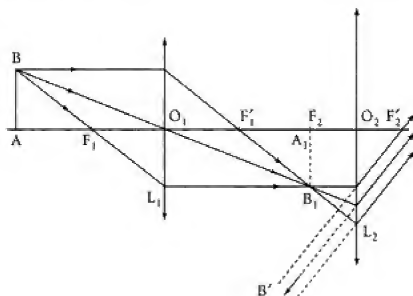
$$\alpha = \frac{\overline{F'_1B_1}}{\overline{O_1F'_1}} \qquad \alpha' = \frac{\overline{F'_1B_1}}{\overline{O_2F_2}} \qquad \text{(angles petits : approximation de Gauss).}$$

et $$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\overline{O_1F'_1}}{\overline{O_2F_2}} = \frac{f'_1}{-f'_2} = -\frac{f'_1}{f'_2}$$

soit $$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = -5.$$

2. a. Pour que l'image finale soit à l'infini, il faut que l'image intermédiaire de l'objet AB soit dans le plan focal objet de la lentille L_2.

On a donc géométriquement :



Et par le calcul :

$$p = \overline{O_1A} = -20 \text{ cm}$$

$$p' = \overline{O_1A_1}$$

la relation de conjugaison de Descartes s'écrivant :

$$\frac{1}{p'}-\frac{1}{p}=\frac{1}{f'_1} \quad (f'_1=\overline{O_1F'_1}=10\text{ cm})$$

$$\frac{1}{p'}=\frac{1}{f'_1}+\frac{1}{p} \quad \text{soit} \quad p'=\frac{pf'_1}{p+f'_1}$$

on a alors :

$$D=\overline{O_1O_2}=\overline{O_1A_1}+\overline{F_2O_2}=p'+f'_2$$

$$D=\frac{pf'_1}{p+f'_1}+f'_2$$

soit $\mathbf{D = 22\ cm.}$

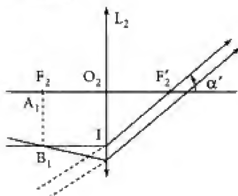
2. b. Reprenons la construction de l'image de A_1B_1 dans L_2 :

l'angle α' étant petit :

$$\alpha'=\frac{\overline{O_2I}}{\overline{F'_2O_2}}=\frac{\overline{A_1B_1}}{-f'_2}.$$

Utilisons le grandissement γ_1 dans L_1 :

$$\gamma_1=\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}}=\frac{p'}{p}$$



il vient alors :

$$P=\frac{\alpha'}{\overline{AB}}=\frac{\alpha'}{\overline{A_1B_1}}\cdot\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}}=\left(-\frac{1}{f'_2}\right)\cdot\frac{p'}{p}=-\frac{1}{f'_2}\cdot\frac{f'_1}{p+f'_1}$$

soit, numériquement :

$$P=-\frac{10^2}{2}\cdot\frac{10}{-20+10}=\mathbf{+50\ dioptries}$$

(dioptries : inverse d'une longueur exprimée **en mètres**).

2. c. Déterminons d'abord la position de l'œil de l'observateur, c'est-à-dire l'abscisse de l'image de L_1 dans L_2 :

$$\frac{1}{p'}-\frac{1}{p}=\frac{1}{f'_2}$$

avec $p=\overline{O_2O_1}=-D$ et $p'=\overline{O_2O'}$

$$\frac{1}{p'}=\frac{1}{p}+\frac{1}{f'_2}=\frac{1}{f'_2}-\frac{1}{D}$$

et $$p'=\frac{Df'_2}{D-f'_2}=2{,}2\text{ cm}.$$

Pour être vue nettement par l'observateur, l'image $A'B'$ doit vérifier

$$d_m\leqslant\overline{A'O'}\leqslant+\infty.$$

Or $\overline{A'O'} = \overline{A'F'_2} + \overline{F'_2O_2} + \overline{O_2O'} = \overline{A'F'_2} - f'_2 + p'$

d'où : $$d_m + f'_2 - p' \leqslant \overline{A'F'_2} \leqslant +\infty$$

et : $$-\infty \leqslant \overline{F'_2A'} \leqslant -19{,}8 \text{ cm} = -l$$

$$(d_m + f'_2 - p' = 19{,}8 \text{ cm}).$$

Utilisons alors les formules de Newton :

$$\overline{F_1A} \cdot \overline{F'_1A_1} = -f'^2_1 \quad \text{et} \quad \overline{F_2A_1} \cdot \overline{F'_2A'} = -f'^2_2$$

en posant $\overline{F_1A} = x$:

$$\overline{F'_1A_1} = \left(-\frac{f'^2_1}{x}\right) = \overline{F'_1F_2} + \overline{F_2A_1} = (D - f'_1 - f'_2) - \frac{f'^2_2}{\overline{F'_2A'}}$$

d'où : $$\frac{f'^2_2}{\overline{F'_2A'}} = D - f'_1 - f'_2 + \frac{f'^2_1}{x}$$

et : $$\overline{F'_2A'} = \frac{f'^2_2}{D - f'_1 - f'_2 + \dfrac{f'^2_1}{x}}.$$

La position x de l'objet AB doit donc vérifier la double condition :

$$-\infty \leqslant \frac{f'^2_2}{D - f'_1 - f'_2 + \dfrac{f'^2_1}{x}} \leqslant -l$$

$$0 \geqslant D - f'_1 - f'_2 + \frac{f'^2_1}{x} \geqslant -\frac{f'^2_2}{l}$$

$$-(D - f'_1 - f'_2) \geqslant \frac{f'^2_1}{x} \geqslant -\left(D - f'_1 - f'_2 + \frac{f'^2_2}{l}\right)$$

et finalement :

$$-\frac{f'^2_1}{D - f'_1 - f'_2} \leqslant x \leqslant -\frac{f'^2_1}{D - f'_1 - f'_2 + \dfrac{f'^2_2}{l}}$$

soit : $$x_{min} \leqslant x \leqslant x_{max}.$$

Numériquement, on trouve :

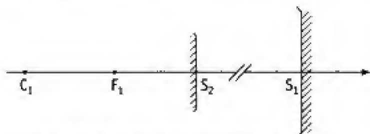
$x_{min} = -10$ cm, ce qui correspond à la position de AB pour laquelle l'œil n'a pas à accommoder,

$x_{max} = -9{,}8$ cm, l'œil accommodant alors au maximum.

L'observateur ne pourra voir nettement que les objets situés dans une « tranche » d'épaisseur Δx = **2 mm.**

306 Association de deux miroirs

On considère un système optique (du type objectif de télescope) constitué d'un miroir principal sphérique concave (de grande taille, centre C_1, sommet S_1, foyer F_1, avec $\overline{C_1S_1} = R_1 = 6$ m) et d'un miroir secondaire sphérique convexe (beaucoup plus petit, centre C_2, sommet S_2, foyer F_2, avec $\overline{C_2S_2} = R_2 = 60$ cm). Ce second miroir est placé de façon telle que $F_1S_2 = 20$ cm.

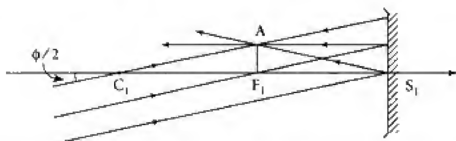


(échelle non respectée pour la position de S_1...)

On observe un objet lumineux infiniment éloigné, de diamètre apparent $\phi = 0{,}2°$: les rayons lumineux sont reçus par le miroir principal, qui les renvoie sur le miroir secondaire... Déterminer les caractéristiques (position, dimensions) de l'image fournie par ce système.

Solution

■ Le miroir principal donne, de l'objet « à l'infini », une image dans son plan focal. Si le télescope est pointé vers le centre de l'objet, l'image est centrée sur le point F_1, et un point A du bord de l'image est donné par la construction classique :



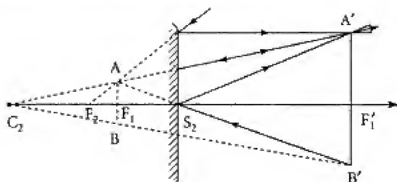
Le faisceau de rayons parallèles issu d'un point du bord de l'objet arrive en faisant l'angle $\frac{\phi}{2}$ avec l'axe du miroir, et se réfléchit en un faisceau convergent au point A.

L'angle ϕ étant petit, $F_1A = \frac{\phi}{2} \cdot F_1S_1 = \frac{\phi}{2} \cdot \frac{R_1}{2}$.

(le foyer F_1 est au milieu du segment C_1S_1).

D'où la dimension de l'image : $\mathbf{AB} = \frac{1}{2}\mathbf{R_1}\phi$.

■ L'image AB sert d'objet virtuel pour le miroir secondaire (d'après la position de celui-ci...), qui en donne une image A'B', que l'on construit facilement : cette image A'B' est centrée en F_1', conjugué de F_1 dans le miroir secondaire.



En appliquant la relation de conjugaison de Descartes (pour le miroir de sommet S_2) :

$$\overline{S_2F_1} = p, \quad \overline{S_2F_1'} = p', \quad \text{et} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f_2} = \frac{2}{\overline{S_2C_2}} = -\frac{2}{R_2}$$

soit $\dfrac{1}{p'} = -\dfrac{1}{p} - \dfrac{2}{R_2}$

$$\Rightarrow p' = -\frac{pR_2}{R_2 + 2p} \quad \text{et} \quad p' = \mathbf{60\ cm}$$

avec un grandissement : $\gamma_2 = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\dfrac{p'}{p} = +3.$

D'où la dimension de l'image A'B' :

$$A'B' = \gamma_2 \cdot AB = \frac{1}{2}\gamma_2 R_1 \phi = 9 \cdot \phi = \mathbf{3{,}14\ cm.}$$

Commentaire

La dimension de l'image obtenue donne un bon ordre de grandeur de la dimension minimale que doit avoir le miroir secondaire pour recevoir tous les rayons qui se sont réfléchis sur le miroir pricipal : le faisceau de rayons convergeant vers le point A est très étroit, et sera complètement « intercepté » par le miroir secondaire si celui-ci a un diamètre de l'ordre de A'B'.

Le miroir principal peut être beaucoup plus grand : un diamètre de 80 cm correspond à un diamètre angulaire $\dfrac{0{,}8}{R_1}$ de l'ordre de 7,7°, ce qui est compatible avec l'approximation de Gauss...

On vérifie bien que le miroir secondaire n'occulte qu'une faible partie de la surface du miroir principal, ce qui est essentiel pour une bonne luminosité de l'appareil.

 « Mise au point » pour un objectif photographique

On assimile l'objectif d'un appareil photographique à une lentille mince convergente (L) de centre O et de distance focale image f'.

La distance d entre (L) et l'écran (E) où se trouve la pellicule sensible est variable, ce qui permet d'effectuer la mise au point.

1. On désire photographier des objets dont la distance x à (L) varie de x_m à l'infini. Dans quel domaine doit pouvoir varier d ?

Calculer les valeurs extrêmes d_{min} et d_{max} de d pour $x_m = 60$ cm et $f' = 50$ mm.

2. Le faisceau entrant dans la lentille est limité par un diaphragme circulaire (D) dont le diamètre ϕ est variable, afin de laisser entrer dans l'appareil plus ou moins de lumière.

(On supposera le diaphragme accolé à la face avant de la lentille).

On appelle « ouverture relative » de l'objectif le rapport $\frac{\phi}{f'} = \frac{1}{N}$. La suite usuelle des valeurs de N est 2,8 ; 4 ; 5,6 ; 8 ; 11 et 16.

Comment varie la puissance lumineuse reçue par la pellicule quand on passe d'une valeur de N à la suivante ?

Expliquer le lien entre la suite des valeurs de N et celle des durées d'exposition T_e (en seconde), $\frac{1}{15}, \frac{1}{30}, \frac{1}{60}, \frac{1}{125}, \frac{1}{250}, \frac{1}{500}$.

3. L'appareil étant mis au point « sur l'infini », un point A situé sur l'axe à distance finie donne, après développement, une tache circulaire sur la pellicule. On admet que l'image reste nette tant que cette tache n'est pas plus grande que la taille moyenne g des grains de l'émulsion de la pellicule.

Déterminer l'expression de la distance hyperfocale L_0, valeur minimale de x pour laquelle l'image d'un objet A reste nette.

Exprimer le résultat en fonction de g, f' et N.

Calculer L_0 pour $N = 2{,}8$ et $N = 16$, dans le cas où $g = 0{,}02$ mm.

La profondeur de champ P_r est la zone de l'espace objet pour laquelle l'image est nette : quel est, qualitativement, le lien entre N et P_r ? entre P_r et f'.

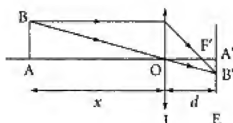
4. Pour améliorer la profondeur de champ, dans les appareils sans réglage de mise au point, on fixe la distance d à une valeur d_1 telle que l'image d'un point à l'infini reste nette.

Donner l'expression de d_1 correspondant à la profondeur de champ maximale, en fonction de g, f' et N (on a $d_1 > f'$).

En déduire l'expression de la nouvelle distance hyperfocale L'_0 : on l'exprimera en fonction de f' et L_0, et on en donnera la valeur pour $N = 2{,}8$ et $N = 16$.

Solution

1. Construisons d'abord l'image A'B' d'un objet AB situé à la distance x de (L) : l'image A'B' doit se former dans le plan de la pellicule photographique, à la distance d de (L).



La relation de conjugaison de Descartes $\frac{1}{p'}-\frac{1}{p}=\frac{1}{f'}$ donne ici, avec $p = \overline{OA} = -x$,

$p' = \overline{OA'} = d$ et $f' = \overline{OF'}$:

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{x} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{d} = \frac{1}{f'}-\frac{1}{x} = \frac{x-f'}{xf'}$$

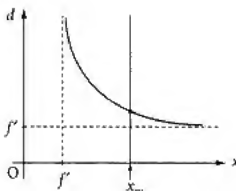
soit $\boxed{d = \frac{xf'}{x-f'}}$ avec $d > 0$ soit $x > f'$.

d est une fonction décroissante de x, et la condition :

$x_m \leqslant x \leqslant \infty$

correspond à :

$d_{max} \geqslant d \geqslant d_{min} = f'$



avec : $d_{max} = \frac{x_m f'}{x_m - f'}$.

Le calcul donne : $\boxed{\begin{array}{l} d_{min} = 50 \text{ mm} \\ d_{max} = 54{,}5 \text{ mm} \end{array}}$

2. La puissance lumineuse reçue par la pellicule est proportionnelle à la surface du diaphragme, donc à ϕ^2, et – pour f' donné – à $\frac{1}{N^2}$.

Calculons la suite des valeurs de N^2 :

N	2,8	4	5,6	8	11	16
N^2	7,84 ≈ 8	16	31,4 ≈ 32	64	121 ≈ 128	256

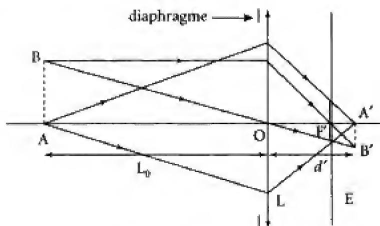
La suite des valeurs de N^2, aux erreurs d'arrondi près – correspond à des valeurs successives de la suite 2^n : à chaque fois que l'on augmente N d'une valeur à la suivante, la quantité de lumière reçue par la pellicule est divisée par 2.

La suite des valeurs de T_e étant construite également à partir des valeurs de $\frac{1}{2^n}$, un changement de diaphragme et une modification de T_e en sens inverse (d'un même nombre d'unités) laissent inchangée l'énergie reçue par la pellicule, c'est-à-dire son « exposition » (imposée par la nature de l'émulsion, plus ou moins « rapide »...) : énergie = puissance lumineuse × temps d'exposition.

3. La mise au point « sur l'infini » correspond à régler l'objectif pour que $d = d_{min} = f'$.

Or, pour un point A à distance finie, l'image A' se forme en arrière de ce plan (objet et image se déplacent dans le même sens).

On a donc :



ce qui correspond dans le plan (E) – plan de front de F' – à une tache d'autant plus grande que le diaphragme a une valeur N plus petite. Pour un diamètre ϕ du diaphragme, la tache dans le plan E doit avoir un diamètre maximal égal à g, soit, avec $OA' = d'$ et $OF' = f'$

$$\frac{g}{\phi} = \frac{d' - f'}{d'} \text{ (triangles semblables)}$$

soit, avec $d' = \frac{L_0 f'}{L_0 - f'}$ (*cf.* 1.) et $\phi = \frac{f'}{N}$:

$$\frac{Ng}{f'} = 1 - \frac{f'}{d'} = 1 - \frac{L_0 - f'}{L_0} = \frac{f'}{L_0}$$

$$\boxed{L_0 = \frac{f'^2}{Ng}}$$

Numériquement, pour $N = 2{,}8$, $L_0 =$ **44,6 m**;

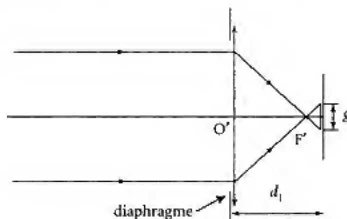
pour $N = 16$, $L_0 =$ **7,81 m**.

La profondeur de champ est d'autant plus grande que L_0 est plus petite : on peut par exemple la caractériser par la valeur de $\frac{1}{L_0}$, qui varie proportionnellement à $\frac{N}{f'^2}$:

Commentaire

On augmente la profondeur de champ en augmentant N, ce qui, pour une pellicule donnée, conduit à augmenter T_e (pour garder une exposition correcte...), ce qui augmente le risque de « bougé » ou de « flou » dû au mouvement éventuel de l'objet photographié.

4. Dans le cas d'un objet à l'infini, et pour une valeur d_1 de d, différente de f', on obtient la figure suivante :



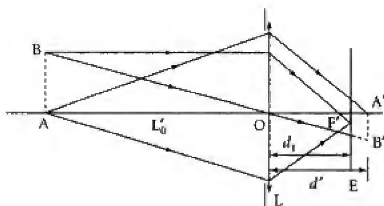
Les triangles semblables donnent encore :

$$\frac{g}{\phi} = \frac{d_1 - f'}{f'} = \frac{d_1}{f'} - 1$$

$$\frac{d_1}{f'} = \frac{g}{\phi} + 1 = \frac{Ng}{f'} + 1 \quad \left(\phi = \frac{f'}{N}\right)$$

soit $$\boxed{d_1 = f' + Ng}$$

Le plan de la pellicule se trouvant à cette distance d_1 de (L), l'image d'un point objet A (à une distance de L inférieure à L_0) sera en un point A', à une distance $d' > d_1$, ce qui donne la figure suivante :



Si A est à la distance L'_0 de (L), la tache dans le plan de (E) est de diamètre g, et les triangles semblables donnent encore :

$$\frac{g}{\phi} = \frac{d' - d_1}{d'} = 1 - \frac{d_1}{d'}$$

avec $\phi = \frac{f'}{N}$, et d'après le **1.** : $d' = \frac{L'_0 f'}{L'_0 - f'}$

soit $\frac{Ng}{f'} = 1 - \frac{d_1}{d'} = 1 - (f' + Ng) \cdot \frac{L'_0 - f'}{L'_0 f'}$

$$\frac{L'_0 - f'}{L'_0} = \frac{f' - Ng}{f' + Ng}$$

$$\frac{f'}{L'_0} = 1 - \frac{f' - Ng}{f' + Ng} = \frac{2Ng}{f' + Ng}$$

et finalement :

$$L'_0 = f' \cdot \frac{f' + Ng}{2Ng}$$

$$\boxed{L'_0 = \frac{f'}{2} + \frac{f'^2}{2Ng} = \frac{f'}{2} + \frac{L_0}{2}}$$

soit, puisque $L_0 \gg f'$, quel que soit N :

$$\boxed{L'_0 \# \frac{L_0}{2}}$$

$$\mathbf{L'_0 = 22{,}3\ m} \text{ pour } N = 2{,}8$$

$$\mathbf{L'_0 = 3{,}91\ m} \text{ pour } N = 16.$$

Commentaires

Notons que l'amélioration de la profondeur de champ obtenue au **4.** nécessite un positionnement du plan de la pellicule qui dépend de la valeur de N : pour que l'image d'un point

à l'infini reste toujours nette, il faut choisir la valeur de d_1 correspondant à la plus petite valeur de N, et si on modifie ensuite N, la valeur de d_1 n'est pas changée (ce serait trop compliqué, le but étant de réaliser un appareil très simple…).

Le calcul de L'_0 n'a donc de sens que pour un appareil à mise au point fixe **et diaphragme fixe** : pour obtenir des photos nettes d'objets relativement proches ($L'_0 = 4$ m), il faudra donc un diaphragme de valeur élevée… ou réduire la valeur de f' : pour L_0 et L'_0 inchangés, un objectif de focale $f' = 35$ mm conduit à $N = 8$.

Si d_1 est calculé pour un diaphragme minimal N_1, le calcul de L'_0 en fonction de N (à d_1 fixé) conduit à :

$$L'_0 = f' \cdot \frac{f' + N_1 g}{(N_1 + N)g}$$

soit, pour $N_1 = 2{,}8$ et $N = 16$ (et $f' = 50$ mm)

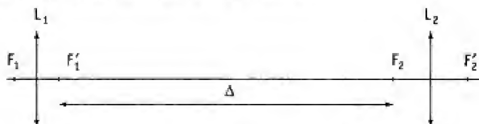
$$L'_0 = 6{,}65 \text{ m}$$

le gain est facile par rapport à L_0 (cas où $d = f'$).

L'opération n'est intéressante que pour des diaphragmes de valeur élevée pour l'ouverture relative maximale…

308 Étude sommaire d'un microscope

Un microscope est constitué d'un objectif et d'un oculaire, placés relativement loin l'un de l'autre. On peut le schématiser par l'association de deux lentilles minces convergentes, L_1 représentant l'objectif et L_2 l'oculaire :



Pour les applications numériques, on prendra L_1 et L_2 de distances focales respectives $f'_1 = 1{,}2$ cm et $f'_2 = 2$ cm. On notera Δ la distance entre le foyer image de L_1 et le foyer objet de L_2, avec $\Delta = 18$ cm.

1. L'image donnée par l'oculaire étant normalement située à l'infini (ceci afin de limiter la fatigue visuelle de l'observateur), à quelle distance de l'objectif faut-il placer l'objet à observer ?

Faire un schéma du tracé des rayons lumineux issus d'un point B de l'objet, situé en dehors de l'axe du système.

Calculer dans ces conditions le grandissement de l'objectif, et déterminer la dimension angulaire α de l'image vue par l'observateur.

2. Quand l'objet, placé à une distance d de l'œil de l'observateur, est directement observé à l'œil nu, il est vu sous un angle α'.

Calculer le rapport $\frac{\alpha}{\alpha'} = G_c$, grossissement commercial du microscope. Faire l'application numérique ($d = 0{,}25$ m).

La quantité $\frac{G_c}{d}$ est appelée « puissance intrinsèque » du microscope : donner l'expression littérale de cette puissance intrinsèque.

3. Le microscope n'étant pas parfaitement réglé, l'image observée n'est plus à l'infini, mais on suppose qu'elle se forme à la distance d précédente au-delà du foyer image de L_2 : grâce à l'accommodation de l'œil, l'observateur la voit encore nettement...

Par rapport à sa position initiale (question **1.**), de combien l'objet a-t-il été déplacé ? Ce déplacement correspond à la « profondeur de champ » du microscope...

Le rapport $\frac{\alpha}{\alpha'}$ a-t-il été modifié ?

Si oui, calculer sa nouvelle valeur.

4. On remplace la lentille L_2 par un oculaire dit « de Ramsden », constitué de deux lentilles convergentes L_2 identiques à la précédente, placées à la distance $e = 1$ cm l'une de l'autre.

L'objet étant placé dans la position du **1.**, comment faut-t-il placer ces deux lentilles pour que l'image donnée par cet oculaire se forme encore à l'infini ? On déterminera précisément la position de l'image A' donnée par l'objectif (image de A situé sur l'axe du microscope) par rapport aux lentilles de l'oculaire.

Faire une figure du tracé des rayons lumineux issus de B' et traversant l'oculaire.

Le rapport $\frac{\alpha}{\alpha'}$ est-il modifié ?

Si oui, calculer sa nouvelle valeur.

Solution

1. Pour que l'image donnée par l'oculaire soit située à l'infini, il faut que l'objet correspondant (image intermédiaire) soit placé en F_2.

On a ainsi $A \xrightarrow{\mathscr{L}_1} A_1 \equiv F_2 \xrightarrow{\mathscr{L}_2} A_2$ à l'infini.

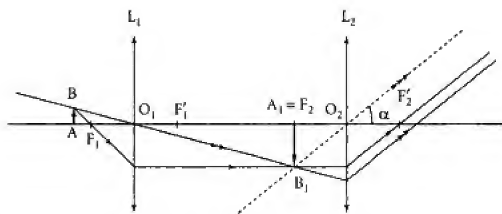
En utilisant la formule de conjugaison de Newton, on a donc :

$$\overline{F_1A} \cdot \overline{F_1'F_2} = -f_1'^{\,2}$$

soit $$\boxed{\overline{F_1A} = \frac{-f_1'^{\,2}}{\Delta}}$$

Application numérique : $\overline{F_1A} = -0{,}08$ cm $= -0{,}8$ mm.

Conclusion : A est pratiquement en F_1 (l'échelle n'est pas respectée pour la figure).



Déterminons le grandissement de l'objectif :

$$\gamma = \frac{\overline{F_1' A_1}}{\overline{F_1' O_1}} = -\frac{\Delta}{f_1'} \qquad \boxed{\gamma = -\frac{\Delta}{f_1'}}$$

Application numérique : $\gamma = -15$.

Soit α la dimension angulaire de l'image vue par l'observateur :

$$\alpha = \tan\alpha = \frac{A_1B_1}{O_2F_2} = |\gamma|\frac{AB}{f_2'} = \frac{\Delta}{f_1' f_2'}AB.$$

2. On a : $\tan\alpha' = \alpha' = \dfrac{AB}{d}$ (vision directe : d correspond à la distance minimale d'accommodation pour l'œil).

$$\boxed{G_c = \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\Delta d}{f_1' f_2'}}$$

Application numérique : $G_c = 187{,}5$.

La puissance intrinsèque $\mathcal{P}_i$ est définie par $\mathcal{P}_i = \dfrac{G_c}{d}$

$$\boxed{\mathcal{P}_i = \frac{\Delta}{f_1' f_2'}}$$

Application numérique : $\mathcal{P}_i = 750\ \text{m}^{-1}$ (750 dioptries).

3. On applique à nouveau la formule de conjugaison de Newton (nouvelle position de A) :

$$(A \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A_1' \xrightarrow{\mathcal{L}_2} A_2)$$

$$\overline{F_2A_1'} \cdot \overline{F_2'A_2} = -f_2'^2; \quad \overline{F_1A} \cdot \overline{F_1'A_1'} = -f_1'^2.$$

$$\overline{F_1'A_1'} = \overline{F_1'F_2} + \overline{F_2A_1'} = \Delta - \frac{f_2'^2}{d} \quad (\overline{F_2A_1'} = d > 0)$$

$$\overline{F_1A} = \frac{-f_1'^2}{\Delta - \dfrac{f_2'^2}{d}} = \frac{-f_1'^2}{\Delta}\left[1 - \frac{f_2'^2}{d\Delta}\right]^{-1}$$

$\dfrac{f_2'^2}{d\Delta} \ll 1$, un développement limité au 1[er] ordre nous donne :

$$\overline{F_1A} \approx \frac{-f_1'^2}{\Delta}\left(1+\frac{f_2'^2}{d\Delta}\right).$$

L'objet a donc été déplacé de :

$$-\frac{f_1'^2 f_2'^2}{d\Delta^2}, \text{ soit } 7\cdot 10^{-4} \text{ cm !!!}$$

Commentaire

La profondeur de champ que l'on vient de calculer est très faible, ce qui justifie l'utilisation d'une vis de mise au point rapide et d'une vis micrométrique de réglage fin.

α' est inchangé ($\alpha' = \dfrac{AB}{d}$)

et $\gamma' = \dfrac{\overline{F_1O_1}}{\overline{F_1A}} = -f_1'\cdot\dfrac{1}{f_1'^2}\cdot\left(\Delta-\dfrac{f_2'^2}{d}\right) = \gamma + \dfrac{f_2'^2}{df_1'}$ (γ' : grandissement de l'objectif pour la nouvelle position de l'objet)

$$\alpha = \frac{|\gamma'|AB}{f_2'}$$

$$\boxed{\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{|\gamma|d}{f_2'} - \frac{f_2'}{f_1'}} \quad \left(|\gamma'| = |\gamma| - \frac{f_2'^2}{df_1'}\right)$$

On trouve un grossissement commercial inférieur à celui trouvé au **2.**

Application numérique : $\dfrac{\alpha}{\alpha'} = 185{,}8$.

4. Pour que l'image de A soit à l'infini, il faut que A' (image de A par l'objectif) soit au foyer objet de l'oculaire.

En appelant $\mathcal{F}_2$ et $\mathcal{F}_2'$ les foyers objet et image de la 2[e] lentille $\mathcal{L}_2$, formant avec L_2 (foyers F_2 et F_2') l'oculaire de Ramsden, on a (*cf.* figure 2) :

$$A' \xrightarrow{L_2} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} \text{point à l'infini.}$$

D'après la formule de conjugaison de Newton :

$$\overline{F_2A'}\times\overline{F_2'\mathcal{F}_2} = -f_2'^2$$

avec $\overline{F_2'\mathcal{F}_2} = \overline{F_2'O_2} + \overline{O_2O_2'} + \overline{O_2'\mathcal{F}_2} = e - 2f_2'$

d'où $\boxed{\overline{F_2A'} = \dfrac{-f_2'^2}{e-2f_2}}$

Construction de A′B′ ($\mathcal{F}_2B_2$ image de A′B′ par rapport à L_2) :

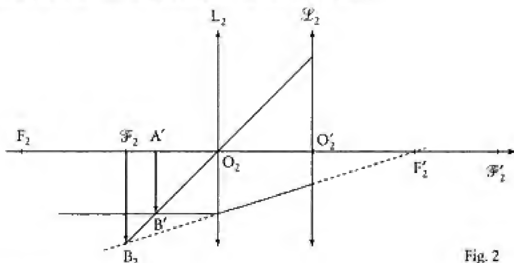


Fig. 2

Tracé des rayons lumineux :

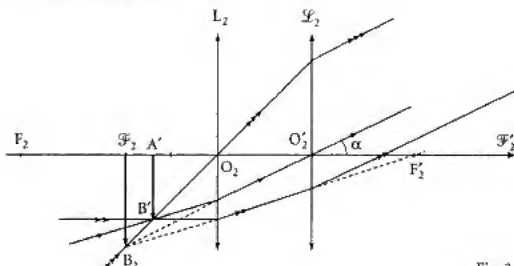


Fig. 3

Déterminons la nouvelle expression de α :

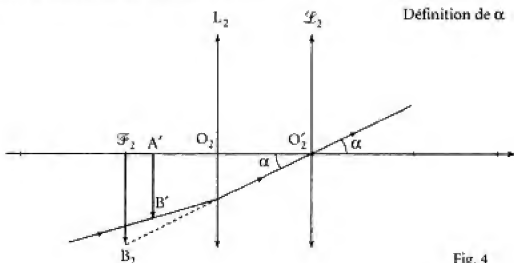


Fig. 4

D'après la figure 4 :

$$\alpha = \frac{\mathcal{F}_2B_2}{O'_2\mathcal{F}_2} = \frac{\mathcal{F}_2B_2}{f'_2}.$$

D'après la figure 3 :

$$\overline{\mathcal{F}_2B_2} = \overline{A'B'}\frac{\overline{O_2\mathcal{F}_2}}{\overline{O_2A'}} = \gamma\overline{AB}\frac{\overline{O_2O'_2} + \overline{O'_2\mathcal{F}_2}}{\overline{O_2F_2} + \overline{F_2A'}} = \gamma\overline{AB}\frac{e - f'_2}{-f'_2 - \dfrac{f'^2_2}{e - 2f'_2}}$$

$$\overline{\mathcal{F}_2B_2} = \gamma\overline{AB}\left(\frac{2f'_2 - e}{f'_2}\right)$$

d'où $\alpha = |\gamma|\text{AB}\left(\dfrac{2f'_2 - e}{f'^2_2}\right)$ et $\dfrac{\alpha}{\alpha'} = |\gamma|d\left(\dfrac{2f'_2 - e}{f'^2_2}\right)$

avec $\gamma = -\dfrac{\Delta}{f'_1}$ (*cf.* 1.)

$$\boxed{\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\Delta d}{f'_1 \times f'_2}\left(\frac{2f'_2 - e}{f'_2}\right)}$$

On retrouve la valeur initiale du grossissement commercial trouvée au 2. multipliée par le terme $\dfrac{2f'_2 - e}{f'_2}$ qui vaut ici $\dfrac{3}{2}$.

A.N. : $G_c = 281{,}2$.

Partie 2

chapitre

4

Électrocinétique 2

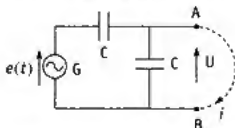
A · Régime sinusoïdal

B · Filtres actifs et autres circuits avec amplificateur opérationnel

A. Régime sinusoïdal

401 Générateur sinusoïdal

Un générateur parfait G de tension sinusoïdale délivre une tension $e(t) = E\cos\omega t$, avec $E = 220\sqrt{2}$ V et $\omega = 2\pi f$, $f = 50$ Hz. Il est connecté à deux condensateurs C en série ($C = 7\ \mu F$), et l'ensemble constitue une source sinusoïdale de bornes A et B :



On veut déterminer les caractéristiques, en régime permanent, de ce générateur.

1. Donner l'équation de la caractéristique – en amplitudes complexes – de ce générateur : $\underline{U} = f(\underline{I})$. On posera $R_0 = \dfrac{1}{2C\omega}$.

2. En déduire la caractéristique, en amplitudes réelles, $U = g(I)$ lorsque l'utilisation branchée entre A et B est une résistance pure.

Tracer la courbe représentative de la fonction g. Quel est le courant de court-circuit de ce générateur ? Préciser le domaine des valeurs de I pour lesquelles $U \geqslant 0{,}9 \cdot U_{max}$.

1. Ce qu'il faut savoir

- Équivalence Norton/Thévenin.
- Utilisation des amplitudes complexes.

2. Ce qu'il faut comprendre

On peut appliquer les théorèmes vus en régime permanent continu, à condition d'utiliser les amplitudes complexes associées aux tensions et aux intensités et les impédances complexes qui caractérisent les différents dipôles passifs.

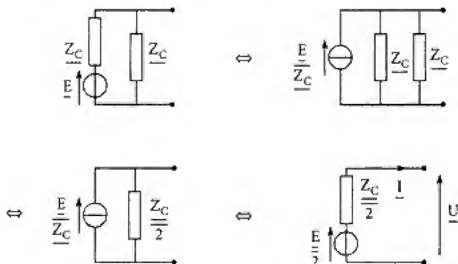
3. Solution

1.

> **POINT COURS**
>
> **À une tension sinusoïdale quelconque $u(t) = U\cos(\omega t + \varphi)$ est associée une amplitude complexe $\underline{U} = Ue^{j\varphi}$, nombre complexe de module U et d'argument φ.**

Ainsi à $e(t) = E\cos\omega t$, on associe l'amplitude complexe $\underline{E} = E$.

Le condensateur C est caractérisé par son impédance complexe $\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$.
On peut procéder par simplification (Thévenin ⇔ Norton).



On a donc $\underline{U} = \frac{\underline{E}}{2} - \frac{\underline{Z}_C}{2}\underline{I}$

et puisque $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega} = \frac{2R_0}{j} = -2jR_0$, alors :

$$\boxed{\underline{U} = \frac{\underline{E}}{2} + jR_0\underline{I}}$$

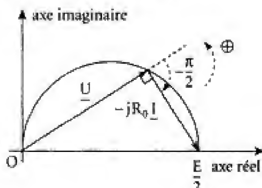
2. Si l'utilisation branchée entre A et B est une résistance pure (impédance complexe réelle), $\underline{U}$ et $\underline{I}$ sont en phase, et donc $\underline{U}$ et $jR_0\underline{I}$ sont déphasés de $+\frac{\pi}{2}$.

En utilisant la représentation de Fresnel, il vient immédiatement :

$$U^2 + (R_0 I)^2 = \frac{E^2}{4}$$

et :

$$\boxed{U = \sqrt{\frac{E^2}{4} - R_0^2 I^2}}$$



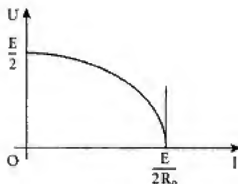
Cette relation peut encore s'écrire :

$$\frac{U^2}{\left(\frac{E}{2}\right)^2} + \frac{I^2}{\left(\frac{E}{2R_0}\right)^2} = 1$$

équation caractéristique d'une ellipse rapportée à ses axes principaux.

D'où le graphe de $U = g(I)$:

le courant de court-circuit ($U = 0$) est donc :



$$I_{cc} = \frac{E}{2R_0} = EC\omega = 0{,}68\ \text{A}$$

soit $(I_{cc})_{eff} = 0{,}48\ \text{A}$

d'où l'expression de $I = g^{-1}(U)$

$$I^2 = I_{cc}^2 - \left(\frac{U}{R_0}\right)^2$$

$$I = \sqrt{I_{cc}^2 - \left(\frac{U}{R_0}\right)^2}$$

et on aura $U \geqslant 0{,}9 \cdot U_{max}$ (avec $U_{max} = \frac{E}{2}$)

tant que : $I^2 \leqslant I_{cc}^2 - (0{,}9)^2\left(\frac{U_{max}}{R_0}\right)^2$

$$I^2 \leqslant I_{cc}^2(1 - (0{,}9)^2)\ ; \quad \left(\frac{U_{max}}{R_0} = \frac{E}{2R_0} = I_{cc}\right)$$

$$I^2 \leqslant 0{,}19 \cdot I_{cc}^2$$

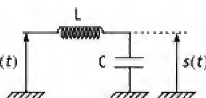
soit : $I \leqslant 0{,}44 \cdot I_{cc}$

$I_e \leqslant 0{,}21\ \text{A}$ (en valeur efficace).

402 Circuit RLC

1. La source de tension est sinusoïdale :

$$e(t) = E_0 \cos\omega t\,.$$



a. Préciser, sans calculs, le comportement du signal de sortie, **en régime établi**, en B.F., en H.F. et enfin pour $\omega = \omega_c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

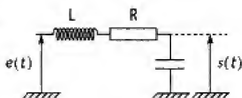
b. On note $s(t) = R_e(\underline{s}(t))$ et $e(t) = R_e(\underline{e}(t))$ avec $\underline{s}(t) = \underline{S}e^{j\omega t}$ et $\underline{e}(t) = \underline{E}e^{j\omega t}$.

Déterminer la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = |\underline{H}|e^{j\psi}$ ($j^2 = -1$).

Tracer les courbes donnant $G_{dB} = 20\log|\underline{H}|$ et ψ en fonction de $X = \log\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$.

2. On désire tenir compte de la résistance R de la bobine, résistance que l'on place en série avec l'inductance pure L. On pose

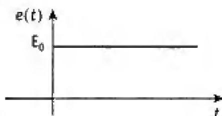
$$Q = \frac{L\omega_c}{R}.$$



a. Déterminer la nouvelle fonction de transfert $\underline{H}' = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = |\underline{H}'|e^{j\psi'}$ en fonction de Q et de $\frac{\omega}{\omega_c}$ (régime sinusoïdal établi).

b. Tracer les courbes donnant $G_{dB} = 20\log|\underline{H}'|$ et ψ' en fonction de $X = \log\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$. On prendra $L = 10$ mH ; $C = 2,2$ nF et $R = 12\ \Omega$.

c. Pour étudier le régime transitoire, on attaque le circuit précédent par un échelon de tension $e(t)$ d'amplitude E_0 – la capacité est initialement déchargée.



Déterminer la tension de sortie $s(t)$ ainsi que le courant $i(t)$ dans le circuit. Les résultats seront exprimés en fonction de ω_c, Q, E_0 et t.

1. Ce qu'il faut savoir

- Utilisation des amplitudes complexes.
- Détermination et étude d'une fonction de transfert.

2. Ce qu'il faut comprendre

En régime continu établi ($\omega \to 0$), une capacité ne se laisse pas traverser par un courant. Une inductance s'oppose aux variations brusques de courant (intensité nulle pour $\omega \to \infty$).

3. Solution

1. a. • À la limite en T.B.F. (très basse fréquence), l'inductance L constitue un court-circuit et la capacité C un coupe-circuit : on a donc $s = e$ (pas de courant) et $\underline{H} = 1$.

• En T.H.F., les rôles de L et C sont inversés et la sortie est court-circuitée, d'où $s = 0$ et $\underline{H} = 0$.

• Pour la pulsation ω_c, caractéristique du circuit série L-C, l'impédance devient nulle et le courant théoriquement infini. Il en résulte que s prend une valeur également infinie.

1. b. Notons $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$ et $\underline{Z}_L = jL\omega$ les impédances complexes de la capacité et de l'inductance. Le système constitue **un diviseur de tension** (même courant dans L et C), soit :

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_L} \Rightarrow \underline{H} = \frac{1}{1 + \underline{Y}_C \underline{Z}_L}.$$

Finalement

$$\boxed{\underline{H} = \frac{1}{1 - LC\omega^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}$$

Il vient alors :

• $G_{dB} = -20\log\left|1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right|$ d'où :

– $\frac{\omega}{\omega_c} \to 0 \quad \Rightarrow \quad G_{dB} \to 0$

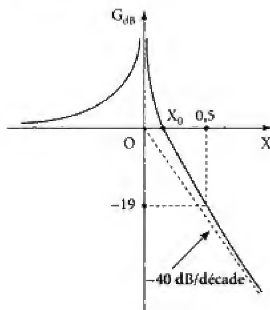
– $\frac{\omega}{\omega_c} \gg 1 \quad \Rightarrow \quad G_{dB} \sim -40\log\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) = -40X$

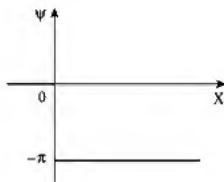
– $\omega = \omega_c \quad \Rightarrow \quad G_{dB} \to +\infty.$

• D'autre part, on a $\underline{H}$ réel positif pour $\omega < \omega_c$ et $\underline{H}$ réel négatif pour $\omega > \omega_c$, on peut donc prendre :

$$\boxed{\psi = 0 \quad \text{pour} \quad \omega < \omega_c \quad \text{et} \quad \psi = -\pi \quad \text{pour} \quad \omega > \omega_c}$$

D'où les graphes :





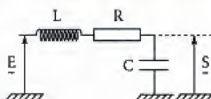
Remarque : on a $G_{dB} = 0$ pour $\left|1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right| = 1$, c'est-à-dire pour

$$\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 = 2 \Rightarrow \omega = \sqrt{2}\omega_c \quad \left(X_0 = \log\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) = \log\sqrt{2} = 0{,}15\right).$$

POINT MÉTHODE

Il est rare d'observer une discontinuité de la phase. Ici, la phase est discontinue lorsque $G_{dB} \to \infty$.

2. a. Avec $\underline{Z_R} = R$, impédance de la résistance R, il vient maintenant :



$$\underline{H'} = \frac{\underline{Z_C}}{\underline{Z_C} + \underline{Z_R} + \underline{Z_L}}.$$

Soit encore : $\underline{H'} = \frac{1}{1 + \underline{Y_C}(\underline{Z_R} + \underline{Z_L})}$.

D'où $$\underline{H'} = \frac{1}{(1 - LC\omega^2) + jRC\omega}.$$

Or $$LC\omega^2 = \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \quad \text{et} \quad RC\omega = RC\omega_c \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right).$$

De plus $$Q = \frac{L\omega_c}{R} = \frac{LC\omega_c^2}{RC\omega_c} = \frac{1}{RC\omega_c} \quad (\text{puisque } LC\omega_c^2 = 1),$$

soit $$\boxed{\underline{H'} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 + \frac{j}{Q}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}}$$

Il est à remarquer que R ne joue aucun rôle dans les comportements asymptotiques ($\omega \to 0$; et $\omega \to +\infty$, en fait $\omega \gg \omega_c$) qui restent donc identiques à ceux décrits dans le 1.

Pour $\omega = \omega_c$, la présence de la résistance limite la valeur de $|\underline{H'}|$:

$$\underline{H'}(\omega_c) = \frac{1}{(j/Q)} = -jQ \quad \text{et} \quad G_{dB}(\omega_c) = 20\log Q.$$

2. b. *Diagramme de Bode :*

Cette fois-ci, nous avons :

$$G_{dB} = 20\log\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right)^2 + \frac{1}{Q^2}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} = -10\log\left[\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right)^2 + \frac{1}{Q^2}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right].$$

Comme on vient de le souligner, on peut écrire :

- $\omega \to 0 \quad \Rightarrow \quad G_{dB} \to 0$

- $\omega \gg \omega_c \Rightarrow G_{dB} \to -40\log\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) = -40X$ avec $X = \log\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$
- $\omega = \omega_c \Rightarrow G_{dB} \to 20\log Q.$

Cherchons si la courbe présente un maximum :

S'il existe, il se produit pour ω tel que $\frac{dG_{dB}}{d\omega} = 0,$

c'est-à-dire pour $$2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)\left[\frac{1}{Q^2} - 2\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right)\right] = 0$$

ou encore $$\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)\left[\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 - \left(1-\frac{1}{2Q^2}\right)\right] = 0\,;$$

d'où la conclusion : $$\begin{cases} \frac{\omega_M}{\omega_c} = 1 - \frac{1}{2Q^2} & \text{dès que} \quad Q > \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \omega_M = 0 & \text{dans le cas contraire} \end{cases}$$

Commentaires

Le facteur $Q = \frac{L\omega_C}{R}$ est en fait le facteur de qualité du circuit RLC série. La réponse du circuit étant prise aux bornes de la capacité (réponse en amplitude), celle-ci ne présentera de maximum (différent de $\omega = 0$) que pour une valeur de Q supérieure à une valeur critique Q_C égale à $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Dans le cas qui nous intéresse ici, on a :

$$Q = \frac{L\omega_c}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{12}\sqrt{\frac{10\cdot 10^{-3}}{2{,}2\cdot 10^{-9}}}$$

$$\Rightarrow Q = 178$$

et donc $$\frac{\omega_M}{\omega_c} = 1 \quad (\text{à } 10^{-5} \text{ près}).$$

De plus $$20\log Q = 45\text{dB}.$$

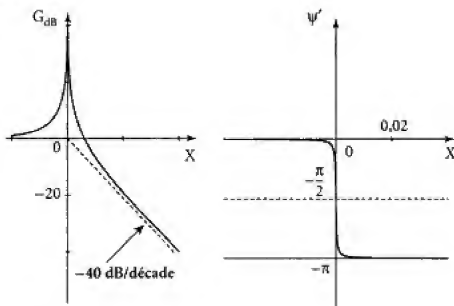
En ce qui concerne la phase ψ', celle-ci est fournie par : $\psi' = \text{Arg}(\underline{H}')$.

Soit $$\tan\psi' = -\frac{1}{Q}\frac{\frac{\omega}{\omega_c}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2} \quad \text{avec} \quad \sin\psi' < 0.$$

Ainsi : – pour $\omega < \omega_c$: $\psi' \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ et décroît de 0 à $-\frac{\pi}{2}$ quand ω augmente de 0 à ω_c ;

– pour $\omega > \omega_c$: $\psi' \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$ et décroît de $-\frac{\pi}{2}$ à $-\pi$ quand ω croît de ω_c à l'infini.

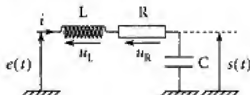
D'où les graphes :



Commentaire

La phase est maintenant continue, le gain restant fini.

2. c. On se place désormais en régime transitoire :



Point cours

On peut obtenir l'équation différentielle en $s(t)$ à partir de la connaissance de la fonction de transfert $\underline{H}'$. En effet :

$$\underline{H}' = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 + \frac{j}{Q}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)},$$

d'où

$$\underline{s} - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \underline{s} + \frac{1}{Q\omega_c} j\omega \underline{s} = \underline{e}$$

soit en remplaçant $j\omega$ par $\frac{d}{dt}$ et $(-\omega^2)$ par $\frac{d^2}{dt^2}$ nous obtenons (avec $\underline{s} \rightarrow s(t)$ et $\underline{e} \rightarrow e(t)$) :

$$\boxed{s(t) + \frac{1}{Q\omega_c}\frac{ds}{dt} + \frac{1}{\omega_c^2}\frac{d^2 s}{dt^2} = e(t)}$$

On peut aussi retrouver directement cette équation différentielle.

On a : $$e(t) = u_L + u_R + s$$

avec : $$u_L = L\frac{di}{dt}, \quad u_R = Ri$$

et : $$i = C\frac{ds}{dt}.$$

D'où, en fonction de $s(t)$ et de ses dérivés :

$$e(t) = s(t) + RC\frac{ds}{dt} + LC\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Or $$\omega_c^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{et} \quad \frac{1}{Q} = RC\omega_c$$

d'où $$\boxed{\frac{1}{\omega_c^2}\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{1}{Q\omega_c}\frac{ds}{dt} + s(t) = e(t)}$$

Posons $s(t) = S(u)$ avec $u = \omega_c t$ (« temps réduit »), il vient :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{dS}{du}\omega_c \quad \text{et} \quad \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d^2S}{du^2}\omega_c^2$$

soit $$\frac{d^2S}{du^2} + \frac{1}{Q}\frac{dS}{du} + S = E_0 \quad \text{pour } u > 0 \quad (t > 0).$$

L'équation caractéristique associée à cette équation différentielle est fournie par :

$$x^2 + \frac{1}{Q}x + 1 = 0 \quad (\text{solution en } e^{xu})$$

d'où $$x = -\frac{1}{2Q} \pm \frac{j}{2}\sqrt{4 - \frac{1}{Q^2}} \quad (\text{ici } Q \sim 180 > \frac{1}{2}).$$

Or $Q \gg 1$ soit $$x \# -\frac{1}{2Q} \pm j$$

soit $$S(u) \# E_0 + e^{-\frac{u}{2Q}}[A\cos(u) + B\sin(u)].$$

Les conditions initiales imposent $S(0) = 0$ (continuité de la charge du condensateur) et $i(0) = 0$ (présence de l'inductance L), d'où :

$S(0) = 0 \Rightarrow E_0 + A = 0$ et $A = -E_0$

$i(0) = 0 \Rightarrow \frac{dS}{du}(0) = 0 \Rightarrow B - \frac{1}{2Q}A = 0$ et à la même approximation ($Q \gg 1$) :

$B \sim 0$.

Finalement : $S(u) \# E_0\left\{1 - e^{-\frac{u}{2Q}}\cos(u)\right\}$

et $$\boxed{s(t) \# E_0\left\{1 - e^{-\frac{\omega_c t}{2Q}}\cos\omega_c t\right\}}$$

Le courant $i(t)$ s'obtient facilement avec $i = C\frac{ds}{dt}$, soit pour $Q \gg 1$:

$$i(t) \# CE_0\omega_c e^{-\frac{\omega_c t}{2Q}} \sin\omega_c t$$

Commentaire

La présence de l'exponentielle met en évidence un temps caractéristique τ (pour $t \gg \tau$, $s(t) \sim E_0$ et $i(t) \sim 0$).

Posons en effet, $\tau = \frac{Q}{\omega_c}$, alors l'exponentielle présente dans $s(t)$ et $i(t)$ s'écrit $e^{-\frac{t}{2\tau}}$ et les grandeurs énergétiques comme $\frac{1}{2}Li^2$ varient notamment en $e^{-\frac{t}{\tau}}$.

403 Sonde adaptée pour oscilloscope

L'impédance d'entrée $\underline{Z}_e$ d'une voie X (ou Y) d'un oscilloscope est assimilable – en mode DC – à l'association en parallèle d'une résistance $R_2 = 1{,}0\ \text{M}\Omega$ et d'une capacité $C_2 = 20$ pF.

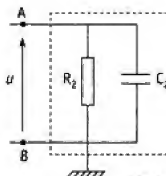


Fig.1

1. Déterminer le module Z_e de cette impédance pour une fréquence $f = 1$ kHz, puis $f = 100$ kHz.

Proposer une méthode, utilisant l'oscilloscope, pour mesurer R_2 et C_2.

2. On branche, entre les bornes A et B, le quadripôle passif [Q] représenté sur la figure 2.

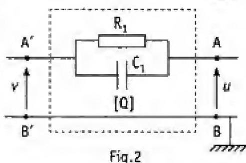


Fig.2

a. On alimente le système avec une source idéale de tension sinusoïdale $v(t) = V_0 \cos\omega t$ de pulsation ω fixée.

À quelle condition portant sur R_1, R_2, C_1 et C_2 le rapport $\frac{u}{v}$ est-il constant et indépendant de la valeur de ω (on se placera en régime sinusoïdal établi) ?

b. Calculer R_1 et C_1 pour $\frac{u}{v} = \frac{1}{10}$. En déduire la valeur du module de l'impédance d'entrée $\underline{Z}'_e$ vue entre les bornes A' B' pour $f = 1$ kHz puis $f = 100$ kHz. Conclure.

c. Le quadripôle [Q] représente une sonde de mesure que l'on intercale entre le dipôle où l'on prélève la tension et l'entrée de l'oscilloscope.

R_1 est fixée à la valeur calculée au **2.b.** et C_1 est ajustable.

Proposer une méthode de réglage de la sonde sachant que l'on dispose sur l'oscilloscope d'une tension carrée de quelques kHz.

1. Ce qu'il faut savoir

Points de cours

- Notion d'impédance complexe – association d'impédances.
- Fonction de transfert en régime sinusoïdal pour un système linéaire stable.

Outil mathématique

Retenir qu'un signal physique $s(t)$ « quelconque », donc non nécessairement sinusoïdal, peut être décomposé en une somme – en général continue – de signaux sinusoïdaux…

2. Ce qu'il faut comprendre

2. Le circuit proposé constitue un pont diviseur de tension. Pour être constant, le rapport $\frac{u}{v}$ doit être indépendant du temps, et on le veut indépendant de ω : en termes d'amplitudes complexes, cela correspond à $\frac{\underline{U}}{\underline{V}} = \{\text{nombre réel}\}$, indépendant de ω.

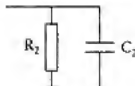
Le rapport $\frac{\underline{U}}{\underline{V}}$ $\left(\text{ou } \frac{\underline{V}}{\underline{U}}\right)$ s'exprime simplement en fonction des impédances $\underline{Z}_1$ et $\underline{Z}_2$ des deux groupes RC.

Si la condition cherchée est réalisée, la tension $u(t)$ est semblable à $v(t)$ $\left(u(t) = \frac{v(t)}{10}\right)$: l'observation à l'oscilloscope n'est pas perturbée (le réglage des gains permet de compenser la différence d'amplitude…).

L'intérêt du montage ne peut provenir que de l'augmentation de l'impédance d'entrée de l'appareil de mesure (R_1C_1 + oscilloscope), c'est-à-dire finalement de la diminution de la perturbation apportée au circuit étudié, qui est la « source » fournissant la tension $v(t)$.

3. Solution

1. Les deux composants R_2 et C_2 sont en parallèle, leurs admittances $\underline{Y}$ s'ajoutent donc :



$$\underline{Y}_e = \frac{1}{\underline{Z}_e} = \frac{1}{R_2} + jC_2\omega.$$

D'où :

$$\boxed{\underline{Z_e} = \frac{R_2}{1 + jR_2C_2\omega}}$$

$$\Rightarrow Z_e = \frac{R_2}{\sqrt{1 + (R_2C_2\omega)^2}}.$$

Point méthode

Le module Z_e de $\underline{Z_e}$ est obtenu à partir de $Z_e^2 = |\underline{Z_e}|^2 = \underline{Z_e}\,\underline{Z_e}^* \ldots$

On a encore pour $\underline{z} = x + jy \Rightarrow |\underline{z}|^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow |\underline{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

et pour $\underline{z} = \frac{\underline{a}}{\underline{b}} \Rightarrow |\underline{z}| = \left|\frac{\underline{a}}{\underline{b}}\right| = \frac{|\underline{a}|}{|\underline{b}|}.$

D'où le résultat.

Application numérique :

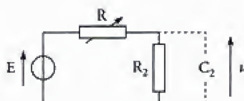
$$Z_e = \frac{10^6}{\sqrt{1 + (10^6 \cdot 20 \cdot 10^{-12} \cdot 2\pi f)^2}}$$

$f = 1\ \text{kHz} \to Z_e = 0{,}99\ \text{M}\Omega$;

$f = 100\ \text{kHz} \to Z_e = 79\ \text{k}\Omega$.

• **Mesure expérimentale de R_2 et C_2 :**

– **Mesure de R_2 :** on réalise le montage représenté ci-contre où E est un générateur de tension continue. En régime permanent, la capacité est équivalente à un circuit couvert.

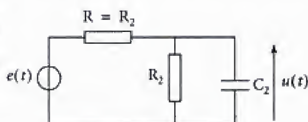


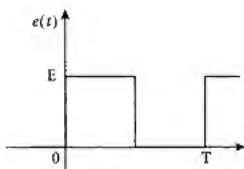
Pour $R = 0$, on a $u = E$ et on observe une trace horizontale sur l'écran associée à une déviation verticale Δ.

Pour $R = R_2$, on a $u = \frac{E}{2}$ (diviseur de tension) et la déviation verticale devient $\frac{\Delta}{2}$.

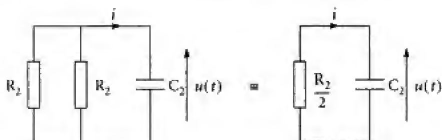
On ajuste donc la valeur de R pour que la déviation verticale soit divisée par 2 (alors $R = R_2$).

– **Mesure de C_2 :** $e(t)$ est un générateur délivrant des signaux carrés de tension crête à crête E et de fréquence quelques kHz. On fait de plus $R = R_2$ (*cf.* réglage précédent).





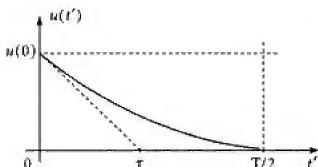
Pour $t \in \left[\left(n+\frac{1}{2}\right)T, (n+1)T\right]$, $E = 0$ et le circuit se réduit à :



Dès lors : $u = -\frac{R_2}{2}i$ et $i = C_2\frac{du}{dt} \Rightarrow \frac{du}{dt} + \frac{2}{R_2C_2}u = 0$

d'où $u(t') = u(0)e^{-\frac{t'}{\tau}}$ avec : $\begin{cases} \tau = \frac{R_2C_2}{2} \\ t' = t - \left(n+\frac{1}{2}\right)T \end{cases}$

Il suffit alors de mesurer τ et d'en déduire C_2 connaissant R_2 (pour $R_2 = 1\ \text{M}\Omega$ et $C_2 = 20\ \text{pF}$, on doit avoir $\tau = 10\ \mu\text{s}$).



Ainsi $\frac{u(\tau)}{u(0)} = \frac{1}{e}\ldots$

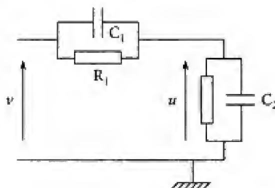
Le phénomène est facilement observable si l'on impose une demi-période de l'ordre de quelques τ, soit : $\frac{T}{2} \sim qq\frac{R_2C_2}{2} \Rightarrow qq\,f \sim \frac{1}{R_2C_2} = 50\ \text{kHz}$.

Une fréquence f de l'ordre de quelques kHz semble convenir.

2. a. On se place en régime sinusoïdal établi, on a donc en notation réelle :

$v = V_0 \cos \omega t$ et

$u = H(\omega) V_0 \cos(\omega t + \varphi(\omega))$.

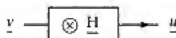


POINT COURS

La relation entrée ($v(t)$) – sortie ($u(t)$) s'exprime simplement en notation complexe. On a en effet :

$$\underline{v} = V_0 e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{u} = V_0 \cdot \left[H(\omega) e^{j\varphi(\omega)}\right] e^{j\omega t}.$$

Soit $$\underline{u} = H(\omega) e^{j\varphi(\omega)} \underline{v} \Rightarrow \boxed{\underline{u} = \underline{H}(\omega)\underline{v}}$$



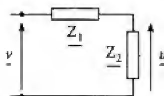
La grandeur $\underline{H}$ est appelée fonction de transfert.

On a ainsi en notant V_m (ici $V_m = V_0$) et U_m les amplitudes des signaux sinusoïdaux $v(t)$ et $u(t)$, et φ' l'avance de phase du signal de sortie sur le signal d'entrée :

$$H = |\underline{H}| = \frac{U_m}{V_m} \quad \text{et} \quad \varphi' = \varphi.$$

Passons en notation complexe.

Le montage proposé s'identifie à un diviseur de tension. On a donc :



$$\underline{u} = \underline{v} \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}.$$

D'où $\frac{\underline{v}}{\underline{u}} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}$ avec

$$\frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{R_2} + jC_2\omega = \frac{1}{R_2}(1 + jR_2C_2\omega)$$

$$\frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{R_1} + jC_1\omega = \frac{1}{R_1}(1 + jR_1C_1\omega)$$

soit :

$$\boxed{\frac{\underline{v}}{\underline{u}} = 1 + \frac{R_1}{R_2} \frac{1 + jR_2C_2\omega}{1 + jR_1C_1\omega}}$$

On veut que le rapport de ces tensions soit une constante indépendante de ω. Il faut donc que :

$$\frac{1 + jR_2C_2\omega}{1 + jR_1C_1\omega} = \text{cste} = k.$$

Or pour $\omega = 0$, il vient $k = 1$, ce qui implique pour tout ω :

$$1 + jR_2C_2\omega = 1 + jR_1C_1\omega \Rightarrow \boxed{R_2C_2 = R_1C_1}$$

On a alors : $\frac{\underline{v}}{\underline{u}} = 1 + \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow \boxed{\frac{\underline{u}}{\underline{v}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}}$

Les tensions u et v sont en phase, et leurs amplitudes sont dans un rapport constant quelle que soit la pulsation ω.

2. b. On a $\frac{u}{v} = \frac{1}{10}$ pour $1 + \frac{R_1}{R_2} = 10 \Rightarrow R_1 = 9R_2$

soit $\boxed{R_1 = 9\ \text{M}\Omega}$

La condition $R_1C_1 = R_2C_2$ devant être réalisée, il vient :

$$C_1 = C_2\frac{R_2}{R_1} = 20 \times \frac{1}{9} \Rightarrow C_1 \# 2{,}2\ \text{pF}.$$

L'impédance $\underline{Z'}_e$ vue entre A′ et B′ correspond à la mise en série des impédances $\underline{Z}_1$ et $\underline{Z}_2$. D'où :

$$\underline{Z'}_e = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \quad \text{et} \quad \underline{Z'}_e = \frac{R_1}{1 + jR_1C_1\omega} + \frac{R_2}{1 + jR_2C_2\omega}.$$

Or $R_1C_1 = R_2C_2$ soit :

$$\underline{Z'}_e = \frac{1}{1 + jR_2C_2\omega} \cdot (R_1 + R_2) = \frac{R_1 + R_2}{R_2} \cdot \frac{R_2}{1 + jR_2C_2\omega}.$$

Nous avons donc : $\underline{Z'}_e = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)\underline{Z}_e \Rightarrow \boxed{\underline{Z'}_e = 10\underline{Z}_e}$

soit encore : $Z'_e = 10Z_e \Rightarrow \begin{cases} f = 1\ \text{kHz} : & Z'_e = 9{,}9\ \text{M}\Omega \\ f = 100\ \text{kHz} : & Z'_e \approx 0{,}8\ \text{M}\Omega. \end{cases}$

L'avantage résulte de l'augmentation de l'impédance du circuit, $\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$ remplaçant la seule impédance $\underline{Z}_2$ (lorsque la tension $v(t)$ est branchée directement à l'entrée de l'oscilloscope).

Le dispositif de mesure absorbe alors (par rapport au montage électrique fournissant la tension $v(t)$ étudiée) un courant 10 fois plus petit : la perturbation apportée par l'appareil de mesure en est diminuée d'autant.

On applique donc à l'entrée de la sonde branchée sur l'une des voies de l'oscilloscope la tension carrée de quelques kHz disponible sur l'oscilloscope lui-même. Lorsque le réglage de C_1 est correct, on doit obtenir à l'écran un signal « parfaitement » carré ; dans le cas contraire, la relation entre $u(t)$ et $v(t)$ ne se réduisant plus à une simple proportionnalité, le carré est déformé.

Commentaires

Un signal « quelconque » $v(t)$ peut être interprété comme une somme (infinie) de composantes sinusoïdales : $a(\omega)\cos(\omega t + \varphi_v(\omega))$.

Le système linéaire transforme la composante « ω » en :

$$a(\omega)H(\omega)\cos[\omega t + \varphi_v(\omega) + \varphi(\omega)] \quad (cf.\ \underline{H} = H(\omega)e^{j\varphi(\omega)}).$$

Lorsque $H(\omega) = H_0 = \text{cste}$ et $\varphi(\omega) = 0$, chaque composante est simplement multipliée par la constante réelle H_0. Le signal de sortie $u(t)$ s'identifie alors à $H_0 v(t)$ et reproduit donc, à une constante multiplicative près H_0, le signal d'entrée $v(t)$ ...

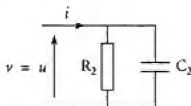
Ce dispositif constitue une **sonde**, qui permet de mesurer à l'oscilloscope une tension en réduisant notablement la perturbation apportée au circuit surtout lorsqu'on est contraint d'utiliser des câbles coaxiaux, dits « blindés », pour se protéger de tensions parasites...

On peut se poser la question du comportement d'un tel circuit en régime quelconque, non sinusoïdal permanent.

Le plus simple est de comparer les courants i et i' imposés par la tension $v(t)$ branchée directement à l'entrée (R_2, C_2) de l'oscilloscope, et par la tension $v(t)$ aux bornes du circuit étudié.

Dans le cas de l'oscilloscope seul :

$$i = \frac{v}{R_2} + C_2\frac{dv}{dt} = C_2\left(\frac{v}{R_2C_2} + \frac{dv}{dt}\right)$$



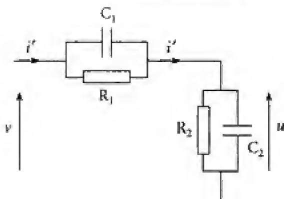
et, pour le montage étudié :

$$i' = \frac{v-u}{R_1} + C_1\frac{d(v-u)}{dt}$$

soit :

$$i' = \frac{v}{R_1} + C_1\frac{dv}{dt} - \frac{u}{R_1} - C_1\frac{du}{dt}$$

$$i' = C_1\left(\frac{v}{R_1C_1} + \frac{dv}{dt}\right) - C_1\left(\frac{u}{R_1C_1} + \frac{du}{dt}\right)$$



avec également, pour le bloc R_2C_2 :

$$i' = C_2\left(\frac{u}{R_2C_2} + \frac{du}{dt}\right).$$

Dans le cas où $R_1C_1 = R_2C_2$, il vient :

$$i' = C_1\left(\frac{v}{R_2C_2} + \frac{dv}{dt}\right) - C_1\left(\frac{u}{R_2C_2} + \frac{du}{dt}\right)$$

soit :

$$i' = C_1\left(\frac{i}{C_2}\right) - C_1\left(\frac{i'}{C_2}\right)$$

et finalement :

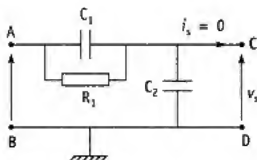
$$\boxed{i' = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot i = \frac{i}{10}}$$

Pour toute tension $v(t)$, le courant dérivé dans le dispositif de mesure est dix fois plus faible que dans le cas du branchement direct (ce qui implique bien une impédance dix fois plus grande dans le cas du régime sinusoïdal permanent...).

Pour que cette propriété soit indépendante de la forme de la fonction $v(t)$, il faut que les deux blocs (R_1C_1) et (R_2C_2) soient « semblables », ce qui correspond à l'égalité des constantes de temps...

404 Fonction de transfert

On cherche à déterminer les caractéristiques du quadripôle représenté sur la figure ci-contre.



On prendra $C_1 = 1$ nF, $C_2 = 10$ nF, $R_1 = 10$ kΩ et on supposera que le quadripôle est branché en sortie sur une charge infinie de telle sorte que le courant de sortie i_s reste constamment nul.

1. On se place dans cette question en **régime continu établi**.

Déterminer les résistances d'entrée R_e et de sortie R_s du montage dans le cas où le circuit est alimenté – entre A et B – par :

a. un générateur idéal de tension continue E_0 ;

b. un générateur de tension continue de f.é.m. E_0 et de résistance interne $R_0 = 50$ Ω.

2. Le générateur de tension est désormais sinusoïdal et de pulsation ω. On considère le régime sinusoïdal établi.

a. Déterminer la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e}$. Commenter.

Tracer les diagrammes de Bode donnant $G_{dB} = 20\log|\underline{H}|$ ainsi que $\varphi(\omega) = \mathrm{Arg}(\underline{H})$ en fonction de $\log\omega$.

On posera : $\omega_1 = \frac{1}{R_1C_1}$; $\omega_2 = \frac{1}{R_1(C_1 + C_2)}$ et $\omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2}$.

b. On ajoute en parallèle avec C_2 une résistance R_2.

Reprendre l'étude précédente. On envisagera plusieurs cas selon que R_2C_2 est supérieur, égal, ou inférieur à R_1C_1.

Poser $\omega_2' = \frac{R_1 + R_2}{R_1R_2(C_1 + C_2)}$ et $\omega_0' = \sqrt{\omega_1\omega_2'}$.

Tracer les diagrammes de Bode pour $R_1 = 10\ \mathrm{k\Omega}$; $C_1 = 1\ \mathrm{nF}$ et :

- $\frac{R_2}{R_1} = 1$ avec $\frac{C_2}{C_1} = 10$;
- $\frac{C_2}{C_1} = 1$ avec $\frac{R_1}{R_2} = 10$.

1. Ce qu'il faut savoir

Points de cours

- Résistance d'entrée – résistance de sortie.
- Fonction de transfert.
- Diagrammes de Bode : comportements asymptotiques.

Outil mathématique

- Calculs sur les nombres complexes.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. On se place en régime continu établi, régime pour lequel les capacités sont équivalentes à des circuits ouverts.

2. Le courant i_1 étant nul (charge infinie), le même courant traverse les branches AC et CD. On est alors en présence d'un diviseur de tension, ce qui permet de déterminer simplement l'expression de la fonction de transfert $\underline{H}$.

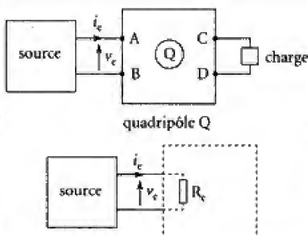
Les diagrammes de Bode doivent mettre en évidence les comportements asymptotiques (à T.B.F. et à T.H.F.), comportements que l'on peut retrouver directement en modifiant « à vue » le circuit proposé (à T.B.F., les capacités se réduisent – à la limite – à des circuits ouverts alors qu'en T.H.F., leur impédance tend vers zéro…).

3. Solution

1. a.

POINT COURS

Considérons le système source - quadripôle [ABCD] - charge.



En régime continu établi, le dipôle [AB] vu de la source est équivalent à une résistance appelée résistance d'entrée R_e. On a ainsi :

$$R_e = \frac{v_e}{i_e}.$$

Elle ne dépend pas de la source mais dépend du quadripôle Q et en général de la charge.

Pour un générateur de tension (E_0, R_0), le courant i_e sera d'autant moins sensible au « défaut » R_0 que la résistance d'entrée est grande ($R_e \gg R_0$).

En régime continu établi, les condensateurs ne se laissent pas traverser par un courant : ils sont alors équivalents à des coupe-circuit. Le montage devient :

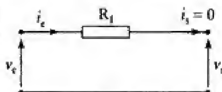
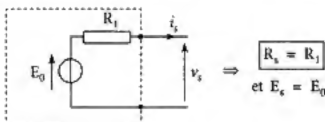


Fig. 1

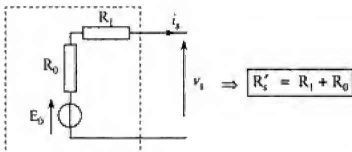
On a donc : $i_e = 0$ et $R_e = \frac{v_e}{i_e}$ est infinie.

Dans cette question, le générateur de tension continue est idéal (E_0), l'ensemble source-quadripôle se réduit alors à :



D'où $\boxed{R_s = R_1 = 10\ \text{k}\Omega}$

1. b. Le générateur de tension continue n'est plus idéal (E_0, R_0). La valeur de la résistance d'entrée n'en est pas modifiée (elle n'est pas liée à la source). Pour la résistance de sortie, le système source-quadripôle devient :

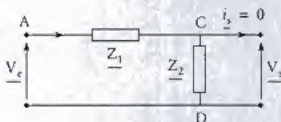


Mais $R_0 = 50\ \Omega$ et $R_1 = 10\ \text{k}\Omega$ soit $\boxed{R_s' = R_s = 10\ \text{k}\Omega}$

2. a.

Point méthode

Notons $\underline{Z}_1$ et $\underline{Z}_2$ les impédances des branches AC et CD. Le courant $\underline{i}_s$ étant nul, $\underline{Z}_1$ et $\underline{Z}_2$ constituent *un diviseur de tension*. On a donc :



$\dfrac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \dfrac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \dfrac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}$, où $\underline{Y}_1$ et $\underline{Y}_2$ sont les admittances complexes associées à $\underline{Z}_1$ et $\underline{Z}_2$ $\left(\underline{Y}_1 = \dfrac{1}{\underline{Z}_1} \text{ et } \underline{Y}_2 = \dfrac{1}{\underline{Z}_2}\right)$.

Ceci suppose que $\underline{i}_s = 0$ et donc que l'impédance d'entrée du système placé en aval de CD soit idéalement infinie ($|\underline{Z}_e| \gg \underline{Z}_2$ en pratique...).

Or $\quad \underline{Y}_2 = jC_2\omega \quad$ et $\quad \underline{Y}_1 = \dfrac{1}{R_1} + jC_1\omega = \dfrac{1}{R_1}(1 + jR_1C_1\omega)$

soit $\quad \underline{H} = \dfrac{1 + jR_1C_1\omega}{1 + jR_1C_1\omega + jR_1C_2\omega} \Rightarrow \underline{H} = \dfrac{1 + jR_1C_1\omega}{1 + jR_1(C_1 + C_2)\omega}$.

Posons alors $\quad \omega_1 = \dfrac{1}{R_1C_1} \quad$ et $\quad \omega_2 = \dfrac{1}{R_1(C_1 + C_2)} \quad (\omega_2 < \omega_1)$:

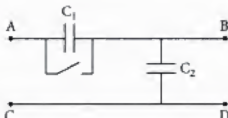
$$\boxed{\underline{H} = \frac{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_1}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_2}}}$$

Commentaires

• Pour ω tendant vers zéro on obtient $\underline{H} \to 1$, ce qui s'explique en considérant qu'à la limite les deux condensateurs constituent des coupe-circuit. On est alors ramené au circuit représenté à la figure 1. Dès lors $\underline{V}_e = \underline{V}_s$ et $\underline{H} = 1$. De plus $\varphi = 0$.

• Pour ω tendant vers l'« infini » (c'est-à-dire en fait pour $\omega \gg \omega_1 > \omega_2$) $\underline{H}$ devient équivalent, à la limite, à $\dfrac{\omega_2}{\omega_1}$, soit : $\underline{H} - \dfrac{C_1}{C_1 + C_2}$.

Cette fois-ci le circuit se réduit à :



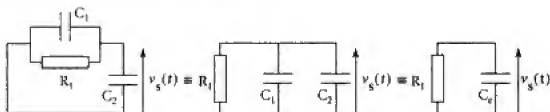
D'où : $\underline{H} = \dfrac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_2} + \underline{Z_1}} = \dfrac{\underline{Y_1}}{\underline{Y_2} + \underline{Y_1}} = \dfrac{jC_1\omega}{jC_2\omega + jC_1\omega}$ et $\underline{H} = \dfrac{C_1}{C_1 + C_2}$.

De même $\lim\limits_{\omega \to +\infty} \varphi = 0$.

• Les deux pulsations ω_1 et ω_2 intervenant dans la fonction de transfert 2. a. sont en fait celles des circuits : $[R_1 - C_1]$ d'une part ($\tau_1 = R_1C_1$ et $\omega_1 = \dfrac{1}{\tau} = \dfrac{1}{R_1C_1}$) et $[R_1 - (C_1 // C_2)]$ d'autre part ($\tau_2 = R_1(C_1 + C_2)$ et $\omega_2 = \dfrac{1}{\tau_2} = \dfrac{1}{R_1(C_1 + C_2)}$). Ceci peut se comprendre aisément en considérant l'équation différentielle associée au circuit proposé et en prenant en compte deux cas particuliers :

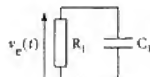
$$\underline{H} = \frac{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_1}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_2}} = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} \Rightarrow v_s + \tau_2\frac{dv_s}{dt} = v_e + \tau_1\frac{dv_e}{dt}.$$

Si l'on fait donc $v_e(t) = 0$, on a pour $v_s(t)$:



avec $C_e = C_1 + C_2$, d'où la constante de temps $\tau_2 = R_1C_e = R_1(C_1 + C_2)$.

De même, en faisant cette fois-ci $v_s(t) = 0$, nous obtenons pour $v_e(t)$:



il apparait ici la constante de temps $\tau_1 = R_1C_1$.

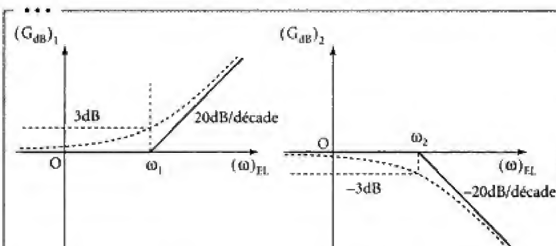
Point cours

La fonction de transfert $\underline{H} = \dfrac{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_1}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_2}}$ peut se réécrire :

$\underline{H} = \underline{H_1} \cdot \underline{H_2}$ avec $\underline{H_1} = 1 + j\dfrac{\omega}{\omega_1}$ et $\underline{H_2} = \dfrac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_1}}$.

$\underline{H_1}$ et $\underline{H_2}$ sont des fonctions de transfert du premier ordre dont les diagrammes asymptotiques sont donnés, pour G_{dB}, par (traits pleins) :

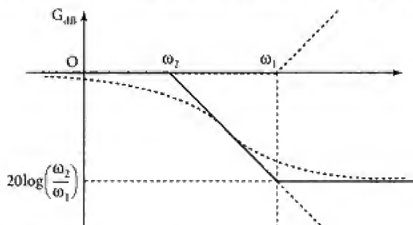
...



$\omega \ll \omega_1 : (G_{dB})_1 \to 0$; $\omega \ll \omega_2 : (G_{dB})_2 \to 0$.

$\omega \gg \omega_1 : (G_{dB})_1 \sim 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)$; $\omega \gg \omega_2 : (G_{dB})_2 \sim -20\log\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)$.

On peut ainsi obtenir un diagramme asymptotique de $G_{dB} = 20\log|\underline{H}|$ par simple « addition » des diagrammes précédents ; soit dans le cas où $\omega_2 < \omega_1$:



En effet : $\omega \ll \omega_2$ et ω_1 $\quad G_{dB} \to 0 + 0 = 0$

$\omega \gg \omega_2$ et ω_1 $\quad G_{dB} \to 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(\frac{\omega_2}{\omega}\right) = 20\log\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$.

■ Diagramme de Bode donnant $\log\omega \to G_{dB} = 20\log|\underline{H}|$

On a $$|\underline{H}| = \frac{\left|1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right|}{\left|1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right|} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}}.$$

D'où $$\boxed{G_{dB} = 10\log\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right) - 10\log\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right)}$$

– Pour $\omega \ll \omega_2 < \omega_1$: $G_{dB} \to 0$ $\left(G_{dB} \sim 10\omega^2\left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2}\right)\right)$.

– Pour $\omega \gg \omega_1 > \omega_2$: $G_{dB} = 10\log\left(\frac{1 + \frac{\omega^2}{\omega_1^2}}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_2^2}}\right) \sim 20\log\frac{\omega_2}{\omega_1} = G_0$.

– Pour $\omega = \omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2}$: $G_{dB} = 10\log\left(\frac{1 + \frac{\omega_2}{\omega_1}}{1 + \frac{\omega_1}{\omega_2}}\right) = 10\log\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{G_0}{2}$.

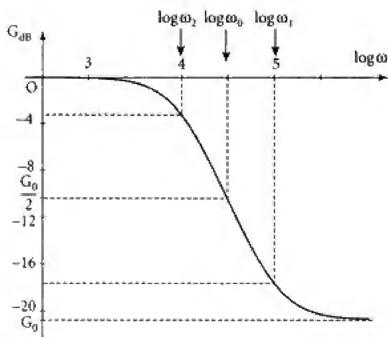
D'autre part, G est ici une fonction monotone décroissante de ω, d'où le graphe avec :

$\omega_1 = \frac{1}{10^4 \cdot 10^{-9}} = 10^5$ rad · s^{-1} → $\log\omega_1 = 5$ et $G_{dB}(\omega_1) = -17{,}85 \sim -17{,}9$

$\omega_2 = \frac{1}{10^4 \cdot 11 \cdot 10^{-9}} = 9{,}09 \cdot 10^3$ rad · s^{-1} → $\log\omega_2 = 3{,}96$ et $G_{dB}(\omega_2) = -2{,}97$

$\omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2}$ et $\log\omega_0 = \frac{1}{2}(\log\omega_1 + \log\omega_2) = 4{,}48$ et $G_{dB}(\omega_0) = -10{,}4$.

$G_0 = 20\log\frac{C_1}{C_1 + C_2} \to G_0 = -20{,}8$.



■ Diagramme de Bode donnant le déphasage φ de la tension de sortie sur la tension d'entrée : $\log\omega \to \varphi(\omega)$

POINT MÉTHODE

φ est complètement défini par la valeur de sa tangente et par le signe de $\cos\varphi$ ou de $\sin\varphi$.

On cherchera donc à déterminer l'expression de $\tan\varphi$ ainsi que l'intervalle auquel appartient φ.

On a $\underline{H} = |\underline{H}|e^{j\varphi}$ avec $\underline{H} = \dfrac{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_1}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_2}} = \dfrac{a_1 e^{j\theta_1}}{a_2 e^{j\theta_2}} = \dfrac{a_1}{a_2}e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$

où a_1 et a_2 sont les modules du numérateur et du dénominateur ($a_1 > 0$ et $a_2 > 0$).

On a donc $\varphi = \theta_1 - \theta_2$

$$\text{avec : } \begin{cases} \tan\theta_1 = \dfrac{\omega}{\omega_1} \quad \text{et} \quad \cos\theta_1 > 0 \to \theta_1 \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \\ \tan\theta_2 = \dfrac{\omega}{\omega_2} \quad \text{et} \quad \cos\theta_2 > 0 \to \theta_2 \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

D'autre part, $\omega_1 > \omega_2$ implique $\theta_2 > \theta_1$ et donc :

$\varphi < 0$ avec $-\dfrac{\pi}{2} < \varphi \leqslant 0$.

De plus, $\tan\varphi = \tan(\theta_1 - \theta_2) = \dfrac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2} = \dfrac{\dfrac{\omega}{\omega_1} - \dfrac{\omega}{\omega_2}}{1 + \dfrac{\omega^2}{\omega_1\omega_2}}$.

Posons $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}(\omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2}) \Rightarrow \tan\varphi = \dfrac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0}\dfrac{\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_2}\right)^2} = \dfrac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0}\dfrac{1}{x + \dfrac{1}{x}}$.

On constate alors que φ est invariant par le changement de x en $\dfrac{1}{x}$: $\varphi(x) = \varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

$\varphi(x) = F(\log x)$

Or $\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right) = F(-\log x)$

La fonction $X = \log x \to F(X)$ est donc paire et le graphe associé est symétrique par rapport à l'axe $X = 0$ (c'est-à-dire $\omega = \omega_0$).

Une étude rapide de la fonction $\varphi(\omega)$ donne :

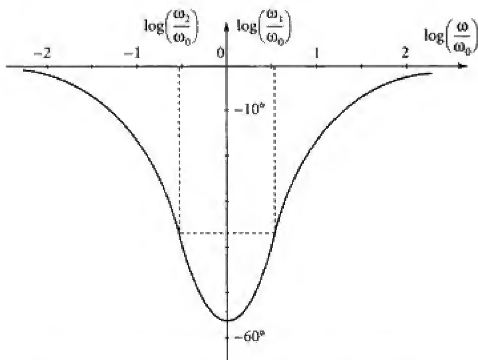
– pour $\omega \ll \omega_1$ et ω_2 : $\varphi \sim \dfrac{\omega}{\omega_1} - \dfrac{\omega}{\omega_2}$ et φ tend vers 0 en même temps que ω ;

– pour $\omega \gg \omega_1$ et ω_2 : θ_2 et $\theta_1 \to \frac{\pi}{2}$ et $\varphi \to 0$;

– pour $\omega = \omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2}$ (soit $x = 1$) : $\tan\varphi = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_0}$;

– de plus, φ est minimal pour $\omega = \omega_0$, la quantité $x + \frac{1}{x}$ étant minimale pour $x = 1$ (et $\omega_2 - \omega_1$ est négatif).

D'où le graphe $\log\frac{\omega}{\omega_0} \to \varphi(\omega)$ avec $\varphi(\omega_1) = -39{,}8°$, $\varphi(\omega_2) = -39{,}8°$ et $\varphi(\omega_0) = -56{,}4°$.



2. b. La résistance R_2 étant placée en parallèle avec C_2, l'admittance $\underline{Y}_2$ s'écrit :

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{R_2} + jC_2\omega = \frac{1}{R_2}(1 + jR_2C_2\omega).$$

La fonction de transfert devient :

$$\underline{H} = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} = \frac{\frac{1}{R_1}(1 + jR_1C_1\omega)}{\frac{1}{R_1}(1 + jR_1C_1\omega) + \frac{1}{R_2}(1 + jR_2C_2\omega)}$$

soit encore : $\underline{H} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\frac{1 + jR_1C_1\omega}{1 + j\frac{R_2R_1}{R_1 + R_2}(C_1 + C_2)\omega}$.

Posons : $H_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$, $\omega_1 = \frac{1}{R_1C_1}$ et $\omega_2' = \frac{1}{\frac{R_2R_1}{R_1 + R_2}(C_1 + C_2)}$

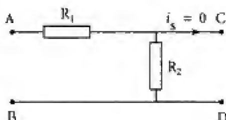
d'où

$$\underline{H} = H_0 \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2'}}$$

Commentaires

• À très basse fréquence ($\omega \ll \omega_1$ et ω_2'),

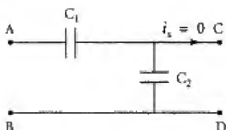
$\underline{H} \to H_0 = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$, les capacités se réduisent à des coupe-circuit et le circuit devient un simple diviseur de tension (ici formé des résistances R_1 et R_2).



• À très haute fréquence, le résultat est inchangé par rapport au **2. a.**, le circuit étant équivalent à un diviseur de tension capacitif.

Et :

$$\underline{H} \to \frac{C_1}{C_1 + C_2}.$$



• La fréquence « centrale » ω_0' s'écrit maintenant :

$$\omega_0' = \sqrt{\omega_1 \omega_2'} = \sqrt{\frac{1}{(R_1C_1)^2} \cdot \frac{1 + \frac{R_1}{R_2}}{1 + \frac{C_2}{C_1}}} = \frac{1}{R_1C_1}\sqrt{\frac{1 + \frac{R_1}{R_2}}{1 + \frac{C_2}{C_1}}}$$

(on a $\omega_0' = \omega_0\sqrt{1 + \frac{R_1}{R_2}}$).

Pour ce circuit, et pour les mêmes raisons que celles exposées dans le commentaire de la question **2. a.**, les pulsations ω_1 et ω_2' sont celles associées aux circuits $[R_1 - C_1]$ et $[(R_1 \,//\, R_2) - (C_1 \,//\, C_2)]$.

• D'où les différents diagrammes de Bode :

1er cas :

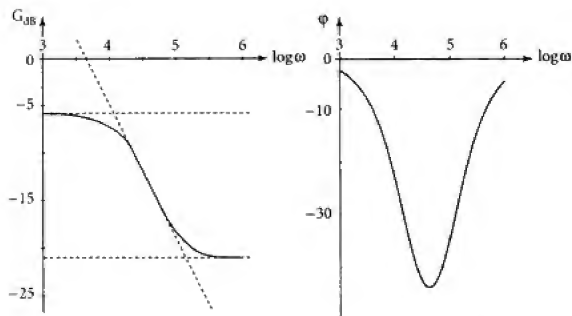
$\omega_1 = \omega_2'$ soit $R_1C_1 = R_1C_1\left(1 + \dfrac{C_2}{C_1}\right)\dfrac{1}{1 + \dfrac{R_1}{R_2}}$ ce qui exige $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{C_2}{C_1}$ et donc

$R_1C_1 = R_2C_2$. **Dans ce cas, la fonction de transfert est indépendante de la pulsation ω :**

$$\underline{H} = H_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \text{ et } G_{dB} = 20\log H_0 \,;\, \varphi = 0.$$

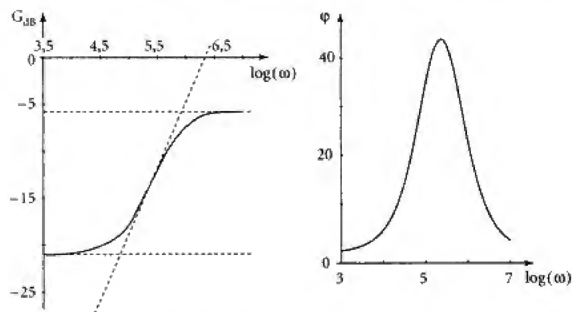
2ᵉ cas :

$R_1C_1 < R_2C_2$ et donc $\frac{R_1}{R_2} < \frac{C_2}{C_1}$ soit $\omega_2' < \omega_1$; les courbes sont de même nature que celles tracées au **2. a.** :



Ici, $R_1 = 10\ \text{k}\Omega$; $C_1 = 1\ \text{nF}$, $C_2 = 10\ \text{nF}$ et on a pris : $R_2 = R_1$. On a alors $\log\omega_0' = 4{,}63$.

3ᵉ cas : $R_1C_1 > R_2C_2$ soit $\omega_2' > \omega_2$ les courbes sont alors « inversées ». On obtient :



Ici, $C_1 = C_2 = 1\ \text{nF}$; $\frac{R_1}{R_2} = 10$ ($R_1 = 10\ \text{k}\Omega$ et $R_2 = 1\ \text{k}\Omega$) et $\log\omega_0' = 4{,}63$.

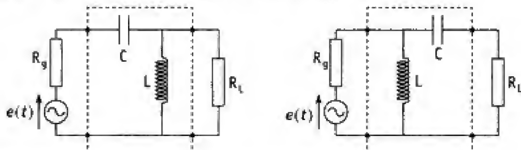
405 Adaptation d'impédance

1. Un générateur de tension sinusoïdale alternative de f.é.m. $e(t) = E\cos\omega t$ et d'impédance interne (*complexe*) $\underline{Z}$ alimente une impédance de charge $\underline{Z}'$.

À quelle(s) condition(s) sur $\underline{Z}'$ la puissance électrique reçue par la charge est-elle maximale ?

2. Le générateur précédent a maintenant une impédance interne réelle $\underline{Z} = R_g$ et doit alimenter une charge réelle R_L avec $R_L \neq R_g$.

Pour réaliser l'adaptation en puissance ci-dessus, on propose d'intercaler entre générateur et charge un module L-C selon l'un des montages suivants :



Quel montage faut-il adopter ? Quelles valeurs faut-il prendre pour L et C ?

1. Ce qu'il faut savoir

- Utilisation des amplitudes complexes.
- Puissance reçue par un dipôle.

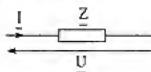
2. Ce qu'il faut comprendre

Déterminer les caractéristiques de l'impédance de charge qui permet de recevoir la puissance maximale d'un générateur donné consiste à « adapter » la charge au générateur.

3. Solution

1.

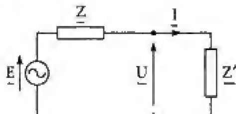
POINT COURS



La puissance moyenne reçue par un dipôle d'impédance complexe $\underline{Z}$, soumis à une tension sinusoïdale $u = U\cos\omega t$ et parcouru par un courant $i = I\cos(\omega t + \varphi)$ s'écrit :

$$P = \frac{1}{2}UI\cos\varphi = \frac{1}{2}I^2 \cdot \mathrm{Re}\{\underline{Z}\}.$$

En adoptant la notation en amplitudes complexes,



on a $\underline{U} = \underline{Z}' \cdot \underline{I}$

$\underline{U} = \underline{E} - \underline{Z}\,\underline{I}$.

Soit ici avec $\underline{E} = E$

$$\underline{I} = \frac{E}{\underline{Z} + \underline{Z}'}.$$

La puissance reçue par $\underline{Z}'$ est $P = \frac{1}{2} I^2 \cdot \mathrm{Re}\{\underline{Z}'\}$.

Soit en notant $\underline{Z} = R + jX$ et $\underline{Z}' = R' + jX'$:

$$P = \frac{1}{2}\frac{R'E^2}{|\underline{Z} + \underline{Z}'|^2} \qquad P = \frac{1}{2}\frac{R'E^2}{(R+R')^2 + (X+X')^2}.$$

P est une fonction des deux variables R' et X'.

Remarquons que pour obtenir la puissance maximale, X' pouvant être de signe quelconque, la première chose à faire est d'annuler le terme $(X + X')^2$, d'où $X' = -X$.

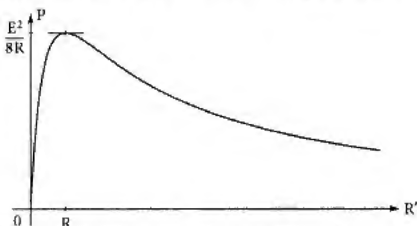
Il reste alors à chercher le maximum de la fonction $P(R') = \dfrac{R'E^2}{2(R+R')^2} = \dfrac{E^2}{2} f(R')$

soit en dérivant par rapport à R' :

$$f'(R') = \frac{1}{(R+R')^2} - \frac{2R'}{(R+R')^3}$$

$$f'(R') = \frac{1}{(R+R')^3}(R + R' - 2R').$$

Cette dérivée s'annule pour $R = R'$ et correspond bien à un maximum : la fonction f est positive, s'annule pour $R' = 0$ et $R' \to \infty$. D'où le graphe de $P(R')$:



On peut regrouper les deux conditions trouvées pour obtenir le maximum de P :

$$\left.\begin{aligned} X' &= -X \\ R' &= R \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \boxed{\underline{Z}' = \underline{Z}^*}$$

$\underline{Z}^*$ désignant l'impédance imaginaire conjuguée de $\underline{Z}$.

Dans ces conditions, on a « adapté » l'impédance au générateur.

2. Dans le cas d'impédances réelles, la condition précédente se réduit à : $R_L = R_g$. Cette condition n'est évidemment pas réalisée.

• Considérons l'impédance de charge $\underline{Z}'$ branchée aux bornes du générateur dans le cas du premier montage proposé : la puissance absorbée par ce dipôle est égale à la puissance consommée dans R_L, seul élément dissipatif du dipôle, la condition d'adaptation établie au 1. s'écrit donc ici : $R_g = \underline{Z}'$

avec $$R_g = \frac{1}{jC\omega} + \frac{1}{\dfrac{1}{jL\omega} + \dfrac{1}{R_L}}$$

soit $$R_g - \frac{1}{jC\omega} = \frac{jL\omega R_L}{R_L + jL\omega}$$

$$\left(R_g - \frac{1}{jC\omega}\right)(R_L + jL\omega) = jL\omega R_L$$

$$R_g R_L - \frac{L}{C} + j\left(L\omega R_g + \frac{R_L}{C\omega}\right) = jL\omega R_L$$

d'où les deux conditions :

$$\begin{cases} R_g R_L - \dfrac{L}{C} = 0 \\ L\omega R_g + \dfrac{R_L}{C\omega} = L\omega R_L \end{cases}$$

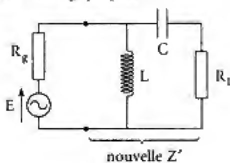
La seconde relation impose $LC\omega^2 = \dfrac{R_L}{R_L - R_g}$

ce qui n'est possible que si $R_L > R_g$.

Dans ce cas, avec $\dfrac{L}{C} = R_g R_L$, on obtient :

$$\boxed{L = \frac{R_L}{\omega}\sqrt{\frac{R_g}{R_L - R_g}} \qquad C = \frac{1}{\omega\sqrt{R_g(R_L - R_g)}}}$$ (si $R_L > R_g$).

• Il reste à étudier le second montage proposé :



On veut $\underline{Z'} = R_g$ ou $\underline{Y'} = \frac{1}{\underline{Z'}} = \frac{1}{R_g}$

soit :

$$\frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R_L + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{R_g}$$

$$\frac{jC\omega}{1 + jC\omega R_L} = \frac{1}{R_g} - \frac{1}{jL\omega}$$

$$\frac{jC\omega}{1 + jC\omega R_L} = \frac{jL\omega - R_g}{jL\omega R_g}$$

$$-LC\omega^2 R_g = (1 + jC\omega R_L)(jL\omega - R_g).$$

D'où les deux conditions :

$$\begin{cases} -LC\omega^2 R_g = -R_g - LC\omega^2 R_L \\ 0 = L\omega - C\omega R_L R_g \end{cases}$$

$$\begin{cases} LC\omega^2 = \dfrac{R_g}{R_g - R_L} \\ \dfrac{L}{C} = R_L R_g \end{cases}$$

Ceci n'est possible que si $R_g > R_L$ et dans ce cas :

$$\boxed{\begin{aligned} L &= \frac{R_g}{\omega}\sqrt{\frac{R_L}{R_g - R_L}} \\ C &= \frac{1}{\omega\sqrt{R_L(R_g - R_L)}} \end{aligned}} \quad (\text{si } R_g > R_L).$$

Les deux montages proposés permettent donc de trouver une solution dans tous les cas, le choix du montage dépendant des valeurs relatives de R_L et R_g.

Commentaire

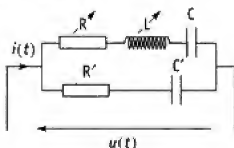
Ce problème d'adaptation d'impédance a une grande importance pratique dans le cas des émetteurs d'ondes radio :

l'adaptation correspond à la transmission d'un maximum de puissance à l'antenne, afin de rendre maximale la puissance rayonnée.

406 Deux branches en parallèle

Partie A

Le dipôle représenté ci-dessous est alimenté en régime permanent par une source de tension sinusoïdale $u(t) = U_0 \cos \omega t$.



1. On prend $R = R'$ dans cette question, les valeurs de C, C′, R′, U_0 et ω étant imposées.

a. Pour quelle(s) valeur(s) de L les deux branches du circuit absorbent-elles la même puissance électrique ?

b. Retrouver les résultats précédents à partir d'une représentation de Fresnel.

2. Reprendre les questions du **1.** dans le cas où R est différente de R′.

On posera $R_0 = R'\left(1 + \dfrac{1}{R'^2C'^2\omega^2}\right)$.

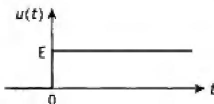
Partie B

On supprime la capacité de la branche supérieure.

1. À quelle(s) condition(s) portant sur R, R′, L et C′ l'impédance complexe du dipôle est-elle indépendante de ω ?

2. Le condensateur C′ n'étant pas chargé pour $t < 0$, on applique au dipôle un échelon de tension d'amplitude E.

Déterminer le courant $i(t)$ traversant le dipôle. À quelles conditions ce courant est-il constant pour $t > 0$?



3. Commenter les résultats obtenus aux **B.1.** et **B.2.**

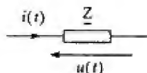
1. Solution

Partie A

1. a. La puissance moyenne P absorbée par un dipôle d'impédance complexe $\underline{Z}$ s'exprime par :

$$P = \frac{1}{2} U_0 I \cos\phi$$

avec : $\underline{u} = \underline{Z}\underline{i}$



soit encore : $U_0 = \underline{Z}Ie^{j\phi}$.

Posons $\underline{Z} = A + jX$ et donc $|\underline{Z}| = Z = \sqrt{A^2 + X^2}$:

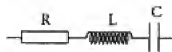
$$Ie^{j\phi} = \frac{U_0}{\underline{Z}} = \frac{U_0}{Z^2}\underline{Z}^*$$

$$\text{et} \quad I\cos\phi = \text{Re}\left\{\frac{U_0}{Z^2}\underline{Z}^*\right\} = \frac{U_0}{Z^2}\text{Re}(\underline{Z}^*) = \frac{U_0}{Z^2}A.$$

Finalement : $P = \frac{1}{2}\frac{U_0^2}{Z^2}A$

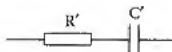
soit pour chaque branche :

• $\underline{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$



d'où : $A = R$ et $Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$.

• $\underline{Z}' = R' - j\frac{1}{C'\omega}$



d'où : $A' = R'$ et $Z' = \sqrt{R'^2 + \frac{1}{C'^2\omega^2}}$.

D'où $P = \frac{1}{2}U_0^2\frac{R}{Z^2}$ et $P' = \frac{1}{2}U_0^2\frac{R'}{Z'^2} = \frac{1}{2}U_0^2\frac{R}{Z'^2}$ puisque dans cette question, on a $R' = R$.

On aura $P = P'$ (même puissance absorbée dans les deux branches) pour $Z = Z'$ soit :

$$R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 = R^2 + \frac{1}{C'^2\omega^2}$$

ce qui donne : $L\omega - \frac{1}{C\omega} = \pm\frac{1}{C'\omega}$.

Une première solution correspond à $\boxed{L = \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C'}\right)\frac{1}{\omega^2}}$

Il en existe une seconde pour $C < C'$:

$$\boxed{L = \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{C'}\right)\frac{1}{\omega^2}}$$

1. b. On peut également exprimer la puissance P selon :

$$P = \frac{1}{2}\text{Re}(\underline{Z})I^2 = \frac{1}{2}RI^2.$$

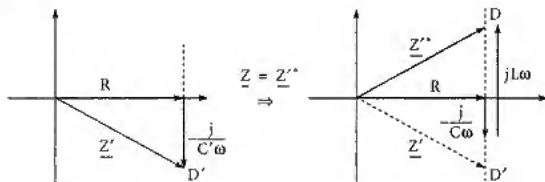
Or $\underline{u} = \underline{Z}\,\underline{i}$ donne $\underline{U}_0 = \underline{Z}\,\underline{I}$ ($\underline{i} = \underline{I}e^{j\omega t}$)

d'où $U_0 = ZI$ et $P = \frac{1}{2}R\frac{U_0^2}{Z^2}$

$P = P'$ avec $R = R'$ se traduit donc par $Z' = Z$.

Et $Z' = Z$ avec $R = R' \Rightarrow \underline{Z} = \underline{Z}'^*$ (conjugué de $\underline{Z}'$) ou $\underline{Z} = \underline{Z}'$ soit en représentation de Fresnel :

■ 1er cas

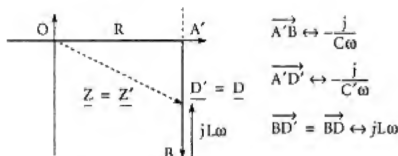


Cas toujours possible

On doit avoir dans ce cas (points D et D' symétriques) : $L\omega - \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{C'\omega}$

d'où : $L\omega = \frac{1}{C'\omega} + \frac{1}{C\omega}$ soit $\boxed{L = \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{1}{C'} + \frac{1}{C}\right)}$

■ 2e cas



$\overrightarrow{A'B} \leftrightarrow -\frac{j}{C\omega}$

$\overrightarrow{A'D'} \leftrightarrow -\frac{j}{C'\omega}$

$\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BD} \leftrightarrow jL\omega$

Cette dernière configuration n'est possible que pour $A'B > A'C$ soit $\frac{1}{C\omega} > \frac{1}{C'\omega}$, c'est-à-dire pour $C < C'$. Dès lors, il vient :

$$L\omega = \frac{1}{C\omega} - \frac{1}{C'\omega} \Rightarrow \boxed{L = \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{C'}\right)\frac{1}{\omega^2}}$$

2. On a maintenant $R' \neq R$, et la relation $P = P'$ s'écrit alors :

$$\frac{R}{Z^2} = \frac{R'}{Z'^2}, \text{ soit } Z'^2 = \frac{R'}{R}Z^2.$$

Soit encore :

$$R'^2 + \frac{1}{C'^2\omega^2} = \frac{R'}{R}\left[R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2\right], \text{ et } \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 = RR' - R^2 + \frac{R}{R'C'^2\omega^2}$$

ce qui n'est possible que pour : $RR' - R^2 + \frac{R}{R'C'^2\omega^2} \geq 0$

c'est-à-dire pour : $R \leq R'.\left(1 + \frac{1}{R'^2C'^2\omega^2}\right)$.

Posons $R_0 = R'.\left(1 + \frac{1}{R'^2C'^2\omega^2}\right) \Rightarrow R \leq R_0$.

On obtient alors :

$$\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 = R(R_0 - R)$$

ce qui donne :

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = \sqrt{R(R_0 - R)} \Rightarrow \boxed{L = \frac{1}{C\omega^2} + \frac{\sqrt{R(R_0 - R)}}{\omega}}$$

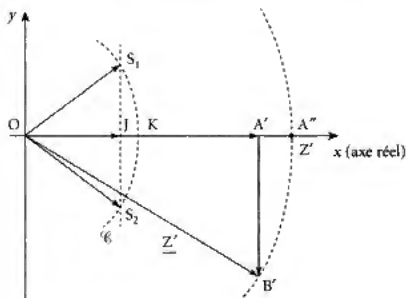
et $\quad L\omega - \frac{1}{C\omega} = -\sqrt{R(R_0 - R)}$ pour $\frac{1}{C} > \sqrt{R(R_0 - R)}\omega$

soit $$\boxed{L = \frac{1}{C\omega^2} - \frac{\sqrt{R(R_0 - R)}}{\omega}}$$

Il y a là encore (pour $R \leq R_0$) une ou deux valeurs de L satisfaisant à la condition imposée.

■ **À l'aide de la représentation de Fresnel :**

on a ici $R' \neq R$ et $Z' = \sqrt{\frac{R'}{R}}Z$. Pour illustrer le propos, supposons $R' > R$.



On a $OA' = R'$ et $A'B' = \frac{1}{C'\omega}$. On trace alors le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon $OK = Z = \sqrt{\frac{R}{R'}}Z' < (Z' = OA'')$. L'impédance $\underline{Z}$ est représentée par un vecteur $\overrightarrow{OS}$ dont l'extrémité S doit se situer sur ce cercle avec :

$$\underline{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right),\ \text{soit}\ \overrightarrow{OS}\cdot\vec{i} = R = OJ.$$

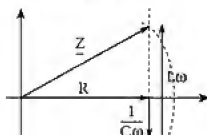
Le problème n'est possible que pour $OJ \leqslant OK\ (R \leqslant Z)$, soit pour :

$$R^2 \leqslant \frac{R}{R'}Z'^2 \Rightarrow R \leqslant \left[\frac{1}{R'}\left(R'^2 + \frac{1}{C'^2\omega^2}\right) = R_0\right].$$

On retrouve la condition $R \leqslant R_0$.

Dans ce cas $(R \leqslant R_0)$, il existe *a priori* deux solutions (points S_1 et S_2).

• La solution associée à S_1 est toujours possible, elle correspond à :



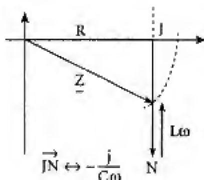
$$L\omega = \frac{1}{C\omega} + \sqrt{Z^2 - R^2}$$

soit $L\omega = \frac{1}{C\omega} + \sqrt{\frac{R}{R'}\left(R'^2 + \frac{1}{C'^2\omega^2}\right) - R^2}$

et

$$L\omega = \frac{1}{C\omega} + \sqrt{RR_0 - R^2} \Rightarrow \boxed{L = \frac{1}{C\omega^2} + \frac{\sqrt{R(R_0 - R)}}{\omega}}$$

• La seconde solution (point S_2) n'est envisageable que pour :



$$\frac{1}{C\omega} > \sqrt{Z^2 - R^2} \Rightarrow \frac{1}{C\omega} > \sqrt{RR_0 - R^2}.$$

On a alors :

$$L\omega = \frac{1}{C\omega} - \sqrt{Z^2 - R^2}$$

soit $\boxed{L = \frac{1}{C\omega^2} - \frac{\sqrt{R(R_0 - R)}}{\omega}}$

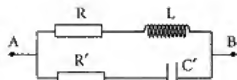
Commentaire

Notons que, dans le cas où $R \neq R'$, les arguments de $\underline{Z}$ et $\underline{Z}'$ ne sont pas plus égaux ou opposés, et qu'il existe un cas particulier $(Z = R)$ pour lequel $\underline{Z}$ est réel, alors que $\underline{Z}'$ ne l'est pas. On a alors :

$$Z = R = R_0 = R'\left(1 + \frac{1}{(R'C'\omega)^2}\right)$$

et $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$, soit $LC\omega^2 = 1$.

Partie B



1. Lorsque l'impédance complexe $\underline{Z}$ du dipôle [AB] est indépendante de la pulsation ω, il en est de même de son admittance complexe $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$.

Or $\underline{Y} = \underline{Y}_{RL} + \underline{Y}_{R'C'}$ (association en parallèle) et $\underline{Y}_{RL} = \frac{1}{R + jL\omega} = \frac{1}{R\left(1 + j\frac{L\omega}{R}\right)}$.

De même $\underline{Y}_{R'C'} = \frac{1}{R' + \frac{1}{jC'\omega}} = \frac{jC'\omega R'}{R'(1 + jR'C'\omega)}$.

Posons $\tau = \frac{L}{R}$ et $\tau' = R'C'$, il vient :

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{1 + j\omega\tau} + \frac{1}{R'} \cdot \frac{j\omega\tau'}{1 + j\omega\tau'}$$

soit encore :

$$\boxed{\underline{Y} = \frac{1}{R'} + \left\{\frac{1}{R} \cdot \frac{1}{1 + j\omega\tau} - \frac{1}{R'} \cdot \frac{1}{1 + j\omega\tau'}\right\}}$$

On a alors $\underline{Y}(0) = \frac{1}{R}$ et $\lim_{\infty} \underline{Y} = \frac{1}{R'}$. Une condition nécessaire est donc $R = R'$; $\underline{Y}$ devient alors :

$$\underline{Y} = \frac{1}{R}\left\{1 + \frac{1}{1 + j\omega\tau} - \frac{1}{1 + j\omega\tau'}\right\}.$$

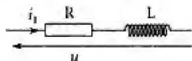
Cette nouvelle expression est indépendante de ω pour $\tau = \tau'$.

Les conditions cherchées sont :

$$R = R' \text{ et } \tau = \tau' \Rightarrow \underline{Y}(\omega) = \frac{1}{R} \text{ et } \underline{Z}(\omega) = R.$$

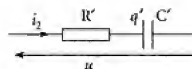
Il faut donc que : $\boxed{R' = R \text{ et } L = R^2C'}$

2. On soumet le dipôle AB à un échelon de tension d'amplitude E. Pour $t > 0$, les équations des branches sont :



$$E = Ri_1 + L\frac{di_1}{dt} \quad (1)$$

$$E = R'i_2 + \frac{q'}{C'}$$



soit avec $i_2 = \frac{dq'}{dt}$; $0 = C'R'\frac{di_2}{dt} + i_2 \quad (2)$

Intégrons ces deux équations :

(1) donne : $i_1(t) = \frac{E}{R} + \lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$ (où $\tau = \frac{L}{R}$)

or $i_1(0^+) = 0$ (continuité du courant dans l'inductance) $\Rightarrow i_1(t) = \frac{E}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

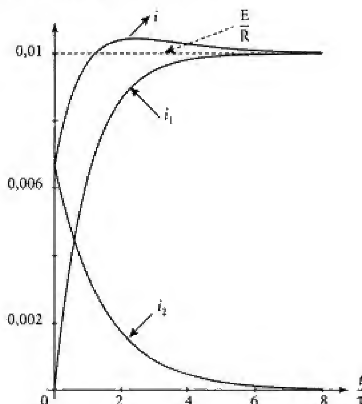
(2) fournit : $i_2(t) = \mu e^{-\frac{t}{\tau'}}$ (où $\tau' = R'C'$)

or $u(0^+) = E = R' i_2(0^+) + \frac{q'(0^+)}{C'} = R' i_2(0^+)$ (continuité de la charge du condensateur) $\Rightarrow i_2(t) = \frac{E}{R'} e^{-\frac{t}{\tau'}}$.

D'où, avec $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$:

$$i(t) = \frac{E}{R} + \left\{\frac{E}{R'} e^{-\frac{t}{\tau'}} - \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}\right\}$$

On a représenté ci-dessous les courbes donnant $\frac{t}{\tau} \to i_1,\ i_2,\ i$ et $\frac{E}{R} = \frac{u(t > 0)}{R}$ pour $R = 1\,000\ \Omega$; $R' = 1\,500\ \Omega$ et $\tau' = 1{,}5\tau$.



Le courant $i(t)$ est constant pour $t > 0$ et vaut $\frac{E}{R}$ si les deux termes où figurent les exponentielles s'annulent, ce qui se produit dès que :

$$R' = R \ \text{ et } \ \tau' = \tau$$

On retrouve les conditions établies au B.1.

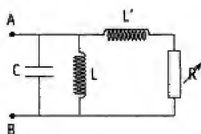
3. Les résultats obtenus au B.1. et B.2. sont identiques. Ces deux approches permettent de conclure, les conditions $R' = R$ et $L = R^2C'$ étant réalisées, à la proportionnalité entre la tension imposée $u(t)$ et le courant $i(t)$ que doit débiter le générateur de tension délivrant $u(t)$, à savoir :

$$i(t) = \frac{1}{R}u(t).$$

Ceci n'a rien d'étonnant si on se rappelle que l'on peut « toujours » décomposer un signal temporel $u(t)$ en une somme continue de composantes sinusoïdales. Si l'on obtient ainsi une même relation de proportionnalité entre les composantes sinusoïdales de $i(t)$ et $u(t)$, il en sera évidemment de même pour ces deux grandeurs (à rapprocher de la relation étroite associant fonction de transfert et équation différentielle...).

407 Puissance consommée

1. Le dipôle AB représenté sur la figure ci-contre est alimenté par un générateur **idéal** de tension sinusoïdale de fréquence 50 Hz et de valeur efficace $U_e = 220$V. R est une résistance variable.



a. Déterminer la puissance moyenne P (puissance active) absorbée par le circuit.

b. On constate que cette puissance P fournie par le générateur est maximale pour une valeur $R_1 = 25\ \Omega$ de R. En déduire les valeurs de L' et de la puissance maximale P_m effectivement consommée.

c. Pour une valeur R_2 de R ($R_2 > R_1$), le facteur de puissance du circuit devient égal à l'unité, et la puissance consommée est de 500 W.

Donner les valeurs de la capacité C et de R_2 sachant que $L = 1$ H.

2. Le dipôle AB est désormais alimenté par un générateur parfait de courant sinusoïdal de valeur efficace I_e et de pulsation ω.

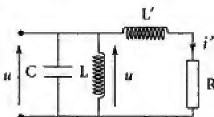
Déterminer la puissance P consommée dans le circuit, et tracer la courbe donnant $\frac{P(\omega)}{P(\omega_0)}$ en fonction de $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ à R, L, L', C fixés. On prendra les valeurs de L' et C déterminées plus haut ainsi que $R = R_2$.

Commenter le résultat obtenu.

On posera $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$.

Solution

1. a. La puissance moyenne fournie par le générateur est celle qui est consommée dans l'élément dissipatif constitué par la résistance R.



Or la tension U s'applique directement au dipôle L'-R. Il reste donc à calculer la valeur efficace du courant traversant R (la capacité C et l'inductance L ne jouent aucun rôle quant à la détermination de cette puissance).

Désignons par $i'(t)$ le courant parcourant la branche L'-R. On a :

$$P = \langle Ri'^2(t)\rangle = R\langle i'^2\rangle \quad \text{avec} \quad \langle i'\rangle^2 = \frac{1}{T}\int_{t'=0}^{t'=T} i'^2(t')\,dt' = I_e'^2$$

d'où $P = RI_e'^2$

I_e' = intensité efficace.

Or $\underline{u} = \underline{Z'}\,\underline{i'}$ en notation complexe où $\underline{Z'} = R + jL'\omega$.

Soit $U_e = Z'I_e'$ (Z' : module de $\underline{Z'}$)

et $I_e' = \dfrac{U_e}{\sqrt{R^2 + L'^2\omega^2}} \Rightarrow \boxed{P = U_e^2\dfrac{R}{R^2 + L'^2\omega^2}}$ (1)

1. b. Cette puissance se réécrit : $P = \dfrac{U_e^2}{\left(R + \dfrac{L'^2\omega^2}{R}\right)} = \dfrac{U_e^2}{f(R)}$.

L'expression au dénominateur est minimale pour $R = L'\omega$ ($f(R)$ tend vers l'infini pour $R = 0$ et R infini, et $\dfrac{df}{dR} = 1 - \dfrac{L'^2\omega^2}{R^2}$).

On a donc : $R_1 = L'\omega$ et $P_m = \dfrac{U_e^2}{2R_1}$.

Application numérique :

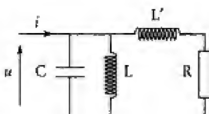
$L' = \dfrac{25}{2\pi \cdot 50} \Rightarrow L' = 80$ mH

$P_m = \dfrac{(220)^2}{2 \cdot 25} \Rightarrow$ **$P_m = 968$ W.**

1. c. Si l'on désigne par $i(t)$ le courant débité par le générateur :

$u(t) = U_e\sqrt{2}\cos\omega t$

$i(t) = I_e\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$.



La puissance consommée dans le circuit peut s'écrire :

$$P = I_e U_e \cos\varphi \quad \text{où} \quad \cos\varphi \text{ est le facteur de puissance.}$$

Commentaire

Le facteur de puissance est lié au déphasage du courant délivré par le générateur sur la tension à ses bornes. Ce déphasage φ dépendra de L′ et R mais aussi de L et C.

Le facteur de puissance prend la valeur unité pour $\varphi = 0$, c'est-à-dire lorsque le courant $i(t)$ est en phase avec la tension $u(t)$.

Or $\underline{I} = \underline{Y}\,\underline{U}$ ($\underline{Y}$ admittance du circuit).

La condition cherchée se traduit alors par :

$$\mathrm{Im}(Y) = 0 \quad (\mathrm{Im} = \text{partie imaginaire})$$

Le circuit étant constitué de trois branches en parallèle, nous avons : $\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3$ avec :

$$\underline{Y}_1 = jC\omega,\ \underline{Y}_2 = \frac{1}{jL\omega} \text{ et } \underline{Y}_3 = \frac{1}{R + jL'\omega}.$$

D'où :

$$\underline{Y} = j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right) + \frac{1}{R + jL'\omega}.$$

Soit encore :

$$\underline{Y} = j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right) + \frac{R - jL'\omega}{R^2 + L'^2\omega^2}$$

et

$$\mathrm{Im}(\underline{Y}) = C\omega - \frac{1}{L\omega} - \frac{L'\omega}{R^2 + L'^2\omega^2}.$$

Il faut donc que $\mathrm{Im}(\underline{Y}) = 0$, c'est-à-dire : $C = \dfrac{1}{L\omega^2} + \dfrac{L'}{R^2 + L'^2\omega^2}$

d'où : $\boxed{C = \dfrac{1}{L\omega^2} + \dfrac{R_1}{(R_2^2 + R_1^2)\omega}}$ (2) ($R = R_2$ d'après l'énoncé, et $L'\omega = R_1$).

La valeur de R_2 se déduit de celle de la puissance consommée :

$$P = 500\ \mathrm{W} = U_e^2\frac{R_2}{R_2^2 + R_1^2} \quad (\textit{cf.}\ 1.\ a.\ \text{avec } L'\omega = R_1).$$

D'où :

$$R_2^2 - \left(\frac{U_e^2}{P}\right)R_2 + R_1^2 = 0$$

et

$$\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 - \left(\frac{U_e^2}{PR_1}\right)\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + 1 = 0.$$

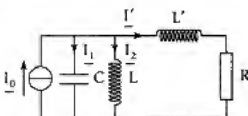
Cette équation admet deux solutions p_1 et p_2 par rapport à la variable $\dfrac{R_2}{R_1}$ avec $p_2p_1 = 1$ et $p_2 + p_1 = \dfrac{U_e^2}{PR_1}$. Ces racines sont donc positives, l'une est inférieure à 1 et l'autre supérieure à 1. Le texte impose $R_2 > R_1$. On a alors :

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{2}\left[\frac{U_e^2}{PR_1} + \sqrt{\left(\frac{U_e^2}{PR_1}\right)^2 - 4}\right].$$

Application numérique : $\frac{R_2}{R_1} = 3{,}59$ d'où : $R_2 = 90\ \Omega$.

On en déduit d'après (2) : $C = 19{,}3\ \mu F$.

2. Les trois branches (C, L et L'-R) constituent un **diviseur de courant.**
On a alors :



$$\underline{I}' = \frac{\underline{Y}'}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}'}\underline{I}_0$$

avec $\underline{Y}_1 = jC\omega$, $\underline{Y}_2 = \frac{1}{jL\omega}$ et $\underline{Y}' = \frac{1}{jL'\omega + R}$.

Soit encore : $\underline{I}' = \frac{1}{1 + \underline{Z}'(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2)}\underline{I}_0$

et $$\underline{I}' = \frac{1}{1 + j(R + jL'\omega)\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}\underline{I}_0 \quad (3)$$

La puissance consommée dans le circuit, donc dans R, s'écrit :

$$P = \frac{1}{2}R\langle i'^2(t)\rangle = RI_e'^2.$$

Or d'après (3) et I_e désignant la valeur efficace du courant débité par le générateur ($\underline{I}_0 = I_e\sqrt{2}$),

$$I_e' = I_e\frac{1}{\left|\left(1 - L'\omega\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)\right) + jR\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)\right|}$$

et $$P = \frac{RI_e^2}{\left(1 - L'\omega\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)\right)^2 + R^2\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}.$$

Soit encore $$P = \frac{RI_e^2}{\left\{1 + \frac{L'}{L}(1 - LC\omega^2)\right\}^2 + \frac{R^2}{L^2\omega^2}(1 - LC\omega^2)^2}$$

et en posant $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$ (Q représente le facteur de qualité du circuit {R // L // C}) :

$$P = \frac{RI_e^2}{\left\{1 + \frac{L'}{L}(1 - x^2)\right\}^2 + \frac{Q^2}{x^2}(1 - x^2)^2}.$$

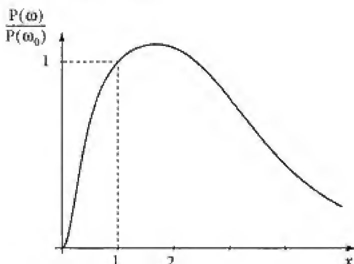
Pour $\omega = \omega_0$ il vient $P(\omega_0) = P(x = 1) = RI_e^2$

d'où
$$\frac{P(\omega)}{P(\omega_0)} = \frac{x^2}{\left\{x\left[1+\frac{L'}{L}(1-x^2)\right]\right\}^2 + Q^2(1-x^2)^2}$$

Avec les valeurs $L' = 8\cdot 10^{-2}$ H ; $C = 19{,}3$ µF ; $L = 1$ H ; $R = 90\ \Omega$,

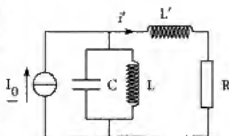
nous avons : $\frac{L'}{L} = 8\cdot 10^{-2}$ et $Q = 90\sqrt{\frac{19{,}3\cdot 10^{-6}}{1}} \# 0{,}4$.

D'où la courbe tracée pour $0 \leq x \leq 5$:



Commentaires

• On remarque que cette puissance tend vers une valeur nulle à très basse fréquence ($\omega \to 0$) où à très haute fréquence ($\omega \to \infty$). Ceci s'explique aisément si l'on prend en compte le circuit bouchon (C // L) placé en parallèle avec la branche L′-R.



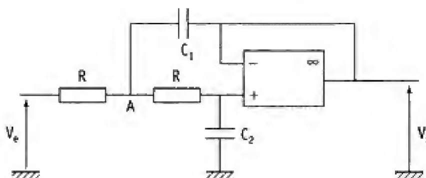
En effet, en T.B.F., l'inductance L joue le rôle de court-circuit, et le courant source I_0 passe « entièrement » dans L, ce qui implique que i' devient nul et P tend bien vers zéro. De même, en T.H.F., c'est la capacité C qui joue le rôle de court-circuit : la conclusion est la même.

• Pour la pulsation caractéristique du circuit bouchon, c'est-à-dire pour $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, tout le courant va passer dans la branche L′-R (l'impédance de l'ensemble L //C devenant infinie). Dès lors, on a :
$$P = RI_e'^2 = RI_e^2 = P(\omega_0).$$

B. Filtres actifs et autres circuits avec amplificateur opérationnel

411 Filtre de Butterworth

On étudie le circuit ci-dessous, dans lequel l'amplificateur opérationnel est supposé idéal :



1. Montrer que la fonction de transfert de ce circuit peut s'écrire :

$$\underline{H} = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = \frac{1}{1 + 2jRC_2\omega - R^2C_1C_2\omega^2}.$$

En introduisant la pulsation caractéristique $\omega_c = \frac{1}{R\sqrt{C_1C_2}}$ et $x = \frac{\omega}{\omega_c}$, mettre $\underline{H}$ sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + 2j\alpha x - x^2}$$

et donner l'expression de α.

2. On étudie $G_{dB} = 20\log|\underline{H}|$; étudier – en fonction de α – le comportement de G_{dB} en fonction de $\log x$. Préciser la nature du circuit.

Donner l'allure des courbes représentatives (diagramme de Bode en amplitude).

3. Dans le cas particulier où $\frac{dG_{dB}}{dx} = 0$ admet $x = 0$ comme solution triple, déterminer :

– la valeur de $\frac{C_1}{C_2}$ correspondante, et l'expression simplifiée de $G_{dB}(x)$;

– la fréquence de coupure de filtre obtenue.

On obtient alors un filtre dit « de Butterworth ».

1. Ce qu'il faut savoir

- Propriétés de l'AO idéal.
- Fonction de transfert.
- Loi des nœuds en termes de potentiels : théorème de Millmann.

2. Ce qu'il faut comprendre

- L'application judicieuse de la loi des nœuds (exprimée en termes de potentiels) et l'hypothèse du fonctionnement linéaire de l'AO (avec $\varepsilon = 0$) – nécessaire à la définition de la fonction de transfert – suffisent pour éliminer les potentiels $\underline{V^-}$, $\underline{V^+}$ et $\underline{V_A}$ (en amplitudes complexes évidemment).
- Pour G_{dB}, on étudie d'abord le comportement asymptotique. Le calcul – ultérieur – de la dérivée de G_{dB} en fonction de $\log x$ se ramène au calcul de $\frac{dG_{dB}}{dx}$, et même à celui de $\frac{dG}{dx}$...

3. Solution

1. Écrivons le potentiel $\underline{V_A}$ (en amplitudes complexes) du nœud A en fonction des potentiels des nœuds voisins (théorème de Millmann) :

$$\underline{V_A} = \frac{\frac{\underline{V_e}}{R} + \frac{\underline{V^+}}{R} + jC_1\omega\underline{V_s}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + jC_1\omega} = \frac{\underline{V_e} + \underline{V^+} + jRC_1\omega\underline{V_s}}{2 + jRC_1\omega}.$$

D'autre part, l'AO est idéal (courants d'entrée nuls) et (pont diviseur de tension) :

$$\underline{V^+} = \frac{\frac{1}{jC_2\omega}}{R + \frac{1}{jC_2\omega}}\underline{V_A} = \frac{1}{1 + jRC_2\omega}\underline{V_A}.$$

En régime linéaire (ce que suppose l'existence de la fonction de transfert) :

$$\underline{V^+} = \underline{V^-}, \text{ avec ici } \underline{V^-} = \underline{V_s}.$$

Écrivons alors l'égalité des deux expressions de $\underline{V_A}$, en tenant compte des deux égalités ci-dessus :

$$\underline{V_A} = (1 + jRC_2\omega)\underline{V_s} = \frac{\underline{V_e} + \underline{V_s} + jRC_1\omega\underline{V_s}}{2 + jRC_1\omega};$$

$$(1 + jRC_2\omega)(2 + jRC_1\omega)\underline{V_s} = \underline{V_e} + (1 + jRC_1\omega)\underline{V_s};$$

$$[(1 + jRC_2\omega)(2 + jRC_1\omega) - (1 + jRC_1\omega)]\underline{V_s} = \underline{V_e};$$

d'où :

$$\underline{H} = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = \frac{1}{(1 + jRC_2\omega)(2 + jRC_1\omega) - (1 + jRC_1\omega)};$$

en effectuant les produits et simplifiant, on obtient bien :

$$\boxed{\underline{H} = \frac{1}{1 + 2jRC_2\omega - R^2C_1C_2\omega^2}}$$

En introduisant $\omega_c = \dfrac{1}{R\sqrt{C_1C_2}}$, il vient :

$$R^2C_1C_2\omega^2 = \frac{\omega^2}{\omega_c^2} = x^2;$$

et

$$RC_2\omega = \frac{RC_2}{R\sqrt{C_1C_2}} \cdot \frac{\omega}{\omega_c} = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \cdot x$$

soit :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + 2j\alpha x - x^2} \quad \text{avec} \quad \boxed{\alpha = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}}$$

2. Exprimons G_{dB} :

$$G_{dB} = 20\log|\underline{H}| = 10\log|\underline{H}|^2;$$

$$G_{dB} = -10\log[(1 - x^2)^2 + 4\alpha^2x^2].$$

Pour $x \to 0$, $G_{dB} \to 0$ et pour $x \to +\infty$, $G_{dB} \sim -10\log x^4 = -40\log x$, ce qui correspond à une asymptote (pour la courbe G_{dB} en fonction de $\log x$) de pente – 40 dB/décade :

la structure du circuit proposé est celle d'un filtre passe-bas du second ordre.

Les deux asymptotes se coupant en $x = 1$, valeur pour laquelle,

$$G_{dB}(x = 1) = -10\log(4\alpha^2) = -20\log(2\alpha).$$

Pour connaitre le comportement de G_{dB} autour de $x = 1$, il faut déterminer le signe de sa dérivée, ou encore, la fonction logarithme étant monotone croissante, le signe de $\dfrac{dG_{dB}}{dx}$.

Or $$\frac{dG_{dB}}{dx} = -10\frac{d\log D}{dx} = -\frac{10}{D}\frac{dD}{dx};$$

avec $D = (1 - x^2)^2 + 4\alpha^2x^2$;

d'où $$\frac{dD}{dx} = 2(1 - x^2)(-2x) + 8\alpha^2x;$$

$$\frac{dD}{dx} = 4x(x^2 - 1 + 2\alpha^2)$$

$$\text{et} \qquad \frac{dD}{dx} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = \sqrt{1-2\alpha^2} \end{cases} \quad \text{si } \alpha^2 < \frac{1}{2}.$$

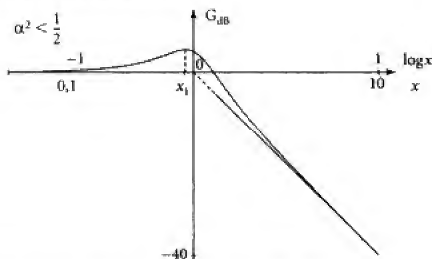
D'où deux cas à envisager :

• $\alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$, soit $\frac{C_2}{C_1} < \frac{1}{2}$:

$\frac{dD}{dx}$ s'annule pour $x = 0$ et pour $x = \sqrt{1-2\alpha^2} = x_1$ (x est toujours > 0) et est négative entre ces deux valeurs, positive pour $x > x_1$.

Du fait du signe – dans l'expression de $\frac{dG_{dB}}{dx}$, G_{dB} est donc croissante de $x = 0$ à $x = x_1$, puis décroissante pour $x > x_1$ (ce qui est cohérent avec le comportement asymptotique de G_{dB}).

On peut donc donner l'allure des courbes :



Le maximum de G_{dB} (pour $x = x_1$) est facilement calculable :

$$G_{dB}(x = x_1) = -10\log D$$

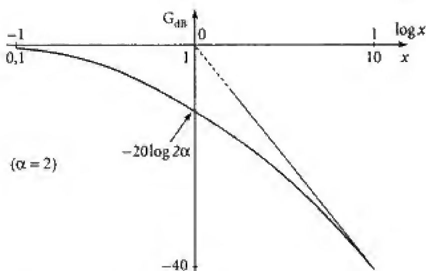
avec
$$D = (1-(1-2\alpha^2))^2 + 4\alpha^2(1-2\alpha^2);$$
$$D = 4\alpha^4 + 4\alpha^2 - 8\alpha^4 ;$$
$$D = 4\alpha^2(1-\alpha^2) ;$$

ce qui correspond bien à une valeur $G_{dB_{max}}$ positive (sauf pour le cas limite $\alpha^2 = \frac{1}{2}$: $D - 1 = -(2\alpha^2 - 1)^2$).

• $\alpha \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, soit $\frac{C_2}{C_1} \geq \frac{1}{2}$:

la solution x_1 n'existe plus (ou, si $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, est nulle : elle se confond alors avec l'autre solution $x = 0$).

G_{dB} est alors monotone décroissante, d'où l'allure des courbes représentatives :



3. Le cas $x = 0$ solution simple de $\dfrac{dG_{dB}}{dx} = 0$ correspond à $x_1 = 0$, soit $\alpha^2 = \dfrac{1}{2}$ (d'après le **2.**), et $\dfrac{C_1}{C_2} = 2$.

Dans ce cas, G_{dB} devient : $\quad G_{dB} = -10\log[(1-x^2)^2 + 2x^2]$;

$$\boxed{G_{dB} = -10\log(1 + x^4)}$$

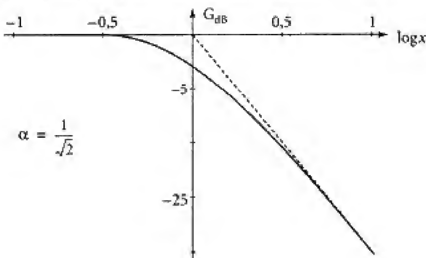
et $\quad G_{dB}(x = 1) = -10\log 2 = -3\text{dB}.$

$x = 1$ correspond donc à la fréquence de coupure du filtre passe-bas (*cf.* figure précédente), soit :

$$\omega = \omega_c = \frac{1}{R\sqrt{C_1C_2}} \quad \text{et} \quad f_c = \frac{1}{2\pi R\sqrt{C_1C_2}}.$$

La courbe représentative de G_{dB} reste alors toujours au-dessous ses asymptotes, mais elle en est très proche : écart −3dB à l'abscisse du point de croisement de celle-ci.

La courbe est semblable à celle d'un filtre passe-bas d'ordre 1, mais la pente de l'asymptote (pour les fréquences élevées) est deux fois plus forte.



412 Amplificateur différentiel

Les AO seront supposés idéaux et en fonctionnement linéaire avec $v_+ = v_-$.

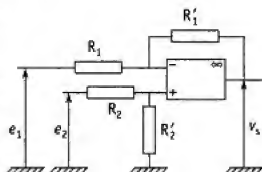


Fig. 1

1. On considère le montage de la figure 1.

a. À quelle condition sur les résistances a-t-on $v_s = G_0(e_2 - e_1)$? Donner la valeur de G_0 pour $R'_1 = 100\ \text{k}\Omega$ et $R_1 = 10\ \text{k}\Omega$.

b. On suppose que les valeurs des résistances sont définies avec une précision de p %.

On pose $e_c = \frac{1}{2}(e_1 + e_2)$; $e_d = e_2 - e_1$

et :
$$v_s = G_d e_d + G_c e_c.$$

Calculer, en fonction des résistances R_1, R'_1, R_2 et R'_2, les coefficients G_d et G_c. En déduire l'expression du taux de réjection de mode commun défini par $T = 20\log\left|\frac{G_d}{G_c}\right|$:

le résultat sera donné en fonction du paramètre $\eta = \frac{(R'_2/R_2)}{(R'_1/R_1)}$ et $G_0 = \frac{R'_1}{R_1}$.

Application numérique : on prendra $G_0 = 10$ et $p = 1$ %, puis $G_0 = 100$ et $p = 0{,}1$ % et on calculera la valeur minimale de T (ce qui revient à se placer dans le cas le plus défavorable compte tenu de la précision sur la valeur des résistances).

2. Le montage de la figure 2 comprend trois AO.
R est une résistance variable.

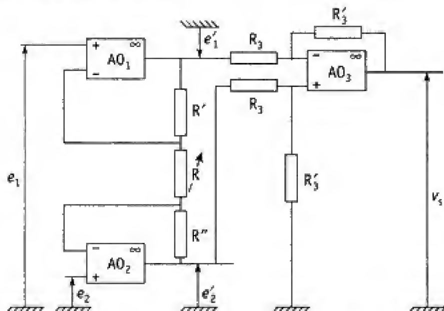


Fig. 2

Montrer que l'on a ainsi constitué un amplificateur différentiel de tension dont on exprimera le gain G en fonction des résistances R', R, R'', R_3 et R'_3.

3. Comparer les deux montages.

1. Ce qu'il faut savoir

- Lois de l'électrocinétique.
- Propriétés d'un AO idéal.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. Le système fonctionnant en régime linéaire, on peut appliquer le théorème de superposition.

2. On retrouvera dans le circuit le bloc étudié au 1.

3. Solution

1. a. L'AO est supposé idéal ($i_- = 0$, $i_+ = 0$, absence d'offset) et en fonctionnement linéaire. Le théorème de superposition donne alors :

$$v_s = A_1 e_1 + A_2 e_2 \quad (1)$$

On a donc :

$$A_1 = \left(\frac{v_s}{e_1}\right)_{e_2 = 0} \quad \text{et} \quad A_2 = \left(\frac{v_s}{e_2}\right)_{e_1 = 0}.$$

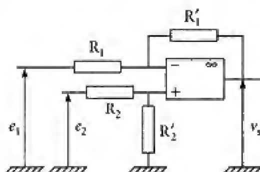


Fig. 3

- **Calcul de A_1 :**

Faire $e_2 = 0$ consiste à réduire le montage à celui représenté ci-contre : en effet, $e_2 = 0$ implique qu'aucun courant ne traverse R_2 et R'_2 ($i_+ = 0$), soit $v_+ = 0$. Il s'agit alors d'un simple montage inverseur pour lequel on a :

$v_+ = 0$

$v_- = v_+$ (AO idéal en régime linéaire)

$i_- = 0 \Rightarrow i = i'$

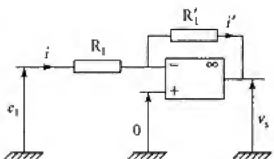


Fig. 4

$$\text{d'où : } i = \frac{e_1 - 0}{R_1} = i' = \frac{0 - v_s}{R'_1} \Rightarrow \frac{v_s}{e_1} = -\frac{R'_1}{R_1}$$

$$\boxed{A_1 = -\frac{R'_1}{R_1}}$$

• Calcul de A_2 :

Cette fois-ci, on annule e_1 et le montage de la figure 5 est un montage amplificateur non inverseur pour lequel on a :

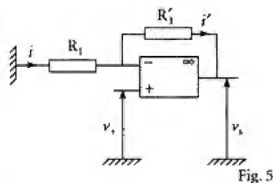


Fig. 5

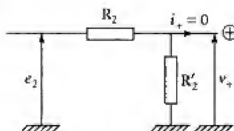
$v_+ = e$

$v_- = v_+$; $i = i'$, d'où :

$$i = \frac{0 - v_+}{R_1} = i' = \frac{v_+ - v_s}{R'_1}$$

soit : $v_s = \left(1 + \frac{R'_1}{R_1}\right)v_+ \Rightarrow \left(\frac{v_s}{v_+}\right)_{e_1 = 0} = 1 + \frac{R'_1}{R_1}$.

D'autre part, le montage branché sur l'entrée non inverseuse de l'AO est un **diviseur de tension** puisque $i_+ = 0$.



D'où : $\frac{v_+}{e_2} = \frac{R'_2}{R_2 + R'_2}$.

Au total, il vient :

$$\frac{v_s}{e_2} = \left(\frac{v_s}{v_+}\right)\cdot\left(\frac{v_+}{e_2}\right) = \left(1 + \frac{R'_1}{R_1}\right)\frac{1}{\left(1 + \frac{R_2}{R'_2}\right)}$$

soit : $A_2 = \frac{\left(1 + \frac{R'_1}{R_1}\right)}{\left(1 + \frac{R_2}{R'_2}\right)}$.

Reportant les valeurs obtenues pour A_1 et A_2 dans (1), il vient :

$$\boxed{v_s = -\frac{R'_1}{R_1}e_1 + \frac{1 + \frac{R'_1}{R_1}}{1 + \frac{R_2}{R'_2}}e_2} \quad (2)$$

Pour réaliser un amplificateur différentiel de tension, on doit avoir $v_s = G_0(e_2 - e_1)$ ce qui impose :

$$G_0 = \frac{1 + \frac{R'_1}{R_1}}{1 + \frac{R_2}{R'_2}} = \frac{R'_1}{R_1}$$

soit : $1 + \frac{R'_1}{R_1} = \frac{R'_1}{R_1}\left(1 + \frac{R_2}{R'_2}\right) \Rightarrow \boxed{\frac{R'_1}{R_1} = \frac{R'_2}{R_2}}$

Application numérique : $G_0 = \frac{100}{10} \Rightarrow G_0 = 10$.

1. b. Il suffit de réécrire la relation (2) avec :

$$\begin{cases} e_c = \frac{1}{2}(e_1 + e_2) \\ e_d = e_2 - e_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_2 = e_c + \frac{e_d}{2} \\ e_1 = e_c - \frac{e_d}{2} \end{cases}$$

D'où :

$$v_s = -\frac{R_1'}{R_1}\left(e_c - \frac{e_d}{2}\right) + \frac{1 + \frac{R_1'}{R_1}}{1 + \frac{R_2}{R_2'}}\left(e_c + \frac{e_d}{2}\right)$$

soit encore :

$$v_s = \underbrace{e_d \cdot \frac{1}{2}\left[\frac{1 + \frac{R_1'}{R_1}}{1 + \frac{R_2}{R_2'}} + \frac{R_1'}{R_1}\right]}_{G_d} + \underbrace{e_c\left[\frac{1 + \frac{R_1'}{R_1}}{1 + \frac{R_2}{R_2'}} - \frac{R_1'}{R_1}\right]}_{G_c}.$$

Dès lors, le rapport des gains de mode commun G_c ($G_c = \frac{v_s}{e_0}$ pour $e_1 = e_2 = e_0$) et différentiel ($G_d = \frac{v_s}{e_0'}$ pour $e_2 = -e_1 = \frac{e_0'}{2}$) est donné par :

$$\frac{G_c}{G_d} = \frac{\left(1 + \frac{R_1'}{R_1}\right) - \left(1 + \frac{R_2}{R_2'}\right)\frac{R_1'}{R_1}}{\frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{R_1'}{R_1}\right) + \left(1 + \frac{R_2}{R_2'}\right)\frac{R_1'}{R_1}\right]}.$$

D'où :

$$\frac{G_c}{G_d} = \frac{1 - \frac{R_1'}{R_1}\frac{R_2}{R_2'}}{\frac{1}{2}\left[1 + \frac{2R_1'}{R_1} + \frac{R_2}{R_2'}\frac{R_1'}{R_1}\right]} \Rightarrow \frac{G_c}{G_d} = \frac{\frac{R_2'}{R_2} - \frac{R_1'}{R_1}}{\frac{1}{2}\left[\frac{R_2'}{R_2} + \frac{R_1'}{R_1} + \frac{2R_1'}{R_1}\frac{R_2'}{R_2}\right]}.$$

Posons $\frac{R_2'}{R_2} = \eta\frac{R_1'}{R_1}$ et $G_0 = \frac{R_1'}{R_1}$, nous obtenons :

$$\frac{G_c}{G_d} = \frac{\eta - 1}{\frac{1}{2}[1 + \eta + 2\eta G_0]}.$$

Le taux de réjection T devient :

$$\boxed{T = 20\log\left|\frac{1 + \eta + 2\eta G_0}{2(\eta - 1)}\right|}$$

Pour un montage parfaitement réglé, on aurait $\frac{R'_2}{R_2} = \frac{R'_1}{R_1} = G_0$, c'est-à-dire $\eta = 1$, et T serait infini ($G_c = 0$ et $G_d = G_0$). Cependant, les valeurs des résistances ne sont connues qu'avec une précision limitée (ici p %) :

$$\eta = \frac{R'_2}{R_2} \cdot \frac{R_1}{R'_1} \Rightarrow \frac{\Delta\eta}{\eta} = \frac{\Delta R'_2}{R'_2} + \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{\Delta R'_1}{R'_1}.$$

Soit en prenant (pour simplifier) une valeur commune – égale à p % – pour les incertitudes relatives $\frac{\Delta R_i}{R_i}$:

$$\frac{\Delta\eta}{\eta} = 4p \quad \text{et} \quad \Delta\eta \# 4p \ \ (\text{puisque } \eta \# 1).$$

Identifions alors $|\eta - 1|$ à $\Delta\eta$ (imprécision sur la connaissance de la valeur du paramètre η) :

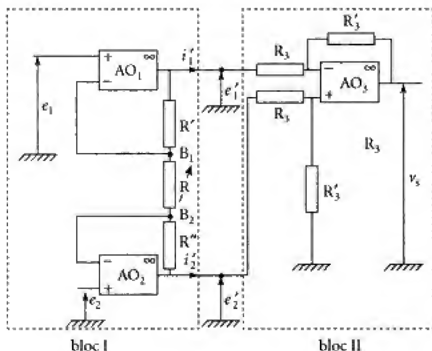
$$T \# 20\log\left|\frac{1 + 1 + 2G_0}{2 \cdot 4p}\right|.$$

Application numérique :

$$G_0 = 10 \quad \text{et} \quad p = 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T = 49\ dB}$$

$$G_0 = 100 \quad \text{et} \quad p = 0{,}001 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T = 88\ dB.}$$

2. On peut décomposer le système en deux blocs :



Le bloc II est identique au montage étudié au 1. a. Il présente un gain $G_0 = \frac{R'_3}{R_3}$ et constitue un amplificateur différentiel tel que $v_s = G_0(e'_2 - e'_1)$.

Étudions le bloc I.

Point méthode

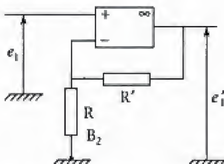
Remarquons tout d'abord que les AO étant supposés idéaux, les tensions e'_1 et e'_2 ne dépendront pas des courants i'_1 et i'_2, l'étude du bloc I peut donc se faire indépendamment de celle du bloc II.

Dès lors, les AO fonctionnant en régime linéaire, le théorème de superposition donne :

$$\begin{cases} e'_1 = \alpha_{11}e_1 + \alpha_{12}e_2 \\ e'_2 = \alpha_{21}e_1 + \alpha_{22}e_2 \end{cases}$$

• **Calcul des coefficients α_{11} et α_{21} :**

Nous avons $\alpha_{11} = \left(\frac{e'_1}{e_1}\right)_{e_2=0}$ et $\alpha_{21} = \left(\frac{e'_2}{e_1}\right)_{e_2=0}$. Faisons $e_2 = 0$, dès lors $(v_-)_2 = (v_+)_2 = 0 \Rightarrow v(B_2) = 0$ d'où le schéma :



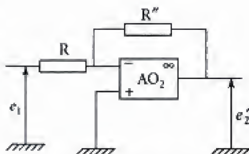
On reconnaît là un montage du type non inverseur, de gain G_1 tel que (*cf.* **1. a.**) :

$$G_1 = 1 + \frac{R'}{R} \Rightarrow \left(\frac{e'_1}{e_1}\right)_{e_2=0} = G_1 = 1 + \frac{R'}{R}$$

d'où : $\alpha_{11} = 1 + \frac{R'}{R}$.

La détermination de α_{21} se fait aisément en remarquant que $v_{B_1} = e_1$ et que l'AO_2 constitue – pour $e_2 = 0$ – un montage du type inverseur. Soit :

$$e'_2 = -\frac{R''}{R}e_1 \Rightarrow \alpha_{21} = -\frac{R''}{R}.$$



• **Calcul des coefficients α_{22} et α_{12} :**

Cette fois-ci, $\alpha_{22} = \left(\frac{e'_2}{e_2}\right)_{e_1=0}$ et $\alpha_{12} = \left(\frac{e'_1}{e_2}\right)_{e_1=0}$. Il suffit alors de faire $e_1 = 0$, et on est ramené au cas précédent en permutant R' et R'' soit :

$$\alpha_{22} = 1 + \frac{R''}{R} \quad \text{et} \quad \alpha_{12} = -\frac{R'}{R}.$$

Finalement, on a, dans le cas général :

$$e'_1 = \left(1+\frac{R'}{R}\right)e_1 - \frac{R'}{R}e_2$$

$$e'_2 = -\frac{R''}{R}e_1 + \left(1+\frac{R''}{R}\right)e_2$$

• Calculons la différence $(e'_2 - e'_1)$:

$$e'_2 - e'_1 = \left(1+\frac{R''}{R}+\frac{R'}{R}\right)e_2 - \left(1+\frac{R'}{R}+\frac{R''}{R}\right)e_1$$

$$e'_2 - e'_1 = \left(1+\frac{R''}{R}+\frac{R'}{R}\right)(e_2 - e_1).$$

• Considérons pour terminer l'association des blocs I et II :

$$v_s = \frac{R'_3}{R_3}(e'_2 - e'_1) = \frac{R'_3}{R_3}\left(1+\frac{R''+R'}{R}\right)(e_2 - e_1).$$

On a ainsi réalisé un amplificateur différentiel de tension de gain global G :

$$G = \frac{R'_3}{R_3}\left(1+\frac{R''+R'}{R}\right)$$

3. • **Réglage du gain :**

Le montage du 1. impose la modification des valeurs de deux résistances (puisque l'on doit avoir au mieux $\frac{R'_1}{R_1} = \frac{R'_2}{R_2}$), ce qui est donc un inconvénient, les valeurs de résistances n'étant pas connues avec exactitude. Par contre, pour le montage du 2. la valeur du gain peut être contrôlée par la seule résistance R. (On a préalablement réalisé, autant que possible, la condition $\left(\frac{R'_3}{R_3}\right)_{\oplus} = \left(\frac{R'_3}{R_3}\right)_{\ominus}$).

• **Impédances d'entrée :**

Le montage du 1. présente des impédances d'entrée finies $R_{e_1} = \left(\frac{e_1}{i_1}\right)_{e_2=0} = R_1$ et $R_{e_2} = \left(\frac{e_2}{i_2}\right)_{e_1=0} = R_2 + R'_2$ (i_1 et i_2 courants traversant R_1 et R_2), ce qui peut être un inconvénient. Pour le montage du 2., ces mêmes impédances sont infinies, du moins pour des AO idéaux ($i_+(AO_1) = 0$ et $i_+(AO_2) = 0$).

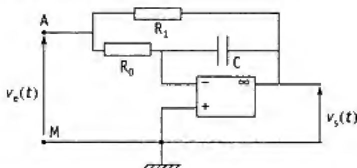
• **Charge :**

Pour les deux montages, on peut placer en sortie une charge dont l'un des pôles sera relié à la masse. La présence de la charge ne perturbe pas le fonctionnement de ces montages pour des AO idéaux (sauf si limitation en courant de sortie…)

• Les deux montages présenteront un **taux de réjection** non idéal (le bloc II du 2. étant identique au 1.).

413 Simulation d'une inductance

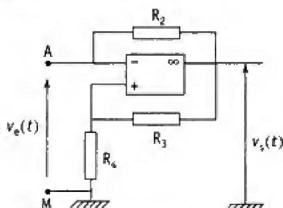
1. On considère le circuit ci-dessous, **en régime sinusoïdal permanent** (l'AO est idéal avec $v_+ = v_-$ en régime linéaire).



a. Établir la relation liant les amplitudes complexes $\underline{V_e}$ et $\underline{V_s}$: à quoi correspond-elle ?

b. Calculer l'admittance d'entrée du montage : montrer que c'est celle de deux éléments passifs en parallèle dont on précisera la nature.

2. On monte en parallèle entre les bornes A et M le circuit suivant (AO idéal supposé en fonctionnement linéaire) :



Que devient l'admittance d'entrée de l'ensemble du montage ?

À quelle condition sur les résistances obtient-on l'équivalent d'une inductance pure ?

Application numérique : $R_0 = R_1 = 10\ \text{k}\Omega$ et $C = 0{,}1\ \mu\text{F}$.

1. Ce qu'il faut savoir

- AO idéal en fonctionnement linéaire.
- Notion d'impédance d'entrée.
- Association d'impédances en parallèle.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. L'AO étant idéal, il ne circule aucun courant dans la borne d'entrée inverseuse.

L'admittance d'entrée $\underline{Y}_e$ est l'inverse de l'impédance d'entrée $\underline{Z}_e$: $\underline{Y}_e = \frac{1}{\underline{Z}_e} = \frac{\underline{I}_e}{\underline{V}_e}$, $\underline{I}_e$ étant l'amplitude complexe du courant entrant par la borne A. Il suffit d'exprimer la somme des courants circulant dans les résistances R_0 et R_1 pour calculer $\underline{I}_e$.

2. Dans ce second montage, le courant d'entrée est le courant circulant dans la résistance R_2, et la tension $\underline{V}_s$ est reliée à $\underline{V}_e$ par le pont diviseur de tension $(R_3 - R_4)$ ($V^+ = V^-$ car l'AO est idéal). L'admittance d'entrée de ce montage s'ajoute à celle du montage précédent (éléments connectés en parallèle).

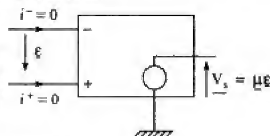
3. Solution

1. a.

POINT COURS

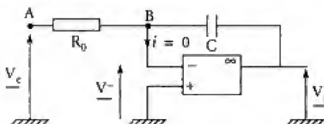
Un amplificateur opérationnel est dit idéal lorsque ses courants d'entrée sont nuls ($i^- = i^+ = 0$), son impédance interne de sortie également nulle, et lorsqu'il ne présente aucun décalage constant en courant et en tension.

Par contre, son gain en boucle ouverte peut ne pas être infini, ce qui implique, en régime linéaire, une tension d'entrée ε non rigoureusement nulle (bien qu'en général négligeable, au moins dans le cadre des exercices proposés… et pour des fréquences pas trop élevées).



On adoptera ici pour un AO en fonctionnement idéal :
– régime linéaire : $\varepsilon = 0$ et $|V_s| < V_{sat}$;
– régime à saturation : $V_s = +V_{sat}$ et $\varepsilon > 0$
ou $V_s = -V_{sat}$ et $\varepsilon < 0$.

Exprimons le bilan des courants au nœud B correspondant à l'entrée inverseuse de l'AO :



L'AO étant idéal, $i = 0$ dans l'entrée inverseuse, et un même courant traverse la résistance R_0 et la capacité C, d'où :

$$\frac{\underline{V}_A - \underline{V}^-}{R_0} = jC\omega_0(\underline{V}^- - \underline{V}_s).$$

De plus, $\underline{V}^- = \underline{V}^+ = 0$ (fonctionnement linéaire : $\varepsilon = 0$).

Soit la relation demandée : $\frac{1}{R_0}\underline{V}_e + jC\omega\underline{V}_s = 0$

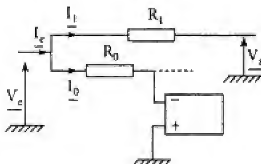
et :

$$\boxed{\underline{V}_s = -\frac{1}{jR_0C\omega}\cdot\underline{V}_e} \quad (1)$$

On retrouve la relation caractéristique d'un circuit intégrateur (la résistance R_1 ne joue ici aucun rôle...).

1. b. L'admittance d'entrée est définie par :

$$\underline{Y}_e = \frac{\underline{I}_e}{\underline{V}_e}.$$



Le courant d'entrée $\underline{I}_e$ du montage s'exprime selon :

$$\underline{I}_e = \underline{I}_1 + \underline{I}_0 \Rightarrow \underline{I}_e = \frac{\underline{V}_e - \underline{V}_s}{R_1} + \frac{\underline{V}_e - \underline{V}_-}{R_0}$$

$$\underline{I}_e = \frac{\underline{V}_e - \underline{V}_s}{R_1} + \frac{\underline{V}_e}{R_0}.$$

D'où : $\underline{I}_e = \underline{V}_e\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_0}\right) - \frac{\underline{V}_s}{R_1}$

et en remplaçant $\underline{V}_s$ par son expression en fonction de $\underline{V}_e$ (relation (1)) :

$$\underline{I}_e = \underline{V}_e\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_0}\right) + \frac{1}{jR_0R_1C\omega}\underline{V}_e.$$

D'où l'admittance d'entrée $\underline{Y}_e$ du montage :

$$\underline{Y}_e = \frac{\underline{I}_e}{\underline{V}_e} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_0}\right) + \frac{1}{j\,R_0R_1C\omega}.$$

Cette admittance est de la forme :

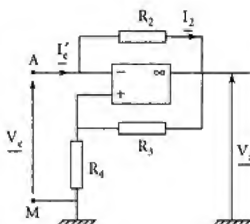
$$\boxed{\underline{Y}_e = \frac{1}{R_{eq}} + \frac{1}{jL_{eq}\omega}}$$

à condition de poser :

$$\begin{cases} \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_0} \\ L_{eq} = R_0R_1C \end{cases}$$

Le montage proposé est donc équivalent – dans le domaine de fonctionnement linéaire – à une résistance et une inductance pure montées en parallèle.

2. L'AO étant idéal, les courants d'entrée sont notamment nuls, d'où :



• $\underline{I}'_e = \underline{I}_2 = \dfrac{\underline{V}_e - \underline{V}_s}{R_2}$

• et le même courant $\underline{I}$ traverse les résistances R_3 et R_4 qui constituent ainsi un pont diviseur de tension, d'où :

$$\underline{V}^+ = \frac{R_4}{R_3 + R_4}\underline{V}_s.$$

Or $\underline{V}^+ = \underline{V}^- = \underline{V}_e$ ($\underline{V}^+ = \underline{V}^-$: AO idéal en fonctionnement linéaire).

Soit $\underline{V}_s = \dfrac{R_3 + R_4}{R_4}\underline{V}_e = \left(1 + \dfrac{R_3}{R_4}\right)\underline{V}_e$

et en reportant dans l'expression de $\underline{I}'_e$:

$$\underline{I}'_e = \frac{1}{R_2}\underline{V}_e - \frac{1}{R_2}\left(1 + \frac{R_3}{R_4}\right)\underline{V}_e \Rightarrow \underline{I}'_e = -\frac{R_3}{R_2R_4}\underline{V}_e$$

d'où l'admittance d'entrée :

$$\underline{Y}'_e = -\frac{R_3}{R_2R_4}.$$

Cette admittance s'ajoute à l'admittance $\underline{Y}_e$ du montage précédent (branchement en parallèle), d'où la nouvelle expression de l'admittance de l'ensemble du montage :

$$\underline{Y}_e + \underline{Y}'_e = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_1} - \frac{R_3}{R_2R_4} + \frac{1}{jL_{eq}\omega}.$$

Cette admittance est celle d'une inductance pure si le terme réel est nul :

$$\boxed{\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_1} - \frac{R_3}{R_2R_4} = 0}$$

À cette condition, le circuit simule une inductance pure L_{eq} de valeur :

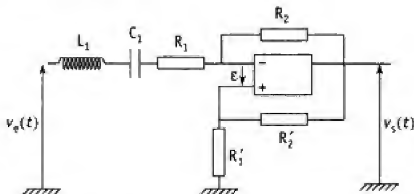
$$\boxed{L_{eq} = R_0R_1C}$$

Remarquons que l'on peut obtenir ainsi des inductances de très fortes valeurs :

$R_0 = R_1 = 10\ \text{k}\Omega, \quad C = 0{,}1\ \mu\text{F} \Rightarrow L_{eq} = 10\ \text{H}$!

414 Condition de fonctionnement d'un filtre

On considère le circuit ci-dessous.



1. Un générateur parfait impose une tension sinusoïdale $v_e(t)$. Caractériser la nature du montage. On supposera que l'AO idéal fonctionne en régime linéaire ($\varepsilon = 0$).

Application numérique : $\frac{R_2'}{R_1'} = 10$; $R_1 = 1\ \text{k}\Omega$; $R_2 = 9\ \text{k}\Omega$; $L_1 = 50$ mH et $C_1 = 10$ nF.

2. L'étude précédente suppose le régime sinusoïdal établi. Afin de valider cette hypothèse, on doit s'intéresser au régime transitoire.

a. Établir l'équation différentielle reliant $v_s(t)$ à $v_e(t)$.

b. En déduire la condition portant sur R_1, R_2, R_1' et R_2' permettant de justifier l'étude faite en **1.** Commenter.

1. Ce qu'il faut savoir

- Lois de l'électrocinétique.
- AO idéal en fonctionnement linéaire.

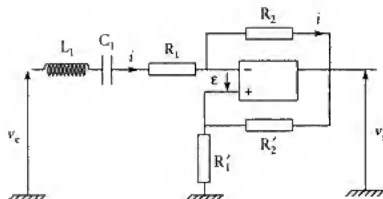
2. Ce qu'il faut comprendre

1. et 2. On suppose que le régime de l'AO est linéaire.

La question 2. propose d'étudier la condition de stabilité, condition pour laquelle l'AO fonctionne en régime linéaire.

3. Solution

1. On suppose que le montage fonctionne en régime linéaire et que l'AO est idéal ($\varepsilon = 0$).



D'où, en remarquant que le même courant i traverse R_1 et R_2 :

$$\underline{V_e} = \left[j\left(L_1\omega - \frac{1}{C_1\omega}\right) + R_1 + R_2\right]\underline{I} + \underline{V_s} \qquad (i_- = 0).$$

Or : $$\underline{V_-} = \underline{V_+} = \frac{R'_1}{R'_1 + R'_2}\underline{V_s} \quad \text{et} \quad \underline{V_-} - \underline{V_s} = R_2\underline{I}.$$

D'où : $$R_2\underline{I} = \frac{R'_1}{R'_1 + R'_2}\underline{V_s} - \underline{V_s} = -\frac{R'_2}{R'_1 + R'_2}\underline{V_s} \Rightarrow \underline{I} = -\frac{R'_2}{R_2(R'_1 + R'_2)}\underline{V_s}.$$

Soit : $$\underline{V_e} = \underline{V_s}\left\{1 + \left[j\left(L_1\omega - \frac{1}{C_1\omega}\right) + R_1 + R_2\right]\left(-\frac{R'_2}{R_2(R'_1 + R'_2)}\right)\right\}$$

$$\underline{V_s}\left\{-R_2\left(\not{1} + \frac{R'_1}{R'_2}\right) + j\left(L_1\omega - \frac{1}{C_1\omega}\right) + R_1 + \not{R_2}\right\} = -R_2\left(1 + \frac{R'_1}{R'_2}\right)\underline{V_e}.$$

Et après simplifications :

$$\frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = \frac{-R_2\left(1 + \frac{R'_1}{R'_2}\right)}{\left(R_1 - R_2\frac{R'_1}{R'_2}\right) + j\left(L_1\omega - \frac{1}{C_1\omega}\right)} \qquad (1)$$

Soit encore :

$$\frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = \frac{\left[-\frac{\left(1 + \frac{R'_1}{R'_2}\right)}{\left(\frac{R_1}{R_2} - \frac{R'_1}{R'_2}\right)}\right]}{1 + \frac{jL_1\omega_0}{\left(R_1 - R_2\frac{R'_1}{R'_2}\right)}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

avec $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{L_1C_1}}$. Posons alors $H_0 = \dfrac{1+\dfrac{R_1'}{R_2'}}{\left(\dfrac{R_1}{R_2}-\dfrac{R_1'}{R_2'}\right)}$ et $Q = \dfrac{L_1\omega_0}{R_1 - R_2\dfrac{R_1'}{R_2'}}$

nous obtenons :
$$\boxed{\underline{H} = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = -\frac{H_0}{1+jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}}$$

Il s'agit d'un filtre passe bande centré sur ω_0, de facteur de qualité Q, et de gain H_0 pour la pulsation centrale ω_0.

Application numérique :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{50\cdot 10^{-3}\cdot 10^{-8}}} \Rightarrow \omega_0 = 4{,}5\cdot 10^4\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1} \Rightarrow f_0 = 7{,}1\ \text{kHz}\,;$$

$$Q = \frac{50\cdot 10^{-3}\times 4{,}47\cdot 10^4}{10^3\left(1-9\cdot\dfrac{1}{10}\right)} \Rightarrow Q = 22{,}4\,;$$

$$H_0 = \frac{1+\dfrac{1}{10}}{\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{10}} \Rightarrow H_0 = 99.$$

2. a. On a : $v_e(t) = L_1\dfrac{di}{dt} + \dfrac{q}{C_1} + R_1 i + R_2 i + v_s \quad (2)\ \left(i = \dfrac{dq}{dt}\right)$

$$\text{et}\ \begin{cases} v_- = v_+ = \dfrac{R_1'}{R_1'+R_2'}v_s \\ v_- - v_s = R_2 i \end{cases} \Leftrightarrow v_s\left(\frac{R_1'}{R_1'+R_2'}-1\right) = R_2 i$$

d'où : $v_s = -R_2\dfrac{(R_1'+R_2')}{R_2'}i = -R_2\left(1+\dfrac{R_1'}{R_2'}\right)i \quad (3)$

et en dérivant (2) par rapport au temps et en remplaçant i à l'aide de (3) :

$$L_1\frac{d^2v_s}{dt^2} + \frac{1}{C_1}v_s + (R_1+R_2)\frac{dv_s}{dt} - R_2\left(1+\frac{R_1'}{R_2'}\right)\frac{dv_s}{dt} = -R_2\left(1+\frac{R_1'}{R_2'}\right)\frac{dv_e}{dt}$$

soit :
$$\boxed{\frac{d^2v_s}{dt^2} + \frac{R_2}{L_1}\left(\frac{R_1}{R_2}-\frac{R_1'}{R_2'}\right)\frac{dv_s}{dt} + \omega_0^2 v_s = -\frac{R_2}{L_1}\left(1+\frac{R_1'}{R_2'}\right)\frac{dv_e}{dt}} \quad (4)$$

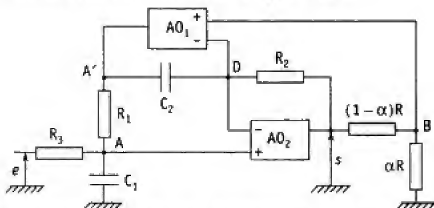
2. b. Il est donc nécessaire que la solution à l'équation différentielle sans second membre ne diverge pas, ce qui impose $\boxed{\dfrac{R_1}{R_2}-\dfrac{R_1'}{R_2'} > 0}$ (l'équation correspondante s'identifiant alors à celle d'un oscillateur harmonique amorti…)

Commentaires

Pour $\frac{R_1}{R_2} < \frac{R'_1}{R'_2}$, $v_s(t)$ tend à diverger et l'AO va atteindre la saturation. On peut alors montrer que cet état n'est pas stable et que finalement $v_s(t)$ va osciller entre $+V_{sat}$ et $-V_{sat}$. Ces oscillations ne seront pas sinusoïdales, sauf pour $\frac{R_2}{R_1}$ suffisamment proche de $\frac{R'_2}{R'_1}$ (par valeur supérieures) où elles apparaissent comme quasi-sinusoïdales de pulsation peu différente de $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1C_1}}$.

415 Filtre « entièrement » réglable

Les AO sont supposés idéaux et fonctionnent en régime linéaire.



1. On se place en régime sinusoïdal établi de pulsation ω. Déterminer la fonction de transfert complexe :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}.$$

En déduire la nature du montage et en dégager les caractéristiques essentielles.

2. Tracer les diagrammes de Bode donnant $G_{dB} = 20\log|\underline{H}|$ et $\varphi = \arg(\underline{H})$ en fonction de $\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ avec :

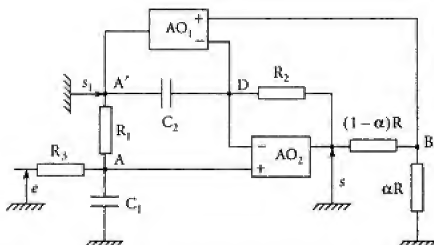
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha R_1 C_1 R_2 C_2}}.$$

Solution

1. Les AO sont idéaux et fonctionnent en régime linéaire. On a donc :

$$(v_+)_{①} = (v_-)_{①} \quad \text{soit} \quad v_D = v_B\,;$$

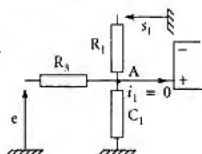
$$(v_+)_{②} = (v_-)_{②} \quad \text{d'où} \quad v_D = v_A\,;$$



Finalement $v_A = v_D = v_B$, et on peut prendre s, s_1 et v_A comme inconnues principales, e étant imposé.

Les trois équations nécessaires à la résolution du problème s'obtiendront en écrivant la loi des nœuds (ou encore le « théorème de Millemann ») aux points A, D et B.

- **Nœud A :**

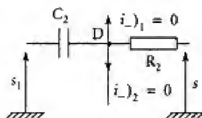


$$\frac{1}{R_3}(\underline{E}-\underline{V_A})+jC_1\omega(\underline{0}-\underline{V_A})+\frac{1}{R_1}(\underline{S_1}-\underline{V_A})=\underline{I_+})_1=\underline{0}.$$

D'où :

$$\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_1}+jC_1\omega\right)\underline{V_A}=\frac{1}{R_3}\underline{E}+\frac{1}{R_1}\underline{S_1}\quad(1)$$

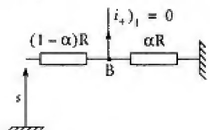
- **Nœud D :**



$$jC_2\omega(\underline{S_1}-\underline{V_D})+\frac{1}{R_2}(\underline{S}-\underline{V_D})=\underline{I_})_1+\underline{I_})_2=0$$

soit $$\left(jC_2\omega+\frac{1}{R_2}\right)V_D=jC_2\omega\underline{S_1}+\frac{1}{R_2}\underline{S}\quad(2)$$

- **Nœud B :**



$$\frac{1}{(1-\alpha)R}(\underline{S}-\underline{V_B})+\frac{(\underline{0}-\underline{V_B})}{\alpha R}=\underline{I_+})_2=0$$

soit $(1-\alpha)\underline{V_B}=\alpha(\underline{S}-\underline{V_B})$

et $\underline{V_B}=\alpha\underline{S}\Rightarrow\underline{V_A}=\alpha\underline{S}\quad(3)$

puisque $\underline{V_A}=\underline{V_B}$.

(2) entraîne avec $\underline{V_D}=\underline{V_A}$:

$$jR_2C_2\omega\underline{S_1}=\underline{V_A}(1+jR_2C_2\omega)-\underline{S}$$

et avec (3) :

$$jR_2C_2\omega\underline{S_1}=\underline{S}[-1+\alpha+\alpha jR_2C_2\omega]\quad(4)$$

Enfin avec (1), (3) et (4) :

$$\left(\frac{1}{R_3}+jC_1\omega+\frac{1}{R_1}\right)\alpha\underline{S} = \frac{1}{R_3}\underline{E}+\frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{jR_2C_2\omega}[-1+\alpha+\alpha jR_2C_2\omega]\underline{S}.$$

Regroupons les termes :

$$\underline{S}\left[\alpha\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_1}+jC_1\omega\right)+\frac{1-\alpha}{jR_1R_2C_2\omega}-\frac{\alpha}{R_1}\right] = \frac{\underline{E}}{R_3}$$

$$\underline{S}\left[\frac{1}{R_3}\alpha+j\left(C_1\alpha\omega-\frac{1-\alpha}{R_1R_2C_2\omega}\right)\right] = \frac{\underline{E}}{R_3}$$

Soit enfin
$$\frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{1}{\alpha+j\left[R_3C_1\alpha\omega-\dfrac{(1-\alpha)}{\dfrac{R_1R_2}{R_3}C_2\omega}\right]}.$$

D'où une fonction de transfert :

$$\boxed{\underline{H} = \frac{\dfrac{1}{\alpha}}{1+j\left[R_3C_1\omega-\dfrac{1-\alpha}{\dfrac{\alpha R_1R_2}{R_3}C_2\omega}\right]}}$$

On peut remarquer que le crochet s'annule pour une valeur particulière ω_0 de la pulsation ω. Elle est donnée par la relation :

$$\omega_0^2 = \frac{1-\alpha}{\alpha R_2C_2R_3C_1\dfrac{R_1}{R_3}} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{(1-\alpha)}{\alpha R_2C_2R_1C_1}}}$$

et en posant $\omega_1 = \dfrac{1}{R_1C_1}$ et $\omega_2 = \dfrac{1}{R_2C_2}$; $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1-\alpha}{\alpha}}\sqrt{\omega_1\omega_2}$.

D'autre part, la valeur de la fonction de transfert pour $\omega = \omega_0$ est définie par $\underline{H} = H_0 = \dfrac{1}{\alpha}$. On peut alors écrire :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1+jR_3C_1\omega_0\left[\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega}\right]}.$$

Introduisons le facteur $Q = R_3C_1\omega_0 \Rightarrow$ $\boxed{Q = \dfrac{R_3}{R_1}\sqrt{\dfrac{1-\alpha}{\alpha}}\cdot\sqrt{\dfrac{\omega_2}{\omega_1}}}$

La fonction de transfert prend la forme :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ\left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right]}$$

On reconnaît là un **filtre passe bande** :

– centré sur la pulsation ω_0 ;

– de gain réel H_0 pour $\omega = \omega_0$;

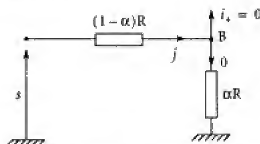
– et de facteur de qualité Q.

Commentaires

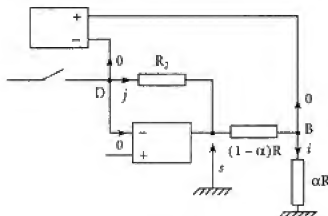
• En très haute fréquence, et à la limite, le condensateur C_1 constitue un court-circuit et le potentiel du point A devient nul. Il en est donc de même pour le nœud B, et il n'y a pas de courant traversant la résistance αR.

D'où $j = 0$ et $s = v_B = 0$.

On a bien $H \to 0$ quand $\omega \to \infty$.



• En très basse fréquence, et à la limite, les condensateurs se transforment en circuits ouverts ; on a donc au niveau du nœud D :



$$j = 0 \quad (i_{-①} = i_{-②} = 0)$$

d'où $$v_D = s = (v_-)_1 = (v_+)_1 = v_B.$$

Il n'y a pas de courant traversant la résistance $(1 - \alpha)R$. Il vient $i = 0$ (loi des nœuds en B) et $s = v_B = 0$:

$$H \to 0 \text{ quand } \omega \to 0.$$

La bande passante à −3 dB est définie selon :

$(\Delta\omega)_{BP} = \omega_H - \omega_B$, avec ω_H et ω_B solutions de l'équation :

$$|\underline{H}|(\omega) = \frac{H_0}{\sqrt{2}} \quad \left(20\log\frac{1}{\sqrt{2}} = -3\,\text{dB}\right).$$

Soit $$1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = 2 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \pm\frac{1}{Q}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - \frac{1}{Q}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - 1 = 0 \Rightarrow \frac{\omega_H}{\omega_0} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}\right] \\ \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{1}{Q}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - 1 = 0 \Rightarrow \frac{\omega_B}{\omega_0} = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}\right]. \end{cases}$$

D'où $$\frac{\omega_H - \omega_B}{\omega_0} = \frac{1}{Q} \quad \text{et} \quad \boxed{(\Delta\omega)_{BP} = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{R_3C_1}}$$

Le filtre passe bande peut être caractérisé par les grandeurs ω_0, H_0 et $(\Delta\omega)_{BP}$. De ces trois grandeurs, seule $(\Delta\omega)_{BP}$ dépend de R_3, ce qui permet de régler la largeur de la bande passante indépendamment des valeurs de la pulsation centrale ω_0 et du gain maximal H_0.

H_0 peut ensuite être fixé en jouant sur la valeur du paramètre α (et en restant dans le domaine linéaire…). ω_0 est alors ajustable à la valeur désirée en jouant sur R_1, R_2 ou C_2.

2. ■ Diagrammes de Bode :

$$G_{dB} = 20\log\frac{H_0}{\left[1 + Q^2\left(X - \frac{1}{X}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$ en notant $X = \frac{\omega}{\omega_0}$, d'où :

$$G_{dB} = 20\log H_0 - 10\log\left[1 + Q^2\left(X - \frac{1}{X}\right)^2\right],$$ ce qui donne les comportements asymptotiques suivants :

• $X \ll 1 : G_{dB} \sim -10\log\left(\frac{Q^2}{H_0^2X^2}\right) = +20\log\left(\frac{H_0}{Q}\right) + 20\log X$

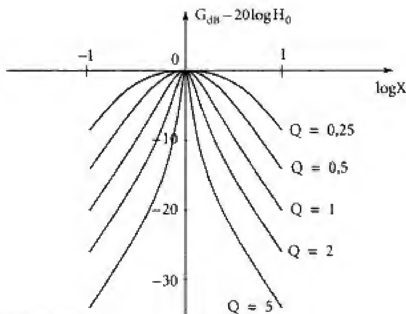
ce qui correspond à une pente de +20 dB par décade.

• $X \gg 1 : G_{dB} \sim -10\log\left(\frac{Q^2X^2}{H_0^2}\right) = +20\log\left(\frac{H_0}{Q}\right) - 20\log X$

(pente de −20dB / décade).

• $X = 1 : G_{dB} = 20\log H_0$.

D'où les courbes donnant G_{dB} en fonction de logX, et en remarquant que les deux asymptotes se coupent au point (0 ; $20\log H_0$) pour $Q = 1$, en dessous pour $Q > 1$, et au-dessus pour $Q < 1$:



■ **Diagramme de phase :**

On a $\underline{H} = Ge^{j\varphi} \Rightarrow e^{-j\varphi} = \dfrac{G}{H_0}\left[1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)\right]$.

D'où $\boxed{\tan\varphi = -Q\left(X - \dfrac{1}{X}\right) \quad \text{avec} \quad \cos\varphi > 0}$ où $X = \dfrac{\omega}{\omega_0}$.

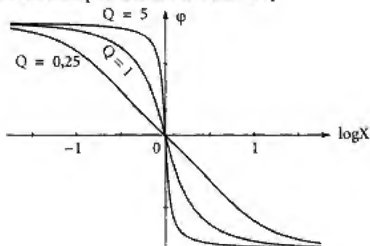
Dès lors :

- $X \ll 1$: $\tan\varphi \sim \dfrac{Q}{X}$ et $\varphi \to +\dfrac{\pi}{2}$;
- $X = 1$: $\tan\varphi = 0$ et $\varphi = 0$;
- $X \gg 1$: $\tan\varphi \sim -QX$ et $\varphi \to -\dfrac{\pi}{2}$.

Remarquons de plus que la courbe donnant φ en fonction de $\log X$ est symétrique par rapport au point $O(0\,;0)$, $X_0 = \log 1 = 0$ et $\varphi = 0$, en effet :

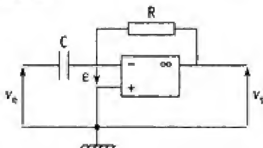
$$X \Rightarrow \frac{1}{X}\left\}\begin{array}{l}\varphi \Rightarrow -\varphi \\ \log X \Rightarrow -\log X.\end{array}\right.$$

D'où les courbes dessinées pour différentes valeurs de Q :



416 Dérivateur

1. Donner la fonction de transfert du circuit ci-dessous, pour un AO idéal dans le cas où $\varepsilon = 0$ en régime linéaire.

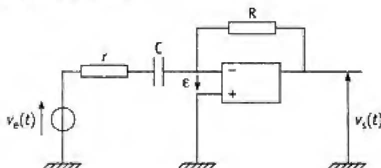


Donner l'équation différentielle liant $v_s(t)$ et $v_e(t)$, pour un régime linéaire quelconque. Quel est le rôle de ce circuit ?

2. On veut tenir compte maintenant d'une résistance r en série, située à l'entrée du montage. L'AO est toujours supposé idéal, mais de gain fini : on l'assimile à un système linéaire du premier ordre obéissant à l'équation différentielle :

$$v_s(t) + \frac{1}{\omega_0}\frac{dv_s}{dt} = \mu_0\varepsilon$$

avec $\mu_0 = 10^6$ et $\omega_0 = 10\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.



a. Établir que l'équation différentielle vérifiée par $v_s(t)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{1}{\Omega_0^2}\frac{d^2v_s}{dt^2} + \frac{2\lambda}{\Omega_0}\frac{dv_s}{dt} + v_s = -RC\frac{dv_e}{dt} \quad \left(\text{avec } 1 + \frac{1}{\mu_0} \approx 1\right).$$

Montrer que pour $r \ll R$, les expressions approchées des coefficients Ω_0 et λ sont données par :

$$\Omega_0 \approx \sqrt{\frac{\omega_0\mu_0}{RC}} \quad \text{et} \quad \lambda \approx \frac{rC}{2}\sqrt{\frac{\omega_0\mu_0}{RC}}.$$

On prendra : $C = 0{,}1\ \mu\text{F}$ et $R = 10^4\ \Omega$.

b. À quelle(s) condition(s) peut-on retrouver, pour le montage étudié, un comportement voisin de celui du dérivateur parfait ?

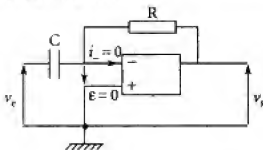
Quelle valeur a-t-on intérêt à donner à r ?

Solution

1. La fonction de transfert $\underline{H} = \dfrac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e}$ caractérise le comportement du circuit en régime sinusoïdal permanent, $\underline{V}_s$ et $\underline{V}_e$ étant les amplitudes complexes des tensions sinusoïdales de sortie et d'entrée.

Ici, l'AO étant idéal (pas de courants d'entrée), le même courant traverse le condensateur C et la résistance R, soit avec $\varepsilon = 0$ (fonctionnement linéaire) :

$$\frac{\underline{V}_e - 0}{\dfrac{1}{jC\omega}} = \frac{0 - \underline{V}_s}{R}.$$

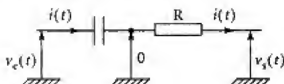


Soit : $\underline{V}_s = -jRC\omega\underline{V}_e$

et $\boxed{\underline{H} = -jRC\omega}$ (1)

Équation différentielle liant $v_e(t)$ et $v_s(t)$:

$$i(t) = C\frac{d}{dt}(v_e - 0) = \frac{0 - v_s(t)}{R}$$

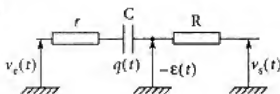


d'où : $\boxed{v_s(t) = -RC\dfrac{dv_e(t)}{dt}}$ (2)

Commentaires

- L'équation (2) est celle d'un dérivateur parfait.
- On aurait pu directement passer de (1) à (2) en substituant au facteur $j\omega$ l'opérateur de dérivation $\dfrac{d}{dt}$ et en remplaçant les tensions $\underline{V}$ par $v(t)$.

2. a. On a toujours $i_ = 0$, et le même courant $i(t)$ traverse les composants r, C et R.



On a donc :

$v_e(t) - v_s(t) = (r + R)i + \dfrac{q}{C}$ avec

$i = \dfrac{dq}{dt}$

d'où : $\dfrac{dv_e}{dt} = \dfrac{dv_s}{dt} + (r + R)\dfrac{di}{dt} + \dfrac{i}{C}$ (3)

D'autre part, $i = \dfrac{-\varepsilon - v_s}{R}$ (4)

On reporte (4) dans (3), en éliminant i :

$$\frac{dv_e}{dt} = \frac{dv_s}{dt} + \frac{(r + R)}{R}\left(-\frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{dv_s}{dt}\right) - \frac{1}{RC}(\varepsilon + v_s).$$

Soit encore :

$$-RC\frac{dv_e}{dt} = \varepsilon + v_s + rC\frac{dv_s}{dt} + (r+R)C\frac{d\varepsilon}{dt} \qquad (5)$$

De plus, l'AO fonctionne en régime linéaire selon :

$$v_s + \frac{1}{\omega_0}\frac{dv_s}{dt} = \mu_0\varepsilon.$$

(5) devient alors :

$$-RC\frac{dv_e}{dt} = v_s + rC\frac{dv_s}{dt} + \frac{1}{\mu_0}\left(v_s + \frac{1}{\omega_0}\frac{dv_s}{dt}\right) + \frac{(r+R)C}{\mu_0}\left(\frac{dv_s}{dt} + \frac{1}{\omega_0}\frac{d^2v_s}{dt^2}\right).$$

Regroupons les termes :

$$\frac{(r+R)C}{\mu_0\omega_0}\frac{d^2v_s}{dt^2} + \left(rC + \frac{1}{\mu_0\omega_0} + \frac{(r+R)C}{\mu_0}\right)\frac{dv_s}{dt} + \left(1 + \frac{1}{\mu_0}\right)v_s = -RC\frac{dv_e}{dt}.$$

Équation de la forme (avec $1 + \frac{1}{\mu_0} \approx 1$; $\mu_0 = 10^6$) :

$$\boxed{\frac{1}{\Omega_0^2}\frac{d^2v_s}{dt^2} + \frac{2\lambda}{\Omega_0}\frac{dv_s}{dt} + v_s = -RC\frac{dv_e}{dt}} \qquad (6)$$

où : $\Omega_0^2 = \frac{\mu_0\omega_0}{(r+R)C} \approx \frac{\omega_0\mu_0}{RC}$ (pou $R \gg r$).

$$\frac{2\lambda}{\Omega_0} = rC + \frac{1}{\mu_0\omega_0} + \frac{(r+R)C}{\mu_0} = rC + \frac{1}{\mu_0\omega_0} + \frac{RC}{\mu_0}.$$

Avec les valeurs numériques indiquées dans le texte, il vient :

$$\Omega_0^2 = \frac{10^6 \cdot 10}{10^4 \cdot 10^{-7}} = 10^{10} \Rightarrow \mathbf{\Omega_0 \approx 10^5\ rad \cdot s^{-1}}.$$

$$\frac{2\lambda}{\Omega_0} = rC + 10^{-7} + 10^{-9} \sim rC \text{ pour } r \text{ multiple de } 100\ \Omega.$$

Avec ces approximations, on a donc :

$$\boxed{\Omega_0 = \sqrt{\frac{\omega_0\mu_0}{RC}} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{rC}{2}\sqrt{\frac{\omega_0\mu_0}{RC}}}$$

L'équation différentielle homogène associée à l'équation (6) s'écrit :

$$\frac{d^2v_s}{dt^2} + 2\lambda\Omega_0\frac{dv_s}{dt} + \Omega_0^2v_s = 0.$$

C'est celle d'un circuit R'–L'–C' série de pulsation propre Ω_0 et de facteur de qualité $Q = \frac{1}{2\lambda}$.

2. b. La solution $v_s(t)$ est approximativement celle du dérivateur parfait $\left(v_s(t) = -RC\frac{dv_e}{dt}\right)$ dans la mesure où l'effet du (pseudo) circuit R'–L'–C' est négligeable. Il faut ainsi réaliser deux conditions :

– les solutions de l'équation homogène doivent être rapidement négligeables, donc suffisamment amorties ;

– les termes faisant intervenir les dérivées de $v_s(t)$ doivent rester petits.

Plus précisément, les solutions de l'équation (6) peuvent s'écrire :

$$v_s(t) = \underbrace{\tilde{v}_s(t)}_{\text{(transitoire)}} + \underbrace{v_{sp}(t)}_{\text{(solution particulière correspondant à } v_e(t)\text{)}}.$$

■ La première condition doit donc se traduire par $\tilde{v}_s(t) \to 0$ le plus rapidement possible, ce qui correspond à $\lambda \approx 1$ ($\lambda = 1$ est associé à l'amortissement critique).

Commentaires

Dans le cas d'une équation différentielle « classique » :

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2\lambda\Omega_0\frac{dv}{dt} + \Omega_0^2 v = \Omega^2 E \quad (7)$$

les solutions de l'équation homogène (équation (7) où E = 0) se déduisent des racines de l'équation caractéristique :

$$X^2 + 2\lambda\Omega_0 X + \Omega_0^2 = 0$$

dont le discriminant (réduit) est :

$$\Delta' = (\lambda\Omega_0)^2 - \Omega_0^2 = \Omega_0^2(\lambda^2 - 1)$$

d'où deux cas :

• $\lambda \geqslant 1$: racines réelles $X = -\Omega_0.(\lambda \pm \sqrt{\lambda^2-1})$.

Soit $v(t) = ae^{-\frac{t}{\tau_1}} + be^{-\frac{t}{\tau_2}}$

avec $\tau_1\tau_2 = \Omega_0^{-2}$; $\tau_1 = \dfrac{1}{\Omega_0(\lambda + \sqrt{\lambda^2-1})}$ et $\tau_2 = \dfrac{1}{\Omega_0}(\lambda + \sqrt{\lambda^2-1})$.

Quand λ varie de 1 à l'« infini », τ_1 décrit l'intervalle $\dfrac{1}{\Omega_0} \to 0$ et τ_2 l'intervalle $\dfrac{1}{\Omega_0} \to \infty$.

Il vaut mieux choisir λ proche de 1 (ici par valeurs supérieures) pour avoir une décroissance rapide $\left(\text{alors } \tau_1 \sim \tau_2 \sim \tau_0 = \dfrac{1}{\Omega_0}\right)$.

• $\lambda < 1$: racines complexes conjuguées de la forme $-\lambda\Omega_0 \pm j\omega'$, d'où des solutions à (7) :

$$v(t) = e^{-\lambda\Omega_0 t}(A\cos\omega' t + B\sin\omega' t)$$

soit $v(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}(A\cos\omega' t + B\sin\omega' t)$ où $\tau = \dfrac{1}{\lambda\Omega_0}$ signal qui s'atténue d'autant plus rapidement, à Ω_0 fixé, que λ est proche de 1.

En conclusion, cette étude montre bien que l'amortissement le plus rapide du régime « transitoire » est obtenu pour $\boxed{\lambda = 1}$ $\left(\tau \sim \dfrac{1}{\Omega_0}\right)$.

■ La seconde condition impose Ω_0 suffisamment grand pour que l'équation (6) se réduise à :

$$v_s(t) = -RC\frac{dv_e}{dt}.$$

Si $v_e(t)$ présente une constante de temps τ_c caractéristique de ses variations, il en sera de même pour $v_{sp}(t)$, et :

$$\left|\frac{dv_s}{dt}\right| \sim \frac{1}{\tau_c}|v_s|$$

soit : $$\frac{1}{\Omega_0^2}\left|\frac{d^2v_s}{dt^2}\right| \ll |v_s| \Rightarrow \frac{1}{\Omega_0^2\tau_c^2} \ll 1,\ \Omega_0 \gg \frac{1}{\tau_c}$$

et $$\frac{2\lambda}{\Omega_0}\left|\frac{dv_s}{dt}\right| \ll |v_s| \Rightarrow \frac{2\lambda}{\Omega_0\tau_c} \ll 1,\ \Omega_0 \gg \frac{1}{\tau_c}.$$

(si $\lambda = 1$)

Avec les valeurs proposées, on a $\Omega_0 = 10^5 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$, ce qui correspond à une fréquence f_0 telle que :

$$f_0 = \frac{\Omega_0}{2\pi} \Rightarrow \boldsymbol{f_0 \approx 16 \text{ kHz}}.$$

Ainsi, le dérivateur pourra valablement fonctionner pour des signaux de fréquence nettement inférieure à $f_0 = 16$ kHz...

D'autre part, le choix $\lambda = 1$ impose : $r = \frac{2}{C}\sqrt{\frac{RC}{\omega_0\mu_0}}$.

Soit encore $r = \frac{2}{10^{-7}}\sqrt{\frac{10^4\cdot 10^{-7}}{10\cdot 10^6}} \Rightarrow \boldsymbol{r \approx 200\ \Omega}$.

Commentaires

• Cette valeur de r vérifie à peu près la condition $r \ll R$. On a en effet :

$$\frac{r}{R} = \frac{200}{10^4} = 2\cdot 10^{-2}.$$

• On peut aussi penser que le circuit réel fonctionnera à peu près comme un dérivateur parfait tant que l'effet de r sera négligeable devant l'impédance du condensateur :

$$r \ll \frac{1}{C\omega}$$

ce qui impose une limite supérieure aux pulsations ω compatibles avec un bon fonctionnement :

$$\omega \ll \frac{1}{rC} = \frac{1}{200\cdot 10^{-7}} = 5\cdot 10^4 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

ce qui correspond à peu près à $\omega \ll \Omega_0$...

Notons que la présence de cette résistance r est en pratique indispensable pour la stabilité du montage : avec $r = 0$, le gain (montage inverseur) tendrait vers l'infini lorsque $\frac{1}{C\omega} \to 0$..., effet heureusement compensé par la limitation du gain de l'AO aux fréquences élevées !

chapitre

5

Mécanique 2

A - Oscillateurs

B - Forces centrales et systèmes de deux points matériels

C - Changements de référentiels

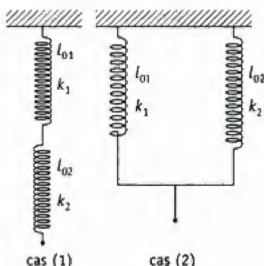
D - Mouvements dans des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$

501 Association de deux ressorts

Un ressort « idéal » supposé de masse négligeable, est caractérisé uniquement par sa longueur au repos l_0 et sa raideur k.

1. On accroche deux tels ressorts bout à bout : montrer que l'ensemble est équivalent à un ressort unique, dont on précisera les caractéristiques.

2. Même question si les deux ressorts sont montés côte à côte, un dispositif convenable, de masse négligeable, imposant à la barre de liaison un mouvement de translation parallèle aux axes des ressorts (la barre reste constamment perpendiculaire à cet axe).



3. Commenter les résultats obtenus au **1.** et **2.**

1. Ce qu'il faut savoir

- Oscillateur harmonique non amorti : énergie potentielle élastique.

2. Ce qu'il faut comprendre

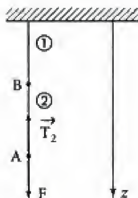
1. et **2.** D'une manière générale, il faut étudier le comportement du dispositif soumis à une force d'intensité F donnée, et déterminer l'allongement Δl. Si le résultat peut se mettre sous la forme $F = k\Delta l$, l'ensemble est bien équivalent à un ressort unique de raideur k.

Dans le premier cas, l'équilibre du système impose l'égalité des tensions des deux ressorts, tandis que le second dispositif impose l'égalité des longueurs (et non des allongements…).

3. Solution

1. Soumettons le système à une force d'intensité F ($\vec{F} = F\vec{u_z}$ et $F > 0$) et étudions le système dans sa position d'équilibre.

Le point A, sans masse, est soumis à la force $\vec{F}$ et à la tension du ressort $\vec{T_2} = -k_2(l_2 - l_{02})\vec{u_z}$.



L'équilibre impose :

$$\vec{F} + \vec{T_2} = \vec{0} \Rightarrow F - k_2(l_2 - l_{02}) = 0 \quad (1)$$

De même, le point B est soumis, de la part du ressort ②, à la force $-\vec{T_2}$ et de la part du ressort ①, à la force $\vec{T_1} = -k_1(l_1 - l_{01})\vec{u_z}$. On a donc :

$$-k_1(l_1 - l_{01}) + k_2(l_2 - l_{02}) = 0. \quad (2)$$

Il en résulte un allongement total du dispositif Δl tel que :

$$\Delta l = (l_2 - l_{02}) + (l_1 - l_{01}).$$

Soit d'après (2) : $\Delta l = (l_2 - l_{02})\left[1 + \frac{k_2}{k_1}\right]$

et avec (1) : $\Delta l = \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} F.$

L'ensemble est donc bien équivalent à un ressort unique de raideur $K = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$ ($F = K\Delta l$), et bien entendu de longueur à vide $l_0 = l_{01} + l_{02}$.

Les deux systèmes contiennent également la même énergie. On a ainsi pour le système des deux ressorts :

$$E_p = \frac{1}{2}k_1(l_1 - l_{01})^2 + \frac{1}{2}k_2(l_2 - l_{02})^2$$

soit $$E_p = \frac{1}{2k_1}[k_1(l_1 - l_{01})]^2 + \frac{1}{2k_2}[k_2(l_2 - l_{02})]^2$$

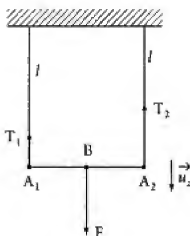
d'où avec (1) et (2) $\Rightarrow$ $\boxed{E_p = \frac{F^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)}$ (3)

Et pour le système équivalent :

$$E_p = \frac{1}{2}K(\Delta l)^2 = \frac{1}{2K}[K(\Delta l)]^2 = \frac{F^2}{2K}. \quad (4)$$

Les expressions (3) et (4) sont identiques puisque $\frac{1}{K} = \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} = \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_1}$.

2. Le système de guidage impose la même longueur l aux deux ressorts. On a donc $\vec{T_2} = -k_2(l - l_{02})\vec{u_z}$ et $\vec{T_1} = -k_1(l - l_{01})\vec{u_z}$.



Dans le cas général, ces tensions ne sont pas égales. Leur moment en B n'est donc pas nul, et le système de guidage doit compenser ce moment. On peut alors supposer que cela s'effectue par l'intermédiaire d'un couple qui n'affecte pas le bilan des forces s'exerçant sur la barre. L'équilibre de cette dernière s'écrit ainsi :

$$F - k_2(l - l_{02}) - k_1(l - l_{01}) = 0 \quad (5)$$

Pour $F = 0$, on obtient : $\boxed{l = l_0 = \frac{k_2 l_{02} + k_1 l_{01}}{k_1 + k_2}}$

Et pour $F \neq 0$, il vient : $F = (k_1 + k_2)[l - l_0] = (k_1 + k_2)\Delta l$ où Δl représente l'allongement du système.

L'ensemble est équivalent à un ressort unique de longueur au repos l_0 et de raideur $K = k_1 + k_2$.

D'un point de vue énergétique, il faut prendre une origine associée à la configuration d'équilibre pour $F = 0$. Ainsi pour une force $F \neq 0$ et donc une longueur d'équilibre l, il apparait une énergie élastique supplémentaire :

$$E_p' = E_p(l) - E_p(l_0)$$

soit $$E_p' = \frac{1}{2}k_1(l - l_{01})^2 + \frac{1}{2}k_2(l - l_{02})^2 - \frac{1}{2}k_1(l_0 - l_{01})^2 - \frac{1}{2}k_2(l_0 - l_{02})^2 \quad (6)$$

quantité qu'il nous faut comparer à $E_p'' = \frac{1}{2}K \cdot (l - l_0)^2$.

Calculons donc $E_p'' - E_p'$:

$$E_p'' - E_p' = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)(l - l_0)^2 - \frac{1}{2}k_1(l - l_{01})^2 - \frac{1}{2}k_2(l - l_{02})^2 + \frac{1}{2}k_1(l_0 - l_{01})^2 + \frac{1}{2}k_2(l_0 - l_{02})^2$$

$$E_p'' - E_p' = \left\{\frac{1}{2}k_1[(l - l_0)^2 + (l_0 - l_{01})^2] - \frac{1}{2}k_1(l - l_{01})^2\right\} + \left\{\frac{1}{2}k_2[(l - l_0)^2 + (l_0 - l_{02})^2] - \frac{1}{2}k_2(l - l_{02})^2\right\}$$

or $$(l - l_0)^2 + (l_0 - l_{01})^2 = (l - l_0 + l_0 - l_{01})^2 - 2(l - l_0)(l_0 - l_{01}) = (l - l_{01})^2 - 2(l - l_0)(l_0 - l_{01}).$$

Soit après des simplifications évidentes :

$$E_p'' - E_p' = -k_1(l - l_0)(l_0 - l_{01}) - k_2(l - l_0)(l_0 - l_{02})$$

$$E_p'' - E_p' = -(l - l_0)\underbrace{[k_1(l_0 - l_{01}) + k_2(l_0 - l_{02})]}_{0} = 0$$ d'après (5) ($l = l_0$ pour $F = 0$).

Il y a bien identité entre l'énergie E_p'' associée au ressort équivalent de raideur K de longueur à vide l_0 et le supplément d'énergie élastique pour le système réel (entre les états $F = 0$ et $F \neq 0$).

3. • Considérons d'abord les raideurs. Dans le premier cas, les deux ressorts sont en **série** et on a $\frac{1}{K} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$. Dans le second cas, ils sont montés en **parallèle** et $K = k_1 + k_2$.

• L'association en série met en évidence le lien entre raideur K et longueur à vide l_0 d'un ressort. Ainsi si l'on divise un tel ressort en N parties égales, chaque partie aura :

– une longueur à vide $\frac{l_0}{N}\left(l_0 = N\frac{l_0}{N}\right)$;

– une raideur $NK\left(\frac{1}{K} = N\frac{1}{NK}\right)$.

Un type de ressort donné suit la loi :

$$\boxed{\text{longueur à vide} \times \text{raideur} = \text{constante}}$$

la constante étant caractéristique du matériau (propriétés de déformation élastique) et de la géométrie (diamètre des « spires » et rayon du « fil » constituant le ressort à boudin…).

L'expérience montre bien que, soumis à une force donnée, un ressort d'un modèle donné s'allonge d'autant moins qu'il est au départ plus court…

Remarquons que – dans le deuxième cas – si les ressorts ne sont pas identiques, l'équilibre au repos impose $T_2 = -T_1$ $(F = 0)$.

La barre est soumise à un couple, qui est compensé par le dispositif de guidage ; ce couple existe de manière générale. Il n'est nul que dans le cas particulier où :

$$T_1 = T_2 = \frac{F}{2}$$

soit : $$k_1(l - l_{01}) = k_2(l - l_{02}) = \frac{F}{2}$$

c'est-à-dire : $$l = l_{01} + \frac{F}{2k_1} = l_{02} + \frac{F}{2k_2}$$

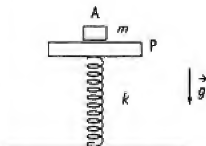
ce qui impose : $$F\left(\frac{1}{2k_1} - \frac{1}{2k_2}\right) = l_{02} - l_{01}$$

soit, si $k_2 \neq k_1$: $$F = 2k_1k_2 \cdot \frac{l_{02} - l_{01}}{k_2 - k_1}.$$

Dans le cas où $k_2 = k_1$, cette absence de couple n'est possible que si $l_{02} = l_{01}$, mais est alors réalisée quel que soit F (cas de deux ressorts identiques).

502 Décollement d'une masse

1. Un point matériel A, de masse m, est posé sur un plateau horizontal P, de masse M, soutenu par des ressorts équivalents à un ressort unique de raideur k : ce plateau ne peut se déplacer que verticalement. On appuie sur le plateau, qui se déplace d'une longueur l, comptée à partir de sa position d'équilibre initiale, et on le lâche sans vitesse initiale.



Déterminer la condition que doit vérifier le déplacement l pour que A ne quitte jamais le plateau.

2. Un chariot de masse M peut glisser sans frottement sur l'axe Oz. Il supporte un point matériel A de masse m. Il y a frottement entre m et M. On admet la condition de non glissement de A sur M :



$$|F_f| < fmg \text{ (} f \text{ coefficient de frottement)}$$

où $\vec{F}_f = F_f\vec{u}_z$ représente la force de contact tangentielle exercée par M sur A. Quelle est l'amplitude maximale a_{max} des oscillations du chariot compatible avec l'équilibre sur celui-ci de la masse m ?

1. Ce qu'il faut savoir

- Loi fondamentale de la dynamique – théorème de la quantité de mouvement.
- Oscillateurs harmoniques.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. Tout mouvement – autre que rectiligne uniforme – nécessite une accélération (c'est la réciproque du principe d'inertie...) à laquelle correspond nécessairement la résultante de forces subies par le mobile. Dans le cas présent, la masse m est soumise à son poids (vertical vers le bas) et à la réaction du plateau (vers le haut) : l'accélération que peut subir le point A – en orientant selon la verticale descendante – est donc limitée par la valeur de g.

Il faut donc calculer l'accélération liée au mouvement d'oscillation du système, et chercher à quelle condition elle restera effectivement inférieure à g.

3. Solution

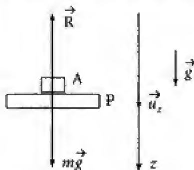
1. Le point matériel A est soumis à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et à la réaction $\vec{R}$ du plateau.

Posons $\vec{R} = -R\vec{u}_z$.

Le contact subsistera si R demeure positif.

Le point matériel quittera le plateau dès que $R = 0$.

On est donc amené à calculer R. Pour cela, appliquons la loi fondamentale de la dynamique à A en supposant qu'il reste solidaire du plateau :



$$m\ddot{z} = mg - R \Rightarrow R = m(g - \ddot{z}).$$

R positif implique donc une accélération $\ddot{z}$ inférieure à g. Le calcul de cette accélération s'effectue à partir de la loi fondamentale de la dyna-

mique appliquée au système matériel {masse A + plateau} assimilé à un point matériel, c'est-à-dire en notant $\vec{F} = F\,\vec{u}_z$ la force exercée ici par le ressort :

$$(m+M)\ddot{z} = (m+M)g + F.$$

D'où : $g - \ddot{z} = -\dfrac{F}{m+M}$ et $R = \dfrac{m}{m+M}\cdot(-F)$.

Ainsi, il y a contact tant que $F < 0$. Pour déterminer F, prenons l'origine des z pour un ressort ni tendu, ni comprimé ; dès lors :

$$F = -kz \quad \text{et} \quad \boxed{R = \frac{mk}{m+M}z}$$

La masse A ne quittera jamais le plateau si, compte tenu des conditions initiales, la position $z = 0$ n'est jamais atteinte.

Le système est un oscillateur harmonique non amorti qui va osciller autour de sa position d'équilibre z_0 définie selon :

$$(m+M)g = kz_0.$$

Or à $t = 0$, on a $z = z_0 + l$ et $\dot{z} = 0$; les oscillations vont donc s'effectuer entre les limites $z_0 - l$ et $z_0 + l$.

A restera solidaire du plateau si la valeur minimale $z_0 - l$ de z reste positive, soit pour :

$$z_0 - l > 0 \Rightarrow \boxed{l \leqslant \frac{(m+M)g}{k}}$$

Dans le cas contraire, A quitte le plateau pour $z = 0$.

2. La condition de non glissement de la masse m par rapport au chariot est :

$$|F_f| < fmg.$$



La loi fondamentale de la dynamique appliquée au point matériel A donne :

$$m\ddot{z} = F_f \quad (\text{avec } \vec{F}_f = F_f\vec{u}_z).$$

De la même façon qu'au 1., le théorème de la quantité de mouvement pour le système masse A-chariot s'écrit :

$(m+M)\ddot{z} = -kz$ (pas de frottements sol/chariot, et la force exercée par le ressort est $\vec{F}' = -kz\vec{u}_z$, l'origine des z étant choisi pour un ressort ni tendu ni comprimé).

Le non glissement de A par rapport au chariot est assuré tant que :

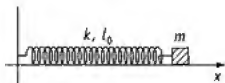
$$\frac{m}{m+M}|kz| < fmg \Rightarrow |z| < \frac{f(M+m)g}{k}.$$

Enfin si l'on note a_0 l'amplitude des oscillations (A et chariot solidaires), l'inégalité précédente se traduit selon :

$$a_0 < \frac{f(M+m)g}{k} \Rightarrow \boxed{a_{max} = \frac{f(M+m)g}{k}}$$



Oscillateur harmonique amorti : temps de réponse – Sélectivité



Une masse m peut glisser sans frottements sur l'axe $x'Ox$ d'un plan horizontal. Elle est reliée à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0. On repère son mouvement $x(t)$ par rapport à sa position ressort ni tendu ni comprimé. Elle est de plus soumise à une force de frottement fluide $\vec{f} = -2\lambda m\dot{x}\,\vec{u}_x \quad \left(\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}\right)$.

On posera $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ et $Q = \dfrac{\omega_0}{2\lambda}$.

1. À l'instant initial $t = 0$, la masse m est en $x = 0$ avec une vitesse nulle. On la soumet alors à la force constante $\vec{F_0} = F_0\vec{u}_x$. Déterminer la loi du mouvement $x(t)$ dans le cas où le facteur Q est suffisamment grand devant 1. Représenter le graphe de $x(t)$. Commenter.

On notera $X_0 = \dfrac{F_0}{k}$.

2. Soumise à $\vec{F_0}$, la masse m est maintenant immobile en $x = X_0$.

On supprime la force F_0 à un instant pris pour origine des temps ($t = 0$). Donner la nouvelle expression de $x(t)$ dans le cas où $Q \gg 1$.

Dans les mêmes conditions, montrer que l'énergie mécanique $E_m(t)$ du système vérifie $E_m(t) = E_m(0)e^{-t/\tau}$: on exprimera τ en fonction de ω_0 et Q. En déduire que l'on a :

$$Q = 2\pi\frac{E_m(t)}{E_m(t) - E_m(t + T_0)} \quad \text{où } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$ Conclure.

3. Le système est désormais soumis à une force sinusoïdale $\vec{F_0} = F_0\cos\omega t \cdot \vec{u}_x$. Étudier la réponse de l'oscillateur en régime forcé. Dans le cas où $Q \gg 1$, déterminer la bande passante $\Delta\omega$ en fonction de ω_0 et Q.

4. Commenter les résultats obtenus au **2.** et au **3.**

1. Ce qu'il faut savoir

Points de cours

- Oscillateur harmonique amorti forcé.
- Énergie mécanique.

Outils mathématiques

- Équation différentielle linéaire du second ordre avec second membre.
- Utilisation de la notation complexe.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. On désire faire passer le système de l'état $(x, \dot{x}) = (0, 0)$ à l'état $(x, \dot{x}) = (X_0, 0)$.

Cette évolution s'effectue via un régime transitoire quasi sinusoïdal, à l'échelle de quelques T_0, dès que l'amortissement est faible, ce qui est le cas pour $Q \gg 1$: le régime est alors pseudo-périodique…

2. On peut faire la même remarque qu'au 1. le système évoluant cette fois-ci dans l'autre sens (les conditions initiales seront différentes). On peut s'attendre à ce que le temps τ soit **d'autant plus grand** que Q est grand (faible amortissement) et ω_0 faible (T_0 grand)…

3. Il s'agit de l'étude classique du régime sinusoïdal forcé. La bande passante doit être **d'autant plus étroite** que Q est grand (meilleure sélectivité) et que ω_0 et faible.

Il apparaît que τ varie en sens inverse de $\Delta\omega$ …

3. Solution

1. Appliquons au point matériel m la loi fondamentale de la dynamique, en projection sur l'axe $x'Ox$:

$$m\ddot{x} = -kx - 2\lambda m\dot{x} + F_0.$$

Soit avec $k = m\omega_0^2$ et $2\lambda = \dfrac{\omega_0}{Q}$:

$$(1) \quad \ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} = \frac{F_0}{k}\omega_0^2 = X_0\omega_0^2, \text{ en posant } X_0 = \frac{F_0}{k}.$$

En fait, X_0 correspond à l'abscisse de la nouvelle position d'équilibre due à la force extérieure F_0 appliquée au système.

Posons alors $x(t) = X_0 + u(t)$. Dès lors :

$$\ddot{u} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u} + \omega_0^2 u = 0 \quad (2)$$

Cherchons des solutions sous la forme e^{pt} ; p doit vérifier l'équation caractéristique :

$$p^2 + \frac{\omega_0}{Q}p + \omega_0^2 = 0 \quad (3)$$

Son discriminant est $\Delta = \omega_0^2\left(\dfrac{1}{Q^2} - 4\right)$. Il est négatif pour $Q > \dfrac{1}{2}$, et donc *a fortiori* pour $Q \gg 1$. Dans ces conditions, les solutions de (3) sont données par :

$$p_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + i\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \quad \text{et} \quad p_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} - i\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

Posons $\omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}} \Rightarrow \omega \# \omega_0$ pour $Q \gg 1$ il vient :

$$u(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$$

et
$$x(t) = X_0 + e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t).$$

Traduisons les conditions initiales $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$:

$x(0) = 0 \Rightarrow X_0 + A = 0 \Rightarrow A = -X_0$

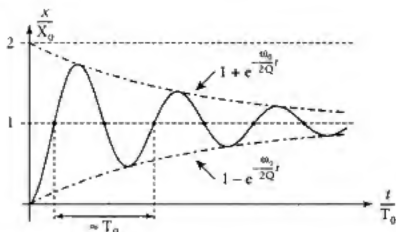
$\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow A\left(-\frac{\omega_0}{2Q}\right) + B\omega = 0 \Rightarrow B = -\frac{\omega_0}{\omega}\frac{1}{2Q}X_0.$

Finalement
$$x(t) = X_0\left[1 - e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(\cos\omega t + \frac{1}{2Q}\frac{\omega_0}{\omega}\sin\omega t\right)\right].$$

Et pour $Q \gg 1$, soit $\omega = \omega_0$, et en négligeant le terme en sinus, terme d'amplitude proportionnelle à $\frac{1}{2Q}$ très faible devant l'unité :

$$\boxed{x(t) \approx X_0\left[1 - e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\cos\omega_0 t\right]}$$

D'où les graphes $t \rightarrow x(t)$:



Commentaires

• Le système a « atteint » son régime établi (encore appelé régime permanent ou régime forcé, et correspondant ici à $x = X_0 = \frac{F_0}{k}$) dès que le temps t écoulé est suffisamment grand devant un temps caractéristique que l'on peut évaluer à $\tau' = \frac{2Q}{\omega_0}$ (*cf.* $\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) = \exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right)$).

C'est le temps nécessaire pour que le système puisse « oublier » ces conditions initiales.

• Pour $t \leqslant \tau'$, on a affaire à un régime transitoire qui présente ici les caractéristiques d'un régime pseudo-périodique (pseudo-période $\sim T_0$ pour $Q \gg 1$).

2. En régime établi, et sous l'action de la force extérieure F_0, on a une élongation du ressort $x = X_0$. Supprimant F_0, le système va tendre vers sa nouvelle position d'équilibre $x = 0$ en effectuant des oscillations pseudo-sinusoïdales autour de cette position.

D'après le 1. $x(t)$, solution de l'équation $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, est donnée par :

$$x(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)\,; \quad \left(Q > \frac{1}{2}\right).$$

Avec ici $x(0) = X_0$ et $\dot{x}(0) = 0$ soit : $X_0 = A$ et $-\frac{\omega_0}{2Q}A + B\omega = 0$.

Et avec les mêmes approximations qu'au 1. nous obtenons pour $Q \gg 1$:

$$\boxed{x(t) = X_0 e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\cos\omega_0 t}$$

• L'énergie cinétique de la masse m a pour valeur, à chaque instant :

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \# \frac{1}{2}mX_0^2 e^{-\frac{\omega_0}{Q}t}\left[-\frac{\omega_0}{2Q}\cos\omega_0 t - \omega_0\sin\omega_0 t\right]^2.$$

Et, en tenant compte de ce que $Q \gg 1$:

$$E_c \# \frac{1}{2}m\omega_0^2 X_0^2 e^{-\frac{\omega_0}{Q}t}\sin^2\omega_0 t.$$

De même, l'énergie potentielle associée au ressort s'écrit :

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2(t) = \# \frac{1}{2}kX_0^2 e^{-\frac{\omega_0}{Q}t}\cos^2\omega_0 t$$

ou encore, avec $k = m\omega_0^2$: $\quad E_p \# \frac{1}{2}m\omega_0^2 X_0^2 e^{-\frac{\omega_0}{Q}t}\cos^2\omega_0 t.$

L'énergie mécanique totale du système $E_m = E_c + E_p$ vaut donc :

$$E_m(t) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 X_0^2 e^{-\frac{\omega_0}{Q}t}.$$

À cette approximation, nous avons : $\boxed{E_m(t) = E_m(0)e^{-\frac{t}{\tau}}}$

en notant $\tau = \frac{Q}{\omega_0}$ temps caractéristique de décroissance de l'énergie emmagasinée dans le système. Plus le facteur de qualité Q est grand, plus ce temps τ possède une valeur élevée (à ω_0 fixé) et corrélativement moins les pertes d'énergie, « rapportées » à un intervalle de temps T_0, sont importantes.

Ainsi on a : $$\frac{E_m(t) - E_m(t+T_0)}{E_m(t)} = 1 - e^{-\frac{\omega_0}{Q}T_0} \# \frac{2\pi}{Q}$$

soit encore : $$Q = 2\pi\frac{E_m(t)}{E_m(t) - E_m(t+T_0)}$$

d'où : $\boxed{Q = 2\pi \dfrac{\text{énergie emmagasinée à l'instant } t}{\text{énergie perdue pendant } T_0 \text{ au voisinage de l'instant } t}}$

Cette définition est assez générale. Elle peut justifier le nom de facteur de qualité (ou de mérite) donné à Q. Elle est suffisamment large pour s'appliquer à des systèmes variant de l'oscillateur harmonique étudié ici à la cavité Laser...

3. L'équation différentielle du mouvement s'écrit maintenant :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t = X_0\omega_0^2\cos\omega t \quad (4)$$

Le régime forcé correspond ici au régime sinusoïdal établi de la forme :

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi).$$

On pose alors $x(t) = \text{Re}[\underline{x}(t)]$ et $\underline{x}(t) = \underline{X}e^{j\omega t}$ où $\underline{X} = Ae^{j\varphi}$.

Ainsi $\dot{x}(t) = -\omega A\sin(\omega t + \varphi) = \text{Re}[j\omega\underline{x}]$

$\ddot{x}(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) = \text{Re}[-\omega^2\underline{x}]$.

L'équation (4) se résout sous la forme :

$$\text{Re}\left[-\omega^2\underline{x} + j\omega\frac{\omega_0}{Q}\underline{x} + \omega_0^2\underline{x}\right] = X_0\omega_0^2\text{Re}[e^{j\omega t}].$$

$\underline{x}$ est alors solution de l'équation : $\underline{x}\left[(\omega_0^2 - \omega^2) + j\omega\dfrac{\omega_0}{Q}\right] = X_0\omega_0^2 e^{j\omega t}$

soit encore : $\underline{X} = \dfrac{X_0}{(1-\eta^2) + j\dfrac{\eta}{Q}}$ en notant $\eta = \dfrac{\omega}{\omega_0}$.

On obtient donc d'après ce qui précède ($\underline{X} = Ae^{j\varphi}$) :

$$A = \frac{X_0}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + \dfrac{\eta^2}{Q^2}}} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \tan\varphi = -\dfrac{1}{Q}\dfrac{\eta}{1-\eta^2} \text{ avec } \sin\varphi < 0 \\ \text{soit } -\pi \leqslant \varphi \leqslant 0. \end{cases}$$

• Étude rapide du terme d'amplitude $A(\eta)$:

– Pour $\eta \ll 1$, on a $A \sim X_0 = \dfrac{F_0}{k}$ et pour $\eta \gg 1$, $A \sim \dfrac{X_0}{\eta^2} = \dfrac{F_0}{m\omega^2}$.

Ainsi en très basse fréquence ($\omega \ll \omega_0$), c'est l'élasticité (ici le ressort) qui limite la réponse du système, alors qu'en très haute fréquence ($\omega \gg \omega_0$), c'est l'inertie (ici la masse m).

– D'autre part, $A(\eta)$ admet un maximum si l'égalité suivante est réalisée (annulation de la dérivée par rapport à η^2 de l'expression sous la racine) :

$$-2(1-\eta^2) + \frac{1}{Q^2} = 0 \Rightarrow \eta^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

ce qui exige $Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (condition bien évidemment remplie pour $Q \gg 1$).

Reportant cette valeur de η dans A, il vient :

$$A_{max} = \frac{X_0}{\sqrt{\frac{1}{4Q^4} + \frac{1}{Q^2}\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)}} \Rightarrow A_{max} = \frac{X_0 Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}.$$

On a bien $A_{max} > X_0$, et pour $Q \gg 1$: $A_{max} = QX_0$.

Il y a résonance (ici d'amplitude) pour la pulsation $\omega \approx \omega_0$ ($Q \gg 1$).

À cette pulsation, la réponse du système présente une amplitude à peu près Q fois plus grande (pour $Q \gg 1$) que celle que l'on obtiendrait en très basse fréquence…

• Pour caractériser l'acuité de la résonance, on définit la bande bassante $\Delta\omega$ à -3 dB selon :

$\Delta\omega = \omega_H - \omega_B$ où $\frac{\omega_H}{\omega_0}$ et $\frac{\omega_B}{\omega_0}$ sont solutions de l'équation $A(\eta) = \frac{A_{max}}{\sqrt{2}}$.

POINT COURS

$$A(\eta) = \frac{A_{max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow 20\log A(\eta) = 20\log A_{max} - 20\log\sqrt{2},$$

soit $[A(\eta)]_{dB} = [A_{max}]_{dB} - 3$ dB $\quad (10\log 2 \approx 3)$.

Les valeurs de η cherchées vérifient donc $\left(Q > \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$:

$$\frac{X_0^2}{(1-\eta^2)^2 + \frac{\eta^2}{Q^2}} = \frac{1}{2}\frac{X_0^2 Q^2}{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

soit encore : $(1-\eta^2)^2 + \frac{\eta^2}{Q^2} = \frac{2}{Q^2}\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right) \quad (5)$

or pour $Q \gg 1$, les valeurs de η satisfaisant (5) deviennent très proches de 1.

Posons $\eta = 1 + \varepsilon(Q)$ avec $|\varepsilon| \ll 1$, dès lors :

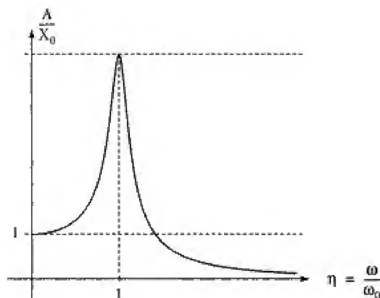
$$(1-\eta^2)^2 = (1-\eta)^2(1+\eta)^2 \approx \varepsilon^2 \cdot 4$$

et $4\varepsilon^2 \# \frac{1}{Q^2}\left[2 - \eta^2 - \frac{1}{2Q^2}\right] = \frac{1}{Q^2}$ (car $\eta = 1$ et $Q \gg 1$) d'où $\varepsilon \# \pm\frac{1}{2Q}$

soit : $\omega_H \# \omega_0\left(1 + \frac{1}{2Q}\right)$ et $\omega_B \# \omega_0\left(1 - \frac{1}{2Q}\right)$.

Finalement : $\boxed{\Delta\omega \# \frac{\omega_0}{Q} \quad \text{et} \quad Q_{\gg 1} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}}$

D'où la courbe donnant $\frac{A}{X_0}$ en fonction de $\eta = \frac{\omega}{\omega_0}$



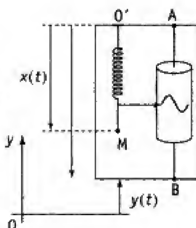
4. On a montré que le système proposé pouvait être caractérisé par un temps de réponse en régime transitoire de l'ordre de $\tau = \dfrac{Q}{\omega_0}$ et par une bande passante en régime sinusoïdal forcé égale à $\Delta\omega = \dfrac{\omega_0}{Q}$ ($Q \gg 1$ pour la réponse en amplitude). On a donc :

$$\boxed{\tau \cdot \Delta\omega \sim 1}$$

Plus le temps de réponse est élevé, plus la bande passante est étroite et plus la sélectivité du système est importante…

On obtient un système analogue en électricité avec un circuit série RLC : R (« frottements » : dissipation d'énergie) L (« inertie ») et C (« élasticité »). L'étude en $x(t)$ correspondrait à celle de la tension $u_c(t)$ aux bornes de la capacité. Les « forces » $F(t)$ seraient fournies par un générateur…

504 Vibrographe



Un vibrographe est constitué d'une masse m suspendue à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0. L'extrémité O' de cet oscillateur est solidaire d'un bâti subissant, par rapport à un référentiel galiléen $\mathcal{R}_0$, un mouvement vertical représenté par la fonction $y(t)$.

La masse m subit de plus une force de frottement fluide $\vec{f} = -\lambda \dot{x} \vec{u}_x$ $\left(\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}\right)$. En l'absence de mouvement du bâti ($y = 0$), la position d'équilibre de M est repérée par $x = x_0$.

On suppose que le bâti subit dans $\mathcal{R}_0$ des oscillations sinusoïdales de pulsation ω : $y(t) = Y_m \cos \omega t$.

1. Déterminer, en régime établi, l'amplitude X_m des oscillations de la masse m par rapport au bâti ainsi que le déphasage φ de ces mêmes oscillations par rapport à celles du bâti.

On posera $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$; $\eta = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ et $Q = \dfrac{m\omega_0}{\lambda}$.

Tracer les courbes donnant $\dfrac{X_m}{Y_m}$ et φ en fonction de la variable réduite $\dfrac{\omega}{\omega_0}$. Commenter.

2. Comment choisir la valeur de Q pour que X_m se confonde avec Y_m, à 2 % près, sur un domaine continu en fréquence aussi grand que possible, la valeur de ω_0 étant fixée ? On donne :

$$\frac{2x^2}{\sqrt{4x^2-1}} = 1{,}02 \text{ pour } x = 0{,}789\ ;$$

$$f(Q, x) = \frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{x^2}-1\right)^2 + \dfrac{1}{Q^2x^2}}} \Rightarrow f(0{,}789\ ;\ 1{,}44) = 0{,}98.$$

Solution

1. Plaçons-nous dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié au bâti et posons $X = x - x_0$ ce qui élimine les forces définissant l'équilibre en l'absence de mouvement du bâti. Par rapport à cet état, la masse M est soumise aux forces supplémentaires :

- $\vec{f}_1 = -kX\vec{u}_x$ (allongement supplémentaire X par rapport à la situation de référence).
- $\vec{f}_2 = -\lambda\dot{X}\vec{u}_x$ (la force de frottement ne dépend que de la vitesse de la masse par rapport au bâti).
- $\vec{f}_e = -m(-\ddot{y}\vec{u}_x)$ (force d'inertie d'entraînement résultant du mouvement de translation du bâti par rapport au référentiel galiléen).

D'où en appliquant, dans $\mathcal{R}$, la loi fondamentale de la dynamique.

$m\ddot{X} = -kX - \lambda\dot{X} + m\ddot{y}$, soit encore :

$$\ddot{X} + \frac{\lambda}{m}\dot{X} + \omega_0^2 X = \ddot{y} \Rightarrow \ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = \ddot{y} \quad \left(Q = \frac{m\omega_0}{\lambda}\right).$$

Pour un mouvement sinusoïdal du bâti $y = Y_m \cos\omega t$, le mouvement relatif de la masse M est solution de l'équation :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = -\omega^2 Y_m \cos\omega t \quad (1)$$

Au-delà d'une durée de quelques τ où $\tau \sim \frac{\omega_0}{Q}$ (*cf.* Ex n° 503), la réponse du système en $X(t)$ devient sinusoïdale (le système atteint son régime permanent encore appelé régime forcé et oublie ses conditions initiales…). Les oscillations sont déphasées par rapport aux oscillations du bâti (*cf.* termes de frottement). On a donc, dans ces conditions :

$$X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi).$$

Passons en notation complexe : $X(t) = \mathrm{Re}[(X_m e^{j\varphi})e^{j\omega t}] = \mathrm{Re}(\chi e^{j\omega t})$.

Dès lors, il vient : $\chi\left[(\omega_0^2 - \omega^2) + j\omega\frac{\omega_0}{Q}\right] = -(\omega)^2 Y_m$.

D'où :
$$\chi = X_m e^{j\varphi} = \frac{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + \frac{j}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}} Y_m.$$

Soit une amplitude X_m telle que (avec $\eta = \frac{\omega}{\omega_0}$) :

$$\boxed{X_m = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + \frac{1}{Q^2}\eta^2}} Y_m}$$

et $\tan\varphi = \left(-\frac{1}{Q}\right)\frac{\eta}{1-\eta^2}$ avec $\sin\varphi > 0$, soit $0 \leq \varphi \leq \pi$.

■ Traçons les courbes $\eta \to \frac{X_m}{Y_m} = F(\eta)$ et $\eta \to \varphi(\eta)$.

• **comportements asymptotiques :**

– En très haute fréquence, les termes inertiels sont les plus importants de sorte que $m\ddot{X} \approx -m\omega^2 Y_m \cos\omega t$, d'où $X \approx Y_m \cos\omega t$, soit :

$$\omega \gg \omega_0 \Rightarrow X_m \sim Y_m \text{ et } \varphi \sim 0.$$

– En très basse fréquence, le terme élastique est prépondérant dans le membre de gauche de l'équation (1). On a donc :

$$\omega_0^2 X = -\omega^2 Y_m \cos\omega t \quad \text{d'où} \quad X \# -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} Y_m \cos\omega t$$

soit
$$\omega \ll \omega_0 \Rightarrow X_m \approx \frac{\omega^2}{\omega_0^2} Y_m \text{ et } \varphi \to \pi.$$

• Pour $\eta = 1$, soit $\omega = \omega_0$, il vient $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ($|\tan\varphi| \to +\infty$ et $\varphi \in (0, \pi)$) et $\frac{X_m}{Y_m} = F(1) = Q$.

• Enfin, $F(\eta)$ présente un maximum lorsque $\left(\frac{1}{\eta^2}-1\right)^2+\frac{1}{Q^2\eta^2}$ passe par un minimum, c'est-à-dire (dériver par exemple par rapport à $\frac{1}{\eta^2}$) pour :

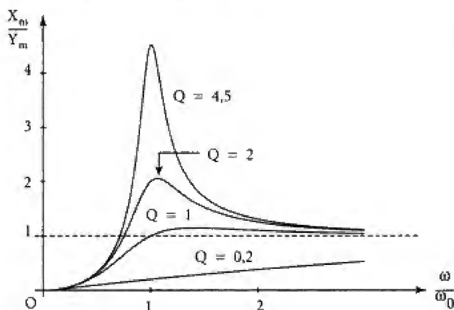
$$\frac{1}{\eta^2} = 1-\frac{1}{2Q^2},$$

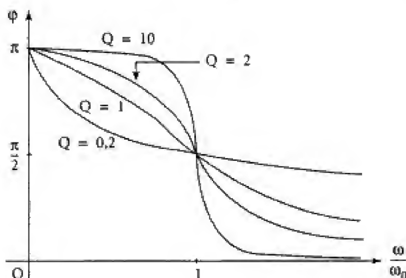
ce qui ne peut se produire que pour $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Alors $\frac{\omega_m}{\omega_0} = \left(1-\frac{1}{2Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

et $\omega_m \sim \omega_0$ (dès que $Q \gg 1$).

D'où les différentes courbes tracées pour quelques valeurs du facteur de qualité Q.

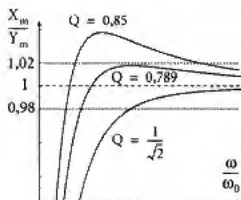




2. On désire que l'amplitude X_m des oscillations de la masse M s'identifie – à 2 % près – à celle Y_m des oscillations du bâti. On cherche donc à obtenir :
$(1-0{,}02)Y_m \leqslant X_m \leqslant Y_m(1{,}02)$ sur une bande continue de fréquence aussi large que possible.

Soit $0{,}98 \leqslant \dfrac{X_m}{Y_m} < 1{,}02.$

On obtiendra ce résultat en choisissant la valeur de Q supérieure à $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, telle que le maximum $\left(\dfrac{Q}{\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}}\right)$ soit juste égal à 1,02, ce que montrent les courbes présentées ci-contre.



On a donc :

$$\frac{Q}{\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}} = 1{,}02 = \frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2-1}}.$$

On a donc (*cf.* énoncé) : **Q = 0,789.**

La plage de pulsations sur laquelle on pourra confondre X_m et Y_m (à 2 % près) s'étend théoriquement d'une valeur minimale ω'_m à l'infini, avec ω'_m solution de :

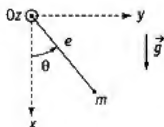
$$\frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{\eta^2}-1\right)^2+\dfrac{1}{Q^2\eta^2}}} = 0{,}98 \qquad \left(\eta = \frac{\omega'_m}{\omega_0}\right)$$

ce qui donne (*cf.* énoncé) : $\eta = 1{,}44$, soit : $\boldsymbol{\omega'_m = 1{,}44\,\omega_0}$.

Une valeur supérieure de Q (*cf.* graphe précédent avec Q = 0,85) donnerait une plage en fréquence plus étroite et un phénomène de résonance plus aigu ce qui pourrait avoir pour effet « d'amplifier » des fréquences non désirées…

505 Pendule « amorti »

Un pendule simple (masse ponctuelle *m* au bout d'une tige sans masse de longueur *l*) peut tourner librement autour de l'axe horizontal O*z*. Il présente un mouvement d'oscillations dans le plan vertical O*xy*.



1. Donner l'équation du mouvement en $\theta(t)$. On posera $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. **On se limite, par la suite, à l'étude des petits mouvements par rapport à la position d'équilibre stable $\theta = 0$.**

Définir l'énergie mécanique E du système (on prendra $E = 0$ pour $\dot{\theta} = 0$ et $\theta = 0$).

2. On désire tenir compte des phénomènes dissipatifs. À cet effet, on suppose que la masse m est soumise à une force de « frottement fluide » dont le moment en O est donné par l'expression :

$\vec{M}_f(O) = \Gamma\vec{u}_z$, avec $\Gamma = -ml^2\gamma\frac{d\theta}{dt}$ (γ constante fixée).

a. Exprimer le taux de variation $\frac{dE}{dt}$ de l'énergie mécanique E du système.

b. Dans le cas des amortissements faibles, on pose en première approximation :

$$\theta(t) = \alpha(t)\cos(\omega t + \varphi)$$

où $\alpha(t)$ est une fonction très lentement variable à l'échelle de la « pseudo-période » $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

On définit la « valeur moyenne » sur une durée T d'une fonction $f(t)$ selon :

$<f(t)> = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt$.

Donner la valeur moyenne – sur une pseudo-période T – de la relation établie au **2.a.** En déduire qu'à l'approximation considérée, on a : $\alpha(t) \# \theta_0\exp(-\gamma t)$

on prendra $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.

Justifier les approximations envisagées et donner l'expression de l'énergie mécanique $E(t)$.

c. On définit un espace de phases $(\theta', \dot{\theta}')$ en termes de variables réduites :

$t' = \omega t$; $\theta'(t') = \left(\frac{\theta(t)}{\theta_0}\right)$ et $\dot{\theta}'(t') = \frac{d\theta'}{dt'}$.

Représenter les différentes trajectoires possibles selon les valeurs du paramètre γ, tout en restant dans le cadre des petits mouvements.

3. Pour décrire un oscillateur entretenu, on modifie le modèle en supposant maintenant que le paramètre γ est une fonction de θ. On écrira :

$$\gamma(\theta) = \gamma_0[1 - \beta^2\theta^2].$$

L'équation du mouvement devient :

$$\ddot{\theta} + \gamma(\theta)\dot{\theta} + \omega^2\theta = 0.$$

On définit les variables réduites $t' = \omega t$, $y(t') = \theta(t)$.

On pose $\varepsilon = \frac{\gamma_0}{\omega}$ et $\theta_1 = \frac{1}{\beta}$.

On appelle « énergie » la quantité $E' = \frac{1}{2}(\dot{y}^2 + y^2)$ où $\dot{y}$ représente la dérivée $\frac{dy}{dt'}$.

a. Exprimer la quantité $\frac{dE'}{dt'}$ en fonction de ε, β, y et $\dot{y}$. Commenter le résultat obtenu pour $\varepsilon < 0$, inégalité que l'on supposera vérifiée par la suite.

b. L'expérience montre que le système tend, dans l'espace des phases, vers une trajectoire fermée appelée cycle limite. Commenter.

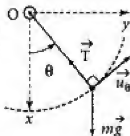
On se place, pour cette question, dans le cas où le paramètre $|\varepsilon|$ est suffisamment petit. Il est alors possible d'adopter pour le cycle la solution approchée $y(t') = \alpha\cos(t' + \varphi)$.

En déduire, dans ces conditions, l'expression de α en fonction de θ_1, et dessiner l'allure des trajectoires de phase dans l'espace $u(t') = \frac{y(t')}{2\theta_1}$, $\frac{du}{dt'}$ avec $\frac{du}{dt'}(0) = 0$.

c. Que se passe-t-il pour $|\varepsilon|$ ne vérifiant pas la condition du **b.** ?

Solution

1. Appliquons le théorème du moment cinétique au point fixe O du référentiel galiléen d'étude, le mouvement de la masse m s'effectuant dans le plan vertical Oxy (sa trajectoire s'inscrit sur le cercle de centre O et de rayon l).



On a $\frac{d\vec{\sigma}(O)}{dt} = \vec{\mathcal{M}}(O) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} + \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{g} = -mgl\sin\theta\vec{u}_z$.

Or $\vec{\sigma}(O) = ml^2\dot{\theta}\vec{u}_z \Rightarrow ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta$.

Et $$\boxed{\ddot{\theta} + \omega^2\sin\theta = 0} \quad (1)$$

On a posé $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ **pulsation propre de l'oscillateur.**

Dans le cas de petits mouvements, on peut linéariser l'équation (1) en confondant $\sin\theta$ avec θ. Nous obtenons :

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0 \quad (2)$$

L'énergie mécanique du système se définit ici par la somme de l'énergie cinétique E_c de la masse m $\left(E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2\right)$ et de son énergie potentielle de pesanteur E_p.

Or $E_p = -mgx + \text{constante} = -mgl\cos\theta + \text{constante}$.

Soit avec $E_p(\theta = 0) = 0$ (origine de l'énergie potentielle au point le plus bas de la trajectoire de la particule) :

$$E_p = mgl(1 - \cos\theta).$$

D'où une énergie mécanique $E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos\theta)$. Lorsque θ reste suffisamment faible (petits mouvements), on peut substituer $\frac{1}{2}\theta^2$ à $1 - \cos\theta$, ce qui donne :

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\frac{\theta^2}{2} \Rightarrow \boxed{E = ml^2\left[\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\omega^2\theta^2\right]} \quad (3)$$

Remarquons qu'en dérivant (3), nous obtenons l'équation (2).

2. a. Appliquons ici le théorème de la puissance cinétique, l'énergie mécanique ayant été définie à la question précédente. Il vient :

$$\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_\Gamma = \overrightarrow{\mathcal{M}_f}(\mathrm{O})\cdot\dot{\theta}\vec{u}_z = -ml^2\gamma\dot{\theta}^2.$$

On a donc : $$\boxed{\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}t} = -ml^2\gamma\dot{\theta}^2} \quad (4)$$

2. b. On suppose maintenant que l'évolution du système est, à chaque instant, très proche du régime d'oscillations sinusoïdales de l'oscillateur non amorti. Cela implique bien évidemment que le coefficient γ reste suffisamment faible. Dès lors, on envisage une solution approchée :

$$\theta(t) = \alpha(t)\cos(\omega t + \varphi) \quad \text{(signal quasi-sinusoïdal).}$$

À cette approximation, ω reste la pulsation de l'oscillateur non amorti et $\alpha(t)$ doit varier avec une échelle de temps τ très grande devant $\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega}$. *On considérera donc que $\alpha(t)$ est « constant » sur « une pseudo-période ».*

Intégrons alors l'équation (4) sur un intervalle de temps $\Delta t = \mathrm{T}$:

$$\frac{1}{\mathrm{T}}\int_{t_0}^{t_0+\mathrm{T}}\left(\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t = -ml^2\gamma\frac{1}{\mathrm{T}}\int_{t_0}^{t_0+\mathrm{T}}\dot{\theta}^2(t)\mathrm{d}t \quad (5)$$

À l'échelle de T, les variations de $\theta(t)$ sont essentiellement imposées par le terme sinusoïdal $\cos(\omega t + \varphi)$ de telle sorte que :

$$\dot{\theta}(t) \# -\alpha(t)\omega\sin(\omega t + \varphi) \text{ avec } \alpha(t) = \text{cste} = \alpha(t_0)$$

et $$\frac{1}{\mathrm{T}}\int_{t_0}^{t_0+\mathrm{T}}\dot{\theta}^2(t)\mathrm{d}t \# \alpha^2(t_0)\omega^2\left\{\frac{1}{\mathrm{T}}\int_{t_0}^{t_0+\mathrm{T}}\sin^2(\omega t + \varphi)\mathrm{d}t\right\}$$

l'accolade correspond à la valeur moyenne de $\sin^2(\omega t + \varphi)$, elle ne dépend pas de t_0, et elle vaut $\frac{1}{2}$. On a donc : $-ml^2\gamma\frac{1}{\mathrm{T}}\int_{t_0}^{t_0+\mathrm{T}}\dot{\theta}^2(t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}ml^2\gamma\alpha^2(t_0)\omega^2$

quant à la première intégrale elle s'exprime sous la forme :

$$\frac{1}{\mathrm{T}}\int_{t_0}^{t_0+\mathrm{T}}\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{E}(t_0+\mathrm{T}) - \mathrm{E}(t_0)}{\mathrm{T}}.$$

Or $\mathrm{E}(t) = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \theta^2\omega^2)$, et à la même approximation :

$$\mathrm{E}(t) \# \frac{1}{2}ml^2[\alpha^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi) + \alpha^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi)] = \frac{1}{2}ml^2\alpha^2\omega^2.$$

D'où $$\frac{1}{\mathrm{T}}\int_{t_0}^{t_0+\mathrm{T}}\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \# \frac{1}{2}ml^2\omega^2\left[\frac{\alpha^2(t_0+\mathrm{T}) - \alpha^2(t_0)}{\mathrm{T}}\right].$$

La fonction $\alpha(t)$ variant très peu sur l'intervalle $\Delta t = \mathrm{T}$ on peut confondre la quantité entre crochets avec la dérivée par rapport au temps t_0 de la grandeur $\alpha^2(t_0)$; dès lors l'équation (5) devient :

$$\frac{1}{2}ml^2\omega^2\frac{\mathrm{d}(\alpha^2)}{\mathrm{d}t_0} = -\frac{1}{2}ml^2\gamma\alpha^2(t_0)\omega^2.$$

Soit après simplifications : $\frac{d(\alpha^2)}{dt_0} = -\gamma\alpha^2(t_0) \Rightarrow \frac{d(\alpha^2)}{\alpha^2} = -\gamma dt_0.$

Une simple intégration donne : $\alpha^2(t_0) = \alpha^2(0)\exp[-\gamma t_0]$.

Avec les conditions initiales $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$ nous avons :

$$\alpha(0)\cos\varphi = \theta_0 \text{ et } \alpha(0)\omega\sin\varphi = 0$$

ce qui permet de prendre $\varphi = 0$ et $\alpha(0) = \theta_0$.

Finalement $\alpha^2(t_0) = \theta_0^2\exp[-\gamma t_0] \Rightarrow \boxed{\alpha(t_0) \# \theta_0\exp\left(-\frac{t_0}{\tau}\right)}$ avec $\tau = \frac{2}{\gamma}$.

Soit $$\theta(t) \# \theta_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos\omega t.$$

Ainsi les approximations envisagées seront d'autant plus acceptables que l'on a $\tau \gg T$, soit encore $\frac{\gamma}{\omega} \ll 1$.

Enfin $E(t) \# \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \omega^2\theta^2) \# \frac{1}{2}ml^2\alpha^2(t)\omega^2$.

Soit $\boxed{E(t) \# E(0)\exp(-\gamma t)}$ avec $E(0) = \frac{1}{2}ml^2\omega^2\theta_0^2$.

2. c. D'après les résultats précédents, nous avons :

$$E(t) = E(0)e^{-\gamma t} \Rightarrow \dot{\theta}^2 + \omega^2\theta^2 = \omega^2\theta_0^2 e^{-\gamma t} \quad (6)$$

Considérons alors les variables réduites t', θ' définies par :

$$t' = \omega t,\ \theta'(t') = \frac{\theta(t)}{\theta_0} \text{ et } \dot{\theta}' = \frac{d\theta'}{dt'}.$$

D'où $$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \theta_0\frac{d\theta'}{dt'}\cdot\frac{dt'}{dt} = \theta_0\omega\dot{\theta}'.$$

L'équation (6) devient

$$\theta_0^2\omega^2(\dot{\theta}')^2 + \omega^2\theta_0^2\theta'^2 = \omega^2\theta_0^2 e^{-\frac{\gamma}{\omega}t'}.$$

Soit $$\dot{\theta}'^2 + \theta'^2 = \exp\left[-\frac{\gamma}{\omega}t'\right].$$

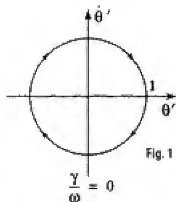


Fig. 1

Dans l'espace des phases (en terme de variables réduites), le point figuratif suit une trajectoire qui prend la forme :

– d'un cercle (fig. 1) lorsque $\gamma = 0$: $OM = \sqrt{\dot{\theta}'^2 + \theta'^2} = 1$

– d'une spirale (fig. 2) aboutissant au point O pour $\gamma > 0$ (cas de l'amortissement) : $OM = \exp\left[-\frac{\gamma}{2\omega}t'\right]$;

– d'une spirale (fig. 3) s'écartant du point O si l'on envisageait des valeurs de γ négatives (« amortissement » → amplification du mouvement).

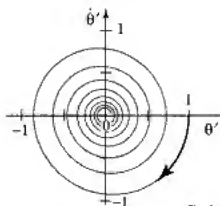


Fig. 2

$\frac{\gamma}{\omega} = +0{,}1 \quad \theta'(0) = 1$

$\dot{\theta}'(0) = 0$

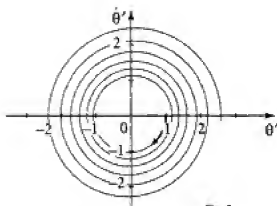


Fig. 3

$\frac{\gamma}{\omega} = -0{,}05 \quad \theta'(0) = 1$

$\dot{\theta}'(0) = 0$

Remarques

• Pour $\gamma > 0$, toutes les trajectoires, dans l'espace de phase, finissent par aboutir au point $(0, 0)$ qui constitue un attracteur.

• L'équation du mouvement s'écrit $\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + \omega^2\theta = 0$. On a donc $\ddot{\theta}(0^+) = -\omega^2\theta(0^+)$ pour $\dot{\theta}(0^+) = 0$, d'où $\ddot{\theta}'(0^+) = -\theta'(0^+)$. Il en résulte que $\dot{\theta}'$ devient négatif dans un voisinage de $t = 0^+$...

3. a. « L'énergie » est définie par l'expression $E' = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dy}{dt'}\right)^2 + y^2\right]$.

Sa dérivée devient : $\frac{dE'}{dt'} = \frac{dy}{dt'} \cdot \left[\frac{d^2y}{dt'^2} + y\right]$.

Or d'après la définition des variables réduites, nous avons :

$\frac{dy}{dt'} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'} = \frac{1}{\omega}\frac{d\theta}{dt}$; de même $\frac{d^2y}{dt'^2} = \frac{1}{\omega^2}\frac{d^2\theta}{dt^2}$.

D'où
$$\frac{dE'}{dt'} = \frac{dy}{dt'} \cdot \left[\frac{1}{\omega^2}\frac{d^2\theta}{dt^2} + \theta\right].$$

Soit avec l'équation du mouvement $\ddot{\theta} + \omega^2\theta = -\gamma(\theta)\dot{\theta}$

$$\frac{dE'}{dt'} = -\frac{\gamma(\theta)}{\omega^2}\frac{dy}{dt'} \cdot \left(\omega\frac{dy}{dt'}\right) = -\varepsilon(1 - \beta^2\theta^2)\left(\frac{dy}{dt'}\right)^2.$$

D'où
$$\boxed{\frac{dE'}{dt'} = -\varepsilon(1 - \beta^2y^2)\left(\frac{dy}{dt'}\right)^2} \quad (7)$$

Commentaires

Cette équation peut se réécrire sous la forme :

$$\frac{dE'}{dt'} = \underbrace{-\varepsilon\dot{y}^2}_{(I)} + \underbrace{\varepsilon\beta^2y^2\dot{y}^2}_{(II)} \qquad \text{où} \quad \dot{y} = \frac{dy(t')}{dt'}.$$

Pour un coefficient $\varepsilon < 0$, le second terme correspond à une dissipation d'énergie alors que le premier est associé à un apport continuel d'énergie permettant d'assurer l'entretien de l'oscillateur.

De plus, le rapport $\left|\frac{\text{II}}{\text{I}}\right| = \beta^2 y^2$ dépend de « l'amplitude » $y(t')$; ainsi, les mouvements de faible amplitude seront caractérisés par des oscillations croissantes alors que ceux de grande amplitude verront leurs oscillations décroître.

3. b. L'existence d'un cycle limite s'interprète en considérant que les termes (I) et (II), d'apport et de dissipation d'énergie ($\varepsilon < 0$), doivent se compenser en moyenne. Ce qui se traduit en désignant par le symbole < > les valeurs moyennes calculées sur le cycle attracteur :

$$<\frac{\mathrm{d}E'}{\mathrm{d}t'}> = -\varepsilon[<\dot{y}^2> - <\beta^2 y^2 \dot{y}^2>].$$

Or sur un cycle, le premier terme est nul puisque :

$\int_0^{\tau'} \frac{\mathrm{d}E'}{\mathrm{d}t'}\mathrm{d}t' = E'(\tau') - E'(0) = 0$ (après un cycle, le système repasse par le même état et possède donc la même énergie).

Dès lors, le bilan d'énergie implique l'égalité :

$$<\dot{y}^2> = <\beta^2 y^2 \dot{y}^2> \qquad (8)$$

Pour $|\varepsilon| = \left|\frac{\gamma_0}{\omega}\right|$ suffisamment petit, on pose $y(t') \# \alpha\cos(t' + \varphi)$. Reportons cette expression dans (8) :

$$<\dot{y}^2> = \frac{1}{\tau'}\int_0^{\tau'} \alpha^2\sin^2(t' + \varphi)\mathrm{d}t'.$$

Soit $$<\dot{y}^2> = \alpha^2 <\sin^2(t' + \varphi)>_{1\,\text{cycle}} = \frac{1}{2}\alpha^2.$$

De même $$<\beta^2 y^2 \dot{y}^2> = \beta^2\alpha^4 <\cos^2(t' + \varphi)\sin^2(t' + \varphi)>$$

$$= \frac{1}{4}\beta^2\alpha^4 <\sin^2(2t' + \varphi)> = \frac{1}{8}\beta^2\alpha^4.$$

L'équation énergétique (2) se traduit alors par :

$$\frac{1}{2}\alpha^2 = \frac{1}{8}\beta^2\alpha^4 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{4}{\beta^2} \text{ et } \alpha = 2\theta_1.$$

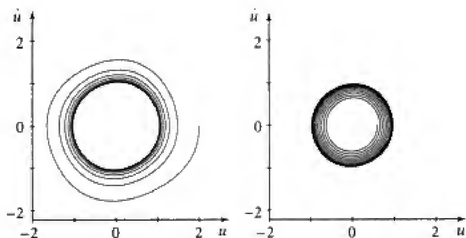
Soit à l'approximation considérée :

$$y(t') = 2\theta_1\cos(t' + \varphi) \text{ et } \theta(t) \# 2\theta_1\cos(\omega t + \varphi).$$

La trajectoire limite, dans l'espace des phases associé aux variables réduites $y(t')$ et $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t'}(t')$, est donc un cercle de rayon $2\theta_1$. Le système présente dans ce cas un **attracteur cyclique.**

On a tracé ci-dessous différentes trajectoires respectant les hypothèses retenues dans cet exercice (notamment $|\varepsilon|$ suffisamment petit) avec $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.

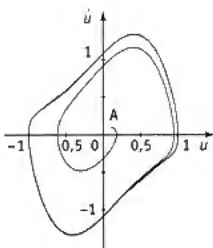
On a porté sur les axes les variables $u = \frac{y}{2\theta_1}$ et $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t'} = \frac{1}{2\theta_1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t'}$, le cercle limite ayant alors un rayon unité.

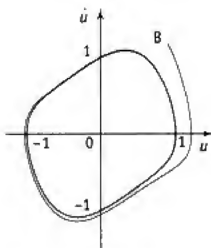


$\varepsilon = -0{,}05 \quad u(0) = 2 \quad \dot{u}(0) = 0$ $\qquad \varepsilon = -0{,}05 \quad u(0) = 0{,}6 \quad \dot{u}(0) = 0$

3. c. La trajectoire du système, dans l'espace des phases, va toujours tendre vers un cycle limite *indépendant des conditions initiales*. Mais ce cycle ne sera plus circulaire dans l'espace $(u, \dot{u})$.

On donne ci-après les portraits de phase en coordonnées $(u, \dot{u})$ où $u(t') = \dfrac{\theta(t)}{2\theta_1}$ et $\dot{u}(t') = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t'}$:

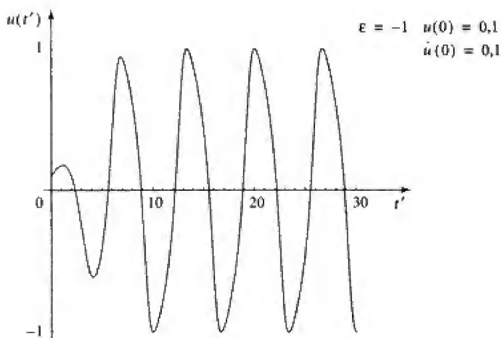


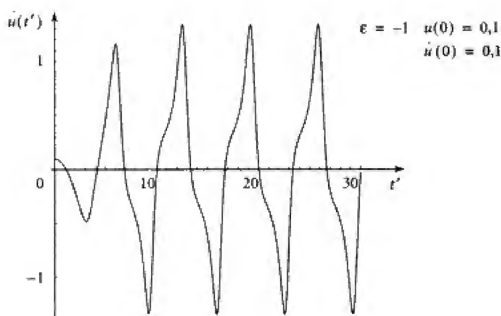


$\varepsilon = -1 \quad u(0) = 0{,}1$
$\dot{u}(0) = 0{,}1$

$\varepsilon = -0{,}5 \quad u(0) = 0{,}9$
$\dot{u}(0) = 1{,}2$

On donne également les courbes correspondantes de $y(t')$ montrant clairement l'influence des termes non linéaires dans l'équation de mouvement ($y(t')$ n'est pas sinusoïdal).


$u(t')$
1
0
10
20
30
t'
−1
$\varepsilon = -1 \quad u(0) = 0{,}1$
$\dot{u}(0) = 0{,}1$


$\dot{u}(t')$
1
0
10
20
30
t'
−1
$\varepsilon = -1 \quad u(0) = 0{,}1$
$\dot{u}(0) = 0{,}1$

B. Forces centrales et systèmes de deux points matériels

5.11 Demi-ellipse dite de transfert

Un satellite de masse m tourne autour de la Terre sur une orbite circulaire (orbite « basse », rayon r_1, vitesse du satellite V_1), on veut le transférer sur une autre orbite circulaire (orbite « haute », rayon r_2, vitesse V_2). Pour cela, on lui fait décrire une demi-ellipse (dite « orbite de transfert ») dont un des foyers est le centre de la Terre, et qui se raccorde tangentiellement aux deux orbites circulaires précédentes. On allume donc les propulseurs du satellite pendant une durée brève au début et à la fin de cette demi-ellipse, ce qui correspond à communiquer à chaque fois au satellite un supplément de vitesse (sans changement de sa direction) de façon quasi-instantanée.

Calculer ces suppléments de vitesse.

On donne : $r_1 = 6{,}70 \cdot 10^3$ km ; $r_2 = 42{,}0 \cdot 10^3$ km;

rayon terrestre $R = 6{,}40 \cdot 10^3$ km ;

pesanteur au niveau du sol : $g = 9{,}8$ m $\cdot$ s^{-2}.

1. Ce qu'il faut savoir

- Forces centrales.
- Gravitation.

2. Ce qu'il faut comprendre

Le calcul des vitesses V_1 et V_2 ne présente pas de difficultés, le produit $\mathcal{G}M$ de la force de gravitation $\vec{f}_G = -\dfrac{\mathcal{G}mM}{r^2}\vec{u}$ étant déterminé à partir du poids d'un corps au voisinage du sol (en négligeant l'effet de la rotation de la Terre sur la valeur de g).

On utilisera les lois de conservation de l'énergie et du moment cinétique pour calculer les vitesses nécessaires au début et à la fin de l'orbite de transfert.

3. Solution

Appliquons au satellite en orbite circulaire le théorème du centre d'inertie :

$$m\vec{A} = \vec{f}_G.$$

L'accélération est purement normale soit : $\dfrac{mV^2}{r} = \left\|\vec{f}_G\right\| = \dfrac{\mathcal{G}Mm}{r^2}$

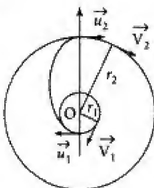
$$V^2 = \frac{\mathcal{G}M}{r}.$$

> **POINT COURS**
> **Déterminons le produit $\mathcal{G}M$ en écrivant que le poids d'un corps – au voisinage du sol – est essentiellement dû à la force de gravitation :**
> $$mg \# \frac{\mathcal{G}Mm}{R_T^2}$$
> d'où $$\mathcal{G}M = g \cdot R_T^2.$$

Et en reportant $V_1 = R_T\sqrt{\frac{g}{r_1}} \quad V_2 = R_T\sqrt{\frac{g}{r_2}}$

d'où numériquement :

$$V_1 = 7{,}74 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \quad V_2 = 3{,}09 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$



Moteurs éteints, l'ellipse de transfert est décrite sous le seul effet de la force de gravitation terrestre.

La vitesse au départ de la demi-ellipse (au périgée) vaut u_1 ($u_1 > V_1$), et elle vaut u_2 ($u_2 < V_2$) à l'autre extrémité de l'orbite de transfert qui correspond à l'apogée : en effet le périgée et l'apogée sont les seuls points d'une trajectoire elliptique où la vitesse est orthogonale au rayon vecteur.

L'énergie mécanique se conserve sur cette trajectoire :

$$E_m = \frac{1}{2}mu_1^2 - \frac{\mathcal{G}Mm}{r_1} = \frac{1}{2}mu_2^2 - \frac{\mathcal{G}Mm}{r_2}.$$

Soit en remplaçant $\mathcal{G}M$ par $g R_T^2$:

$$u_1^2 - \frac{2g R_T^2}{r_1} = u_2^2 - \frac{2g R_T^2}{r_2} \quad (1)$$

La conservation du moment cinétique donne :

$$C = r_1 u_1 = r_2 u_2 \quad (2)$$

De (1) et (2) on tire : $u_1^2\left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right] = 2g R_T^2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$

$$u_1^2 \cdot r_1\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right) = 2g R_T^2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$u_1^2 \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdot (r_1 + r_2) = 2g R_T^2 \quad (r_1 \neq r_2).$$

Soit $u_1 = R_T\sqrt{\frac{2gr_2}{r_1(r_1 + r_2)}}$

et symétriquement $u_2 = R_T\sqrt{\frac{2g r_1}{r_2(r_1 + r_2)}}$.

Numériquement $u_1 = 10{,}16 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \quad u_2 = 1{,}62 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

On en déduit les suppléments de vitesse cherchées :

$$\Delta V_1 = u_1 - V_1 = 2{,}42\ \text{km} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\Delta V_2 = V_2 - u_2 = 1{,}47\ \text{km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Commentaire

Les deux mises en marche des propulseurs correspondent effectivement à des augmentations de vitesse ($u_1 > V_1$ et $V_2 > u_2$).
C'était prévisible, car l'ellipse de transfert est extérieure à la première orbite circulaire – ce qui correspond à une énergie mécanique plus élevée – alors que c'est la situation inverse pour la deuxième orbite circulaire.

512 Écart à la satellisation sur orbite circulaire

1. Un satellite décrit une orbite circulaire de rayon r_0 autour du centre O de la Terre. Celle-ci a une masse M, et la constante de gravitation est notée $\mathcal{G}$.

Calculer la vitesse V_0 du satellite ainsi que son énergie mécanique.

2. On suppose maintenant qu'un satellite a été lancé en un point $M_0(OM_0 = r_0)$ avec une vitesse $\vec{V}$ de module V_0 (calculé au **1.**) et telle que $(\overrightarrow{OM_0}, \vec{V}) = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Déterminer les caractéristiques de l'orbite décrite par ce satellite.

On rappelle que pour une trajectoire elliptique d'équation en coordonnées polaires $r = \dfrac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$:

- le paramètre p est défini selon $p = \dfrac{C^2}{\mathcal{G}M}$ ($C = \dfrac{\sigma_0}{m}$, $\vec{\sigma_0}$ = moment cinétique en O).
- p, l'excentricité e, et le demi-grand axe a sont liés par la relation $a = \dfrac{p}{1 - e^2}$.

1. Ce qu'il faut savoir

- Forces centrales.
- Gravitation.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. Si le mouvement est circulaire, il est uniforme. L'accélération est normale.

2. À l'instant $t = 0$, le satellite est lancé à la même distance que précédemment et le module de sa vitesse est le même, donc l'énergie mécanique garde la même valeur : elle est négative, et la trajectoire est elliptique dans le plan défini par $\overrightarrow{OM_0}$ et $\overrightarrow{V_0}$. Le moment cinétique est modifié, ce qui donne la nouvelle valeur du paramètre p.

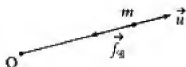
3. Solution

D'après le théorème du centre d'inertie du satellite de masse m

$$m\vec{A} = \vec{f}_{\mathcal{G}} = -\frac{\mathcal{G}Mm}{r_0^2}\vec{u}$$

or $\vec{A} = -\frac{V_0^2}{r_0}\vec{u}$

d'où $-m\frac{V_0^2}{r_0} = -\frac{\mathcal{G}Mm}{r_0^2}$



et $\boxed{V_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M}{r_0}}}$ (1)

L'énergie mécanique s'écrit $E_m = -\frac{\mathcal{G}Mm}{r_0} + \frac{1}{2}mV_0^2$.

Soit encore $E_m = -\frac{1}{2}\frac{\mathcal{G}Mm}{r_0} = -\frac{1}{2}mV_0^2 = -E_c$.

Commentaire

On trouve bien évidemment une énergie négative caractéristique d'un état lié (le satellite est sur orbite, il ne peut partir à l'infini).

2. Le satellite a toujours la même énergie mécanique (mêmes valeurs de r_0 et V_0). Cette énergie est négative. On a donc toujours un état lié. Mais $\overrightarrow{V_0}$ n'est plus perpendiculaire à $\overrightarrow{OM_0}$, la trajectoire est donc une ellipse.

La force de gravitation est une force centrale. Il y a conservation du moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_0}$ d'après le théorème du moment cinétique : $\frac{d\overrightarrow{\sigma_0}}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{\vec{f}/O} = \vec{0}$,

$C = \frac{\sigma_0}{m}$ est une constante dite constante des aires.

Ici $\sigma_0 = mr_0V_0\cos\alpha$;

$C = r_0V_0\cos\alpha$.



Or $p = \frac{C^2}{\mathcal{G}M}$, d'où $p = \frac{r_0^2V_0^2\cos^2\alpha}{\mathcal{G}M} = \frac{r_0^2V_0^2\cos^2\alpha}{r_0V_0^2}$

$$\boxed{p = r_0\cos^2\alpha}$$

• Déterminons maintenant le demi-grand axe a de l'ellipse.

Pour un satellite décrivant une orbite elliptique, $E_m = -\frac{\mathscr{G}Mm}{2a}$.

En identifiant avec l'expression de l'énergie mécanique obtenue au **1.** et toujours valable :

$$-\frac{1}{2}\frac{\mathscr{G}Mm}{r_0} = -\frac{\mathscr{G}Mm}{2a} \Rightarrow \boxed{a = r_0}$$

Et en reprenant l'équation de l'ellipse, on obtient :

pour le périgée $r_P = \frac{p}{1+e}$; pour l'apogée $r_A = \frac{p}{1-e}$

soit $r_P + r_A = 2a = \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} = \frac{2p}{1-e^2}$ (expression fournie par l'énoncé).

Soit $1 - e^2 = \frac{p}{a} = \cos^2\alpha$.

L'excentricité étant positive, $e = |\sin\alpha|$.

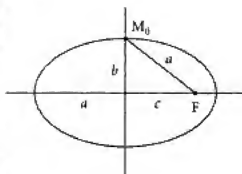
Commentaire

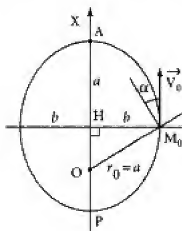
On retrouve bien dans le cas du cercle $e = 0$ pour $\alpha = 0$.

Pour situer les axes de l'ellipse par rapport à la direction OM_0 du point de lancement, on peut remarquer que les seuls points de l'ellipse à la distance a d'un foyer sont les extrémités du petit axe :

$$(a^2 = b^2 + c^2).$$

Et qu'en ces points, la tangente à l'ellipse est parallèle au grand axe : la direction du grand axe est donc la parallèle en O à $\vec{V_0}$, ce qui permet de construire les axes de l'ellipse cherchée à partir de $\overrightarrow{OM_0}$ et $\vec{V_0}$:





$OX // V_0$
$M_0H \perp OX$
$HP = HA = r_0$
P : périgée
A : apogée

 Comète quasi-parabolique de 1843

La Terre décrit autour du Soleil – de centre S – une orbite pratiquement circulaire de rayon $a_0 = 1{,}5 \cdot 10^8$ km, à la vitesse $V_T = 30\ \text{km} \cdot \text{s}^{-1}$.

En 1843, une comète ($\mathscr{C}$) est passée extrêmement près du Soleil : distance au périhélie $SP = d = 6{,}1 \cdot 10^{-3} a_0$.

1. En considérant que l'orbite de ($\mathscr{C}$) est parabolique, calculer la vitesse maximale V_{max} de la comète.

2. Des mesures précises ont montré que l'orbite de ($\mathscr{C}$) était en fait une ellipse d'excentricité $e = 1 - x$, avec $x = 9{,}4 \cdot 10^{-5}$ (on considérera donc que $x \ll 1$).

a. Jusqu'à quelle distance D la comète va-t-elle s'éloigner du Soleil ? Évaluer sa vitesse à cette distance.

b. En quelle année reviendra-t-elle ?

Rappel : pour une trajectoire elliptique, on a $a = \dfrac{p}{1-e^2}$ (p ≡ paramètre de l'ellipse) e ≡ excentricité ; a ≡ demi-grand axe).

c. Estimer l'incertitude relative commise sur la valeur de V_{max}, en adoptant l'hypothèse du **1.** Conclure.

1. Ce qu'il faut savoir

- Mouvement circulaire.
- Énergie mécanique et force centrale newtonienne.
- Troisième loi de Kepler.

2. Ce qu'il faut comprendre

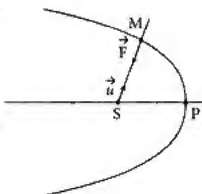
1. La constante K intervenant dans l'expression de l'énergie potentielle de gravitation $E_p = -\dfrac{mK}{r}$ sera calculée à partir des données concernant l'orbite terrestre.

2. La connaissance de l'excentricité e et de la distance au périhélie $d = \dfrac{p}{1+e}$ permet de calculer le paramètre p de l'ellipse, puis la distance à l'aphélie D : les caractéristiques de l'ellipse sont alors complètement connues… La date de son retour pourra se déduire simplement de la 3ᵉ loi de Kepler, en comparant la période T de la comète à la période T_0 de la Terre…

3. Solution

1. La comète est essentiellement soumise à la force attractive due à son interaction gravitationnelle avec le Soleil :

$$\vec{F} = -\frac{mK}{r^2}\vec{u} \quad (r = SM, \text{ et } K = \mathscr{G}M_S).$$



La trajectoire étant parabolique, l'énergie mécanique de la comète est nulle, soit :

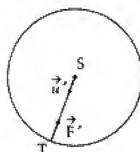
$$E_m = 0 = E_c + E_p = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{mK}{r}.$$

On a donc : $V^2 = \frac{2K}{r}$.

Et la vitesse est maximale pour r minimal, c'est-à-dire lorsque la comète passe au point P de sa trajectoire ($r = SP = d$).

Finalement on a : $V_{max} = \sqrt{\frac{2K}{d}}$ (1)

Pour calculer le coefficient K, il suffit d'exprimer que la Terre de masse M_T décrit, autour du Soleil, une orbite pratiquement circulaire de rayon a_0, à la vitesse V_T (mouvement circulaire uniforme). On a donc :



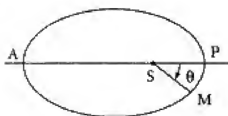
$$M_T\overrightarrow{A_T} = \overrightarrow{F'} = -M_T\frac{K}{a_0^2}\vec{u}',$$

or $\overrightarrow{A_T} = -\frac{V_T^2}{a_0}\vec{u}' \Rightarrow V_T^2 = \frac{K}{a_0}$ (2)

Reportant (2) dans (1), il vient :

$$\boxed{V_{max} = V_T\sqrt{\frac{2a_0}{d}}} \quad \text{et} \quad V_{max} = 543\ \text{km}\cdot\text{s}^{-1}.$$

2. a. L'équation de la trajectoire dans son plan est donnée, en coordonnées polaires, par :



$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos\theta.$$

La distance au périhélie (point P) s'en déduit :

$$r_P = \frac{p}{1+e} \quad \text{(faire } \theta = 0\text{)}$$

celle à l'aphélie (point A : $\theta = \pi$) : $r_A = \frac{p}{1-e}$.

La distance D cherchée correspond donc au point A : $D = \frac{p}{1-e}$.

Le paramètre p se déduit de $SP = d = \frac{p}{1+e}$.

On a donc : $D = d\frac{1+e}{1-e}$

or $e = 1 - x$, avec $x \ll 1 \Rightarrow \boxed{D \approx \frac{2d}{x}}$

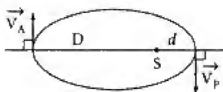
Application numérique :

$$D = 130a_0 \Rightarrow D \# 19{,}5 \cdot 10^9\ \text{km}.$$

2. b. Pour calculer la vitesse de la comète à cette distance, remarquons que périhélie et aphélie sont les deux points de la trajectoire où la vitesse est orthogonale au rayon vecteur. La conservation du moment cinétique donne, en exprimant en ces deux points la constante C de la loi des aires :

$$C = V_P d = V_A D$$

d'où la vitesse cherchée : $V_A = V_P \frac{d}{D}$.



La trajectoire elliptique ayant une excentricité proche de 1, il est possible de substituer à la vraie valeur de V celle calculée au **1.** dans le cas de la trajectoire parabolique. Avec cette approximation, on obtient :

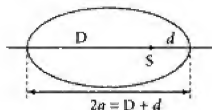
$$V_A \# \frac{d}{D} V_{max} \# V_T \frac{d}{D} \sqrt{\frac{2a_0}{d}} \Rightarrow V_A \# V_T x \sqrt{\frac{a_0}{2d}}.$$

Application numérique : $V_A \approx 25{,}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

> **POINT COURS**
>
> **La période T se déduit de la troisième loi de Kepler. Pour des « satellites » (de masse m) du Soleil (de masse M_S), on a (pour des états liés : orbites circulaires ou elliptiques) :**
>
> $$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}(M_S + m)}$$ **(a : demi-grand axe ; $\mathcal{G}$: constante de gravitation).**
>
> **Et dans le cas où $m \ll M_S \Rightarrow \frac{T^2}{a^3} \approx \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_S} = \frac{4\pi^2}{K}$.**

Appliquons cette dernière relation à la comète (sur sa trajectoire elliptique) et à la Terre (sur sa trajectoire quasi circulaire) :

$$\frac{T^2}{\left(\frac{D+d}{2}\right)^3} = \frac{T_0^2}{a_0^3} = \frac{4\pi^2}{K}.$$



D'où $T = T_0 \left(\frac{D+d}{2a_0}\right)^{3/2}$

or $D + d = \frac{p}{1-e} + \frac{p}{1+e} = \frac{2p}{1-e^2} = 2d\frac{1+e}{1-e^2} = 2\frac{d}{1-e} = \frac{2d}{x}$

soit $$\boxed{T = T_0 \left(\frac{d}{x \cdot a_0}\right)^{3/2}}$$

Application numérique : $T = 523 T_0 = 523$ ans.

Son retour aura donc lieu, en principe, en 2366 !

2. c. Dans l'hypothèse d'une trajectoire parabolique ($e = 1$), on aurait :

$$E_c = \frac{Km}{d} = \frac{1}{2}mV_{max}^2 \quad (E_m = 0 = E_c + E_p).$$

Pour la trajectoire réelle (ellipse d'excentricité $e = 1 - x$ avec $x \ll 1$), il vient :

$$E'_m = E'_c + E'_p = -\frac{mK}{2a} \quad (a : \text{demi-grand axe}).$$

Or on a établi (*cf.* **2. b.**) que $a = \frac{D+d}{2} = \frac{d}{x}$ d'où :

$$E'_c + E'_p = -\frac{mKx}{2d}.$$

Au périhélie (point P) : $E'_p = -\frac{mK}{d} \Rightarrow E'_c\,(P) = \frac{mK}{d}\left(1 - \frac{x}{2}\right).$

Soit une vitesse maximale telle que $\frac{1}{2}mV'^2_{max} = \frac{mK}{d}\left(1 - \frac{x}{2}\right).$

La valeur réelle V'_{max} est reliée à la valeur approchée V_{max} selon :

$$V'^2_{max} = V^2_{max}\left(1 - \frac{x}{2}\right)$$

et en tenant compte du fait $x \ll 1$: $V'_{max} \approx V_{max}\left(1 - \frac{x}{4}\right).$

Soit en valeur relative :

$$\boxed{\frac{V_{max} - V'_{max}}{V'_{max}} \# \frac{x}{4}} \quad = 2{,}4 \cdot 10^{-5}.$$

L'approximation faite en 2. a. pour calculer la vitesse de la comète à l'aphélie s'en trouve ainsi justifiée (on a confondu V'_{max} avec V_{max}).

514 Trajectoires de météorites

Un point matériel P de masse m est soumis à l'interaction d'une boule de centre F et de rayon R. Cette interaction est caractérisée par une énergie potentielle :



$$E_p = -\frac{K}{r} \quad (K > 0,\ r = FP).$$

On suppose que la boule reste fixe dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen de centre F, référentiel dans lequel s'effectuera l'étude qui suit.

À l'instant initial, la particule est à l'infini, elle est animée d'une vitesse $\vec{V}_0$ et présente un « paramètre d'impact » b (*cf.* figure ci-dessus).

1. Donner la condition pour que le point matériel P évite la boule. Commenter.

2. Déterminer l'équation de la trajectoire de P, et retrouver le résultat précédent.

Dans toute cette étude, on pourra poser $\eta = \dfrac{K}{mV_0^2 b}$.

Rappels : la trajectoire de la conique peut s'écrire $\dfrac{p}{r} = 1 + e\cos(\theta - \theta_1)$ où $p = \dfrac{L_0^2}{mK}$ ($\vec{L_0}$ moment cinétique en F). Son énergie mécanique E_m est reliée à l'excentricité e par l'expression :

$$E_m = \frac{mK^2}{2L_0^2}(e^2 - 1).$$

1. Ce qu'il faut savoir

Points de cours

- Forces centrales.
- Formules de Binet.
- Lois de conservation – constante du mouvement.

Outil mathématique

- Hyperbole (paramètre, foyer, excentricité…).

2. Ce qu'il faut comprendre

1. L'interaction masse m–boule est attractive, et la trajectoire hyperbolique (potentiel du type newtonien en $-\dfrac{K}{r}$) entoure le centre attracteur F. Pour que P évite la boule, il est donc nécessaire (mais évidemment pas suffisant) que le paramètre d'impact b soit supérieur à R, rayon de la boule.

D'autre part, pour b fixé (supérieur à R), si V_0 tend vers « l'infini », la trajectoire est « rectiligne » et $r_{min} = b$, et si V_0 est nulle la trajectoire devient une droite « passant » par F et $r_{min} = 0$: ainsi pour $0 < V_0 < \infty$, on a $0 < r_m < b$; il existe donc une valeur limite V_{0l} (à b fixé $> R$) telle que pour $V_0 > V_{0l}(b)$, la particule ne rencontre pas la boule.

2. Il faut déterminer les valeurs de p et e (paramètre et excentricité de l'hyperbole) ainsi que la valeur θ_1 de θ définissant la position de l'axe de l'hyperbole. p et e s'expriment à l'aide de formules du cours faisant intervenir les grandeurs L_0 (moment cinétique) et E. θ_1 sera défini à partir de la position initiale de la particule.

3. Solution

1.

Point méthode

Il ne s'agit pas ici de déterminer l'équation de la trajectoire (objet de la question **2.**) mais plutôt de déduire la condition cherchée des lois de conservation.

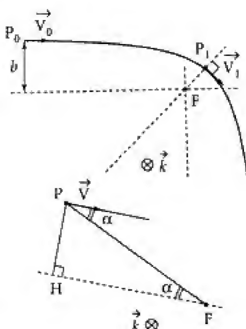
Il faudra donc traduire :

– la loi de conservation de l'énergie mécanique $E_m = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{K}{r}$;

– et celle du moment cinétique en F noté $\vec{L}$.

Si l'on désigne par P_1 le point de la trajectoire le plus proche de F (et $r_m = FP_1$), il suffit d'écrire que $r_m > R$ pour que le point matériel ne rencontre pas la boule.

Or en P_1 la vitesse $\vec{V}_1$ est nécessairement perpendiculaire à FP_1 puisque $\dot{r}(P_1) = 0$ (P_1 point le plus proche).



Calculons donc r_m :

• On a $\vec{L}(P_1) = \vec{L}_0$ avec

$\vec{L} = \vec{FP} \wedge m\vec{V} = mFP\|\vec{V}\|\sin\alpha\,\vec{k}$.

Or $FP\sin\alpha = HP \Rightarrow \vec{L} = mHP\|\vec{V}\|\vec{k}$.

Pour la position initiale, $HP = b$ et $\|\vec{V}\| = V_0$, d'où : $\vec{L}(P_1) = \vec{L}_0 = mbV_0\vec{k}$.

De plus

$\vec{L}(P_1) = mr_mV_1\vec{k} \Rightarrow r_mV_1 = bV_0$ (1)

• La conservation de l'énergie entre P_0 et P_1 se traduit par la relation :

$$\frac{1}{2}mV_1^2 - \frac{K}{r_m} = \frac{1}{2}mV_0^2 \quad (2)$$

Reportons dans (2) la valeur de V_1 tirée de (1) :

$$\frac{1}{2}m\frac{b^2V_0^2}{r_m^2} - \frac{K}{r_m} = \frac{1}{2}mV_0^2.$$

Soit encore $\quad r_m^2 + \frac{2K}{mV_0^2}r_m - b^2 = 0.$

D'où, en ne retenant que la solution physiquement acceptable ($r_m > 0$) :

$$r_m = -\frac{K}{mV_0^2} + \sqrt{\left(\frac{K}{mV_0^2}\right)^2 + b^2} \quad (3)$$

La condition cherchée s'écrit alors $r_m > R$, soit :

$$\left(\frac{K}{mV_0^2}\right)^2 + b^2 > \left(R + \frac{K}{mV_0^2}\right)^2$$

d'où $\quad b^2 > R^2 + \frac{2KR}{mV_0^2}$

c'est-à-dire $\quad \boxed{b > b_1 = R\sqrt{1 + \frac{2K}{RmV_0^2}}} \quad (4)$

Commentaires

• L'expression de $\frac{b_1}{R}$ ne fait intervenir que la grandeur $\eta = \frac{2K}{mRV_0^2}$ qui représente le rapport entre l'énergie potentielle $\left(|E_p| = \frac{K}{R}\right)$, pour $r = R$, du champ de force, et l'énergie cinétique initiale $\left(\frac{1}{2}mV_0^2\right)$:

$$\eta = \frac{K/R}{\frac{1}{2}mV_0^2}.$$

• Pour $\eta \ll 1$ et à la limite, $b_1 \sim R$: la particule n'étant pratiquement pas déviée, on a en effet, $r_m \sim b$ et $r_m > R$ implique bien $b_1 \approx R$.

• En conclusion, la boule sera évitée (pour R imposé) :

– à V_0 fixé pour : $b > b_1 = R\sqrt{1 + \frac{2K}{mV_0^2R}}$;

– à b fixé pour : $V_0 > V_{01} = \sqrt{\frac{2KR}{m(b^2 - R^2)}}$.

Il faut évidemment que $b > R$, sinon il y aura collision, et ceci quelle que soit la valeur de V_0.

2. La trajectoire est une hyperbole (branche infinie).

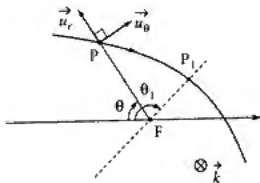
La particule P est soumise à un champ de force attractif en $\frac{1}{r}$ de centre F.

Ici, on a $E_m = E_0 = \frac{1}{2}mV_0^2 > 0$ d'où une trajectoire hyperbolique contournant le foyer F (potentiel attractif).

L'équation de cette trajectoire est donnée par :

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos(\theta - \theta_1)$$

p : paramètre ; e : excentricité (ici on a $e > 1$: hyperbole).



avec $p = \frac{L_0^2}{mK}$ soit $\boxed{p = \frac{mb^2V_0^2}{K}}$ et $e^2 = 1 + \frac{2L_0^2E_m}{mK^2}$.

Or $E_m = \frac{1}{2}mV_0^2$ d'où $e^2 = 1 + \frac{2mV_0^2b_0^2\frac{1}{2}mV_0^2}{K^2}$.

Finalement $\boxed{e^2 = 1 + \left(\frac{mV_0^2b}{K}\right)^2}$ (on a bien $e^2 > 1$).

L'équation de la trajectoire s'écrit alors :

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos\theta_1\cos\theta + e\sin\theta_1\sin\theta.$$

Pour $\theta = 0$, on doit avoir r infini, d'où : $1 + e\cos\theta_1 = 0 \Rightarrow e\cos\theta_1 = -1$.

D'autre part : $\quad e\sin\theta_1 = \sqrt{e^2 - e^2\cos^2\theta_1} = \sqrt{e^2 - 1} = \dfrac{mV_0^2 b}{K} \quad (\sin\theta_1 > 0).$

Dès lors $\quad \dfrac{p}{r} = (1 - \cos\theta) + \dfrac{mV_0^2 b}{K}\sin\theta$

$$\boxed{\frac{b}{r} = (1 - \cos\theta)\eta + \sin\theta} \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{K}{mV_0^2 b}.$$

• Retrouvons le résultat de la question **1.** À cet effet, nous devons calculer r_m qui correspond à :

$$r_m = \frac{p}{1+e} = \frac{\dfrac{mb^2V_0^2}{K}}{1 + \sqrt{\left(\dfrac{mV_0^2 b}{K}\right)^2 + 1}}.$$

Soit encore $\quad r_m = \dfrac{mb^2V_0^2}{K}\left[-1 + \sqrt{1 + \left(\dfrac{mV_0^2 b}{K}\right)^2}\right] \cdot \dfrac{1}{\left(\dfrac{mV_0^2 b}{K}\right)^2}$

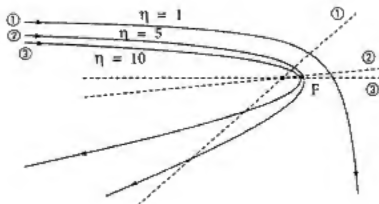
d'où $\quad r_m = \dfrac{K}{mV_0^2}\left[-1 + \sqrt{1 + \left(\dfrac{mV_0^2 b}{K}\right)^2}\right] \Rightarrow \boxed{r_m = -\dfrac{K}{mV_0^2} + \sqrt{\left(\dfrac{K}{mV_0^2}\right)^2 + b^2}}$

Résultat identique à (3) comme il se doit.

• On peut tracer différentes trajectoires obtenues en fixant b et en faisant varier V_0 :

$$\frac{b}{r} = \eta(1 - \cos\theta) + \sin\theta \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{K}{mbV_0^2}.$$

D'où les courbes tracées sur ordinateur :



515 Étoile double

Deux points matériels M_1 et M_2 de masses respectives m_1 et m_2 sont en interaction gravitationnelle. On se placera dans le référentiel $\mathcal{R}$, ici galiléen, du centre de masse G du système $\{M_1, M_2\}$.

On notera $\vec{r} = \overrightarrow{M_1M_2}$ et $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ (vitesse calculée dans $\mathcal{R}$).

1. Donner, en fonction de r (module de $\vec{r}$), v (module de $\vec{v}$), m_1, m_2 et $\mathcal{G}$ (constante de gravitation) les expressions de l'énergie mécanique E_m du système ainsi que de son moment cinétique $\vec{\sigma}(G)$ au point G. Que peut-on dire de ces quantités ? Commenter.

2. On suppose que les points M_1 et M_2 décrivent des orbites circulaires de centre G et de rayons R_1 et R_2, avec $R_1 + R_2 = d$.

a. Déterminer la période orbitale T_0 de chaque particule en fonction de $\mathcal{G}$, d, m_1 et m_2. Commenter.

b. Donner également les expressions des grandeurs E_m et $\vec{\sigma}(G)$ en fonction de $\mathcal{G}$, m_1, m_2 et d.

c. *Application numérique* :

Calculer T_0 pour $R_1 = 2{,}05 \cdot 10^{10}$ m, $R_2 = 4{,}46 \cdot 10^{9}$ m et $m_1 = 1{,}00 \cdot 10^{31}$ kg. On prendra $\mathcal{G} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$.

1. Ce qu'il faut savoir

- Forces centrales.
- Loi de la gravitation de Newton.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. Dans $\mathcal{R}$ (référentiel du centre de masse G), chaque particule soumise à l'action de l'autre particule subit une force centrale (dont le support passe constamment par le point G). Il en résulte, dans le cas général, que le mouvement est plan et suit la loi des aires. Les forces étant d'origine newtonienne, les trajectoires peuvent être circulaires, elliptiques, paraboliques ou hyperboliques (selon les conditions initiales et plus précisément selon la valeur de l'énergie mécanique E_m)… On remarquera que le système est isolé (les forces sont intérieures).

Les deux mouvements circulaires sont évidemment synchrones (G, M_1, M_2 alignés) et s'effectuent donc avec la même période T_0. Il suffira – par application de la loi fondamentale de la dynamique – de traduire que les masses m_1 et m_2 décrivent effectivement des trajectoires circulaires.

3. Solution

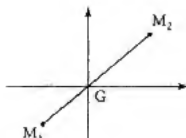
1. L'énergie mécanique – dans le référentiel du centre de masse $\mathcal{R}$ – du système des deux masses est la somme de leurs énergies cinétiques et de l'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle. Soit :

$E_m = E_c + E_p$, avec :

$E_c = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^{\,2}$

($\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ calculées dans $\mathcal{R}$)

et $E_p = -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{r}$.



On a avec $\vec{r}_1 = \overrightarrow{GM_1}$ et $\vec{r}_2 = \overrightarrow{GM_2}$:

$$\begin{cases} m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = \vec{0} & \text{(G : centre de masse)} \\ \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \end{cases}$$

D'où $\vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}$ et $\vec{r}_1 = \frac{-m_2}{m_1+m_2}\vec{r}$ (1)

Les trajectoires des particules M_1 et M_2 sont homothétiques dans $\mathcal{R}$.
Les vitesses $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ s'expriment alors simplement en fonction de $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$:

$$\vec{v}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v} \quad \text{et} \quad \vec{v}_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{v}.$$

D'où $E_c = \frac{1}{2}m_2\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}\right)^2 + \frac{1}{2}m_1\left(\frac{-m_2}{m_1+m_2}\vec{v}\right)^2$

$E_c = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\vec{v}^{\,2} = \frac{1}{2}\mu\vec{v}^{\,2}$: résultat classique où $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ représente la masse réduite. Finalement :

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}v^2 - \mathcal{G}\frac{m_1m_2}{r}} \quad (2)$$

Cette énergie mécanique se conserve au cours du mouvement, le système étant isolé dans le référentiel $\mathcal{R}$ galiléen.

POINT COURS

En appliquant dans $\mathcal{R}$, le théorème de la puissance cinétique au système des deux masses, on a :

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{int} + \mathcal{P}_{ext}.$$

Ici $\mathcal{P}_{ext} = 0$ (système globalement isolé)

et $\mathcal{P}_{int} = \frac{\delta W}{dt} = -\frac{dE_p}{dt}$ (E_p défini plus haut)

d'où $E_m = E_c + E_p = cte$ (E_p : énergie potentielle *intérieure*).

• Le moment cinétique en G, calculé dans $\mathcal{R}$, est défini selon :

$$\vec{\sigma}(G) = \overrightarrow{GM_1} \wedge m_1\vec{v}_1 + \overrightarrow{GM_2} \wedge m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{r}_1 \wedge \vec{v}_1 + m_2\vec{r}_2 \wedge \vec{v}_2.$$

Soit avec $m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = \vec{0}$: $\vec{\sigma}(G) = m_2\vec{r}_2 \wedge (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$

et en tenant compte de (1) et de ce que $\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \dfrac{d}{dt}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$

$$\boxed{\vec{\sigma}(G) = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \wedge \vec{v}} \quad (3)$$

$\vec{\sigma}(G) = \mu\vec{r} \wedge \vec{v}$ constitue une constante du mouvement dans $\mathcal{R}$ (système isolé).

En effet le théorème du moment cinétique en G, point fixe de $\mathcal{R}$, s'écrit :

– pour M_1 : $\dfrac{d\vec{\sigma}_1(G)}{dt} = \vec{r}_1 \wedge \vec{f}_1$;

– pour M_2 : $\dfrac{d\vec{\sigma}_2(G)}{dt} = \vec{r}_2 \wedge \vec{f}_2$.

Soit en faisant la somme de ces deux équations :

$$\frac{d\vec{\sigma}(G)}{dt} = \vec{r}_1 \wedge \vec{f}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{f}_2 = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \wedge \vec{f}_2 = \vec{r} \wedge \vec{f}_2 = \vec{0}$$

($\vec{r}$ et $\vec{f}_2$ étant colinéaires).

On a bien $\dfrac{d\vec{\sigma}(G)}{dt} = \vec{0}$ et donc $\vec{\sigma}(G) = \overrightarrow{\text{cste}}$.

Commentaires

• Les relations (2) et (3) nous montrent que l'on peut réduire l'étude du mouvement à celui d'une particule M de masse $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ (masse réduite) distante vectoriellement de $\vec{r}$ du point fixe G. On peut alors considérer qu'elle est soumise à une force centrale (de centre G) associée à l'énergie potentielle E_p telle que :

$$E_p = -\frac{K}{r} \quad \text{où} \quad K = \mathcal{G}m_1 m_2.$$

Ce que l'on peut confirmer en remarquant que l'on a également :

$\mu\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m_2\dfrac{d^2\vec{r}_2}{dt^2}$ (*cf.* relation (1) entre $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$).

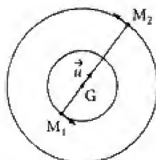


Soit $\mu\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{f}_2 = -\dfrac{\mathcal{G}m_1 m_2}{r^2}\vec{u} = -\dfrac{K}{r^2}\vec{u}$.

• Le mouvement est plan (plan passant par G et perpendiculaire à $\vec{\sigma}(G)$ ou encore plan défini par $\vec{r}(0)$ et $\vec{v}(0)$), dans le cas général.

• Le cours nous apprend que l'on a un état lié (orbites elliptiques, voire circulaires) lorsque l'énergie mécanique est négative...

2. a. Les points M_1, G et M_2 restent alignés à tout instant, M_1 et M_2 décrivant des orbites circulaires de centre G et de rayons respectifs R_1 et R_2. On a alors pour M_1 :



$m_1\vec{a}_1 = \vec{f}_1$, soit $m_1\vec{a}_1 = \dfrac{\mathcal{G}m_1m_2}{d^2}\vec{u}$ avec $\vec{a}_1 = \dfrac{v_0^2}{R_1}\vec{u}$,

d'où $\quad m_1\dfrac{v_1^2}{R_1} = \dfrac{\mathcal{G}m_1m_2}{d^2}$.

Notons ω la vitesse angulaire de rotation de M_1 (et donc également de M_2), il vient $v_1 = \omega R_1$ (respectivement $v_2 = \omega R_2$), d'où :

$$\omega^2 R_1 = \frac{\mathcal{G}m_2}{d^2}\ ;\ \text{de même}\ \ \omega^2 R_2 = \frac{\mathcal{G}m_1}{d^2}.$$

Soit en faisant la somme des relations précédentes (avec $R_1 + R_2 = d$)

$$\omega^2 d = \mathcal{G}\cdot\left(\frac{m_1+m_2}{d^2}\right) \Rightarrow \omega = \frac{1}{d^{3/2}}\sqrt{\mathcal{G}(m_1+m_2)} \quad (4)$$

La période (commune) T_0 du mouvement de chaque particule est alors donnée par :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega},\ \text{d'où}\ \ \boxed{T_0 = \frac{2\pi d^{3/2}}{\sqrt{\mathcal{G}(m_1+m_2)}}}$$

Commentaires

La période des mouvements circulaires de M_1 et M_2 est donnée par l'expression :

$$T_0 = \frac{2\pi d^{3/2}}{\sqrt{\mathcal{G}(m_1+m_2)}},\ \text{avec}\ d = R_1 + R_2\ \text{et}\ R_2 = \frac{m_1}{m_2}R_1.$$

Supposons maintenant que $m_1 \gg m_2$, dès lors $R_2 \gg R_1$ et $d \approx R_2$, de sorte que l'expression de T_0 se réduit à $T_0 \approx 2\pi R_2^{3/2}\dfrac{1}{\sqrt{\mathcal{G}m_1}}$ (indépendant de m_2 – tant que $m_2 \ll m_1$) : 3ᵉ loi de Kepler…

2. b. • L'énergie mécanique E_m du système vaut alors :

$$E_m = \frac{1}{2}m_1(\omega R_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\omega R_2)^2 - \frac{\mathcal{G}m_1m_2}{d}$$

$$E_m = \frac{1}{2}\omega^2(m_1R_1^2 + m_2R_2^2) - \frac{\mathcal{G}m_1m_2}{d}$$

or $\quad m_1R_1 = m_2R_2$ (G centre de masse), et $d = R_1 + R_2$, d'où :

$$E_m = \frac{1}{2}\omega^2 m_1R_1 d - \frac{\mathcal{G}m_1m_2}{d}$$

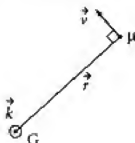
$$E_m = \frac{1}{2}\omega^2\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}d^2 - \frac{\mathcal{G}m_1m_2}{d} \qquad \left(R_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}d\right)$$

soit $\quad E_m = \dfrac{1}{2}\dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}\omega^2d^2 - \dfrac{\mathcal{G}m_1m_2}{d}$.

Ce résultat est conforme à celui du **1.** puisque $\|\vec{v}\| = \omega d$. D'autre part, en utilisant la valeur de ω (relation (4)), il vient :

$$E_m = \frac{1}{2}\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{d} - \frac{\mathcal{G}m_1m_2}{d} \Rightarrow \boxed{E_m = -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{2d}} \quad (E_m < 0 : \text{état lié}).$$

On a ici (mouvement circulaire) :



$$E_c = -\frac{1}{2}E_p \text{ et donc } E_m = -E_c.$$

De même pour le moment cinétique, en notant $\vec{k}$ le vecteur unitaire perpendiculaire au plan des orbites :

$$\vec{\sigma}(G) = \mu\|\vec{r}\|\|\vec{v}\|\vec{k}$$

or $\|\vec{r}\| = d$ et $\|\vec{v}\| = \omega d$, d'où :

$$\vec{\sigma}(G) = \mu\omega d^2\vec{k} \Rightarrow \boxed{\vec{\sigma}(G) = m_1m_2\sqrt{\frac{\mathcal{G}d}{m_1+m_2}}\vec{k}}$$

2. c. *Application numérique* :

On a $m_2 = m_1\dfrac{R_1}{R_2} = 1\cdot 10^{31}\dfrac{20,5}{4,46} \Rightarrow$ $\mathbf{m_2 = 4,60 \cdot 10^{31}}$ **kg.**

$$T_0 = 2\pi\frac{(24,96\cdot 10^9)^{\frac{3}{2}}}{\left(6,67\cdot 10^{-11}\cdot 10^{31}\left(1+\frac{20,5}{4,46}\right)\right)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow T_0 = 4,06\cdot 10^5 \text{ s}$$

et $T_0 =$ **4,69 jours.**

516 Conditions de satellisation

Un satellite de masse m est lancé d'un point M_0 à la distance r_0 du centre O de la Terre, avec une vitesse V. On note V_0 la vitesse de satellisation en orbite circulaire de rayon r_0.

1. La vitesse $\vec{V}$ est orthogonale au rayon vecteur $\overrightarrow{OM_0}$. Déterminer les caractéristiques de l'orbite décrite dans l'hypothèse où il y a effectivement satellisation. Dans quel domaine faut-il choisir le rapport $\mu = \dfrac{V}{V_0}$ pour qu'il en soit ainsi ? On posera $\rho = \dfrac{r_0}{R_T}$ où R_T est le rayon de la Terre.

On rappelle que pour une trajectoire elliptique de paramètre p, de demi-grand axe a, d'excentricité e et d'énergie mécanique E_m, on a (C désignant la constante des aires) :

$$p = \frac{C^2}{\mathcal{G}M} \quad (M \equiv \text{masse de la Terre})$$

$$p = a\cdot(1-e^2)\,; \quad E_m = -\frac{\mathcal{G}Mm}{2a}.$$

2. La vitesse V est peu différente de V_0 : $V = V_0\cdot(1+\varepsilon)$ avec $\varepsilon \ll 1$, et fait un petit angle α avec la direction perpendiculaire à $\overrightarrow{OM_0}$ (dans le plan de la trajectoire). Déterminer l'expression approchée de l'excentricité *e* de l'orbite en fonction de α et ε.

1. Ce qu'il faut savoir

- Champ de force centrale newtonien – Trajectoires circulaires et elliptiques.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. Il faut traduire que la trajectoire est elliptique (état lié), et qu'elle ne rencontre pas la Terre.

2. Pour $\varepsilon \ll 1$ la trajectoire est elliptique.

3. Solution

1. D'après le théorème du centre d'inertie appliqué au satellite de masse *m* pour une trajectoire circulaire de rayon r_0 :

$$mA_N = m\frac{V_0^2}{r_0} = \left\|\vec{f}_G\right\| = \frac{\mathcal{G}Mm}{r_0^2} \quad \text{(M : masse de la Terre).}$$

Soit $r_0V_0^2 = \mathcal{G}M$. (1)

La vitesse initiale étant perpendiculaire au rayon vecteur, la constante des aires vaut $C = \frac{\sigma_0}{m} = r_0V$ et le paramètre de la conique trajectoire : $p = \frac{C^2}{\mathcal{G}M}$

soit $p = \frac{r_0^2V^2}{r_0V_0^2} = r_0\left(\frac{V}{V_0}\right)^2.$

Et en posant $\mu = \frac{V}{V_0}$: $\boxed{p = r_0\mu^2}$

L'énergie mécanique du satellite a pour valeur : $E_m = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{\mathcal{G}Mm}{r_0}.$

Pour une trajectoire elliptique de demi-grand axe *a*, on a : $E_m = -\frac{\mathcal{G}Mm}{2a}$

d'où $\frac{1}{2}mV^2 - \frac{\mathcal{G}Mm}{r_0} = -\frac{\mathcal{G}Mm}{2a}.$

Or d'après (1) $\mathcal{G}M = r_0V_0^2$ et :

$$\frac{2E_m}{m} = V^2 - 2V_0^2 = -\frac{r_0V_0^2}{a}$$

d'où $\frac{r_0}{a} = 2 - \left(\frac{V}{V_0}\right)^2 = 2 - \mu^2$ (2)

or $p = a(1 - e^2)$

d'où $e^2 = 1 - \frac{p}{a} = 1 - r_0\mu^2 \times \frac{2 - \mu^2}{r_0}$

$e^2 = 1 - \mu^2(2 - \mu^2) = (1 - \mu^2)^2$

et $e = |1 - \mu^2|$.

La trajectoire est une ellipse si $E_m < 0$ soit alors :

$V^2 < 2V_0^2$

$\mu^2 < 2$

$\mu < \sqrt{2}$ ce qui correspond bien à $e < 1$.

Commentaire

La valeur limite $\mu = \sqrt{2}$ correspond à la vitesse de libération pour la distance r_0.
$V_1 = \sqrt{2}V_0$; c'est la vitesse minimale permettant d'échapper à l'attraction de la Terre, c'est-à-dire correspondant à l'énergie $E_m = 0$.

Écrivons maintenant que cette ellipse ne rencontre pas la Terre ; il faut qu'au périgée :

$$r_p = \frac{p}{1 + e} > R_T \quad (e > 0)$$

$$1 + e < \frac{p}{R_T} = \frac{r_0}{R_T} \cdot \mu^2.$$

En posant $\rho = \frac{r_0}{R_T}$ et avec $e = |1 - \mu^2|$, il vient $|1 - \mu^2| < \rho\mu^2 - 1$

• 1[er] cas :

$\frac{V}{V_0} = \mu > 1 \Rightarrow \mu^2 - 1 < \rho\mu^2 - 1$

ce qui est toujours réalisé puisque $\rho = \frac{r_0}{R_T} > 1$.

• 2[e] cas :

$\frac{V}{V_0} = \mu < 1 \Rightarrow 1 - \mu^2 < \rho\mu^2 - 1$ soit $\mu^2 > \frac{2}{\rho + 1}$.

Finalement, il faut donc que : $\sqrt{\frac{2}{\rho + 1}} < \mu < \sqrt{2}$

pour que le satellite ait une trajectoire elliptique extérieure à la Terre, de grand axe OM_0, de paramètre p, et d'excentricité e calculés précédemment.

2. Avec les conditions données, la trajectoire est toujours elliptique :

$$\mu = \frac{V}{V_0} = 1 + \varepsilon < \sqrt{2}.$$

L'expression (2) nous donne donc : $\frac{r_0}{a} = 2 - \mu^2 = 2 - (1 + \varepsilon)^2$.

Comme $\vec{V}$ fait un angle α avec la direction perpendiculaire à $\overrightarrow{OM_0}$, on a maintenant :

$$C = \frac{\sigma_0}{m} = r_0 \cdot V \cdot \cos\alpha$$
$$C = r_0 V_0 (1 + \varepsilon)\cos\alpha$$
$$p = \frac{C^2}{\mathscr{G}M} = r_0(1+\varepsilon)^2 \cdot \cos^2\alpha \text{ en utilisant (1).}$$

On obtient alors :

$$e^2 = 1 - \frac{p}{a} = 1 - (1+\varepsilon)^2 \cdot \cos^2\alpha[2 - (1+\varepsilon)^2]$$
$$e^2 = 1 - \cos^2\alpha \cdot (1+\varepsilon)^2(1 - 2\varepsilon - \varepsilon^2)$$
$$e^2 = 1 - \cos^2\alpha \cdot [1 - (2\varepsilon + \varepsilon^2)^2].$$

Si α est très petit : $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \alpha^2$

et avec $\varepsilon \ll 1$, $e^2 \# 1 - (1 - \alpha^2)(1 - 4\varepsilon^2)$

et en supposant que ε et α sont des infiniment petits du même ordre :

$$e^2 \# \alpha^2 + 4\varepsilon^2$$
$$e \# \sqrt{\alpha^2 + 4\varepsilon^2}.$$

Pour $\varepsilon = 0$ on aurait :

$$e^2 = 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$$
$$e = |\sin\alpha|.$$

517 Autre présentation du mouvement newtonien

On considère un point P de masse m en mouvement dans un champ de force centrale. L'étude se fera dans un référentiel galiléen d'origine O, centre de force. On notera : $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$, $\vec{v}$ vitesse de P, $\vec{L}$ moment cinétique au point O, $E_p(r)$ énergie potentielle de la particule et E son énergie mécanique.

1. a. Que peut-on dire de E et $\vec{L}$? En déduire que le mouvement est plan.

b. On repère la position de P, dans ce plan, par ses coordonnées polaires r et θ.

Donner l'expression de L (module de $\vec{L}$) en fonction notamment des variables r et θ ou de leurs dérivées.

Exprimer l'énergie cinétique de P en fonction de L, m et des variables $w = \frac{1}{r}$ et $\frac{dw}{d\theta}$.

2. Le point P subit le champ gravitationnel d'une masse M fixée en O.

a. Montrer que la trajectoire de P vérifie une équation différentielle du type :

$$\left(\frac{dw}{d\theta}\right)^2 + (w - \beta)^2 = \beta^2\gamma \quad (1)$$

où β et γ sont des constantes du mouvement que l'on exprimera en fonction de m, L, E et $K = \mathscr{G}mM$.

b. Montrer que l'équation (1) est analogue à celle du mouvement d'un oscillateur harmonique non amorti, et que la trajectoire de P est une conique dont on calculera le paramètre p et l'excentricité e d'abord en fonction de β et γ et ensuite en fonction de m, K, L et E.

c. Quel est en fonction de β le rayon r_c d'une orbite circulaire ?
Donner en fonction de K et r_c l'énergie associée à une telle orbite.

1. Ce qu'il faut savoir

- Mouvements à force centrale.
- Oscillateur harmonique libre non amorti.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. Résultats classiques du cours.

2. a. L'équation à établir doit traduire la conservation de l'énergie.

3. Solution

1. a. L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle : $E = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(r)$. La particule P est uniquement soumise à une force centrale associée à l'énergie potentielle $E_p(r)$. Le théorème de la puissance cinétique s'écrit alors :

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P} = \vec{f} \cdot \vec{v} = -\frac{dE_p}{dt} \text{ (par définition de } E_p\text{).}$$

D'où $E_c + E_p$ = constante et $E = E_0$ = constante $= \frac{1}{2}mv_0^2 + E_p(r_0)$.

- Le théorème du moment cinétique appliqué en O donne :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_0(O) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f} = \vec{0} \text{ (la force est centrale).}$$

D'où $\vec{L} = \vec{L}_0$ (avec $\vec{L}_0 = \overrightarrow{OP_0} \wedge m\vec{v}_0$ non nul tant que $\vec{v}_0$ et $\overrightarrow{OP_0}$ ne sont pas colinéaires). Dans le cas général, la particule se déplace donc dans un plan π passant par O et perpendiculaire à $\vec{L}_0$ ($\overrightarrow{OP_0} \perp \vec{L}_0$). Deux intégrales premières du mouvement sont fournies par les équations $E = E_0$ et $\vec{L} = \vec{L}_0$.

1. b. On a $\vec{L} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$ avec $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$ et $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$

d'où $\vec{L} = r\vec{u}_r \wedge m(\dot{r}\vec{u}_r + \dot{\theta}\vec{u}_\theta) \Rightarrow \vec{L} = mr^2\dot{\theta}\vec{k}$

($\vec{k}$, vecteur directeur de $\vec{L}$, est perpendiculaire au plan π).

Nous avons $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$.

Or $\quad \dot{r} = \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{1}{w}\right)\cdot\dfrac{d\theta}{dt} = -\dfrac{1}{w^2}\dfrac{dw}{d\theta}\cdot\left(\dfrac{L}{m}w^2\right) = -\dfrac{L}{m}\dfrac{dw}{d\theta}$

et $\quad r\dot{\theta} = \dfrac{1}{w}\left(\dfrac{L}{m}w^2\right) = \dfrac{L}{m}w.$

Soit
$$\boxed{E_c = \frac{L^2}{2m}\left[w^2 + \left(\frac{dw}{d\theta}\right)^2\right]}$$

2. a. L'énergie potentielle prend la forme $E_p(r) = -\dfrac{\mathcal{G}mM}{r} = -Kw$. La conservation de l'énergie mécanique se traduit par l'équation :

$$\frac{L^2}{2m}\left[w^2 + \left(\frac{dw}{d\theta}\right)^2\right] - Kw = E$$

d'où $\quad \left(\dfrac{dw}{d\theta}\right)^2 + w^2 - \dfrac{2mK}{L^2}w = \dfrac{2mE}{L^2}$

soit encore $\quad \left(\dfrac{dw}{d\theta}\right)^2 + \left(w - \dfrac{mK}{L^2}\right)^2 = \dfrac{2mE}{L^2} + \dfrac{m^2K^2}{L^4} = \left(\dfrac{mK}{L^2}\right)^2\left(1 + \dfrac{2EL^2}{mK^2}\right).$

Il vient
$$\boxed{\beta = \frac{mK}{L^2} \quad \text{et} \quad \gamma = 1 + \frac{2EL^2}{mK^2}}$$

et $\quad \left(\dfrac{dw}{d\theta}\right)^2 + (w-\beta)^2 = \beta^2\gamma. \quad (1)$

2. b. Si l'on considère un oscillateur harmonique constitué par une masse m et un ressort de longueur à vide l_0, de raideur k et de longueur x, la conservation de l'énergie donne :

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x-l_0)^2 = E \Rightarrow \dot{x}^2 + \omega_0^2(x-l_0)^2 = \frac{2E}{m} \quad (2)$$

L'équation différentielle en $w(\theta)$ établie au 2. a. s'identifie à (2) à condition d'y faire $\omega_0 = 1$.

On a donc $\quad w - \beta = A\cos\theta + B\sin\theta$

ou $\quad w = \beta(1 + e\cos(\theta-\theta_1)) = \dfrac{1}{p}(1 + e\cos(\theta-\theta_1)) \quad (3)$

Commentaire

Si l'on avait dérivé (1) par rapport à θ on aurait obtenu :
$\dfrac{d^2w}{d\theta^2} + w = \beta$ dont la solution générale est bien donnée par l'expression (3)...

Reportons l'expression (3) dans (1) en remarquant que $\dfrac{dw}{d\theta} = -\beta e\sin(\theta-\theta_1)$:

$$\beta^2e^2\sin^2(\theta-\theta_1) + \beta^2e^2\cos^2(\theta-\theta_1) = \beta^2\gamma \Rightarrow e^2 = \gamma.$$

On a donc obtenu :
$$\boxed{p = \frac{1}{\beta} \quad \text{et} \quad e^2 = \gamma}$$

D'où les expressions fournissant le paramètre p et l'excentricité e de la trajectoire conique :

$$\boxed{p = \frac{L^2}{mK} \quad \text{et} \quad e^2 = 1 + \frac{2EL^2}{mK^2}}$$

2. c. Le point P suit une orbite circulaire si sa distance au centre O est fixe, ce qui implique w = constante et donc $e = 0$. Dès lors, en notant r_c le rayon de la trajectoire, il vient :

$$r_c = \frac{1}{\beta} = \frac{L^2}{mK} \quad \text{et} \quad E = -\frac{mK^2}{2L^2} \quad (e = 0)$$

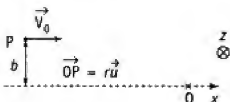
soit

$$\boxed{E = -\frac{K}{2r_c}}$$

518 Interaction coulombienne répulsive

1. Une particule P de masse m est soumise, dans $\mathcal{R}$ galiléen, à une force centrale répulsive de centre O fixe :

$$\vec{F} = \frac{mK}{r^2}\vec{u} \quad (K > 0).$$



Initialement, la particule est à l'infini avec une vitesse $\vec{V}_0$, le paramètre d'impact est b (*cf.* figure).

Déterminer la déviation subie par la particule (les forces gravitationnelles et de pesanteur sont négligées dans tout l'exercice).

Indication : on pourra intégrer – par rapport au temps – l'équation vectorielle traduisant la loi fondamentale de la dynamique pour la particule P, puis projeter sur les axes Ox et Oy.

Application :

La force $\vec{F}$ résulte d'une interaction électrostatique due à une charge Q fixée en O ($qQ > 0$). Quelle valeur K_0 doit-on attribuer au coefficient K ? Que devient la déviation ?

2. On revient au cas précédent, la charge Q initialement fixe étant maintenant libre de se déplacer (sa masse est M).

a. Que peut-on dire – à partir des lois de conservation – dans le cas particulièrement simple où $m = M$?

b. Cas général ($m \neq M$) :

α) On se place dans le référentiel $\mathcal{R}_G$ du centre de masse G et on note $\vec{r'} = \overrightarrow{GP}$. Montrer que la force $\vec{F}$ subie par P s'écrit : $\vec{F} = K'\frac{\vec{u}}{r'^2}$. Exprimer K' en fonction de K_0 et du rapport $\frac{m}{M}$.

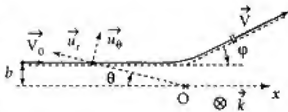
β) Soit φ' l'angle mesurant la déviation de P dans $\mathcal{R}_G$. Montrer que l'on a :

$$\tan\left(\frac{\varphi'}{2}\right) = \frac{K_0}{v_0^2 b}\left(1 + \frac{m}{M}\right).$$

γ) En déduire une expression donnant $\tan\varphi$ (φ angle de déviation de P dans $\mathcal{R}$) en fonction de φ' et de $\frac{m}{M}$. Commenter.

Solution

1. Le point matériel P est soumis à une force centrale répulsive, le centre de force (point O) étant fixe dans le référentiel d'étude.



Le mouvement est donc plan et la trajectoire hyperbolique (O est un foyer).

Notons $\vec{V}_1$ la vitesse après interaction (particule à l'« infini »).

Il y a donc conservation du moment cinétique $\vec{\sigma}(O)$, soit en désignant par $\vec{k}$ un vecteur unitaire perpendiculaire au plan de la trajectoire :

$$\vec{\sigma}(O) = \overrightarrow{OP} \wedge m\vec{V} = \lim_{\text{« P} \to \infty \text{»}} (\overrightarrow{OP} \wedge m\vec{V}).$$

D'où $\qquad \vec{\sigma}(O) = mV_0 b\vec{k}.$

D'autre part $\qquad \vec{\sigma}(O) = r\vec{u} \wedge m(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\vec{k} \quad (\vec{u} = \vec{u}_r)$

Soit $\qquad r^2\dot{\theta} = V_0 b \quad (1)$

La conservation de l'énergie mécanique implique celle de l'énergie cinétique pour r « infini » (on est en dehors du champ d'interaction de la force).

D'où $\qquad V_1 = V_0 \quad (2)$

La déviation de la particule se mesure par l'angle $\varphi = (\vec{V}_0, \vec{V}_1)$, θ variant de la valeur 0 à la valeur $\pi - \varphi$. Écrivons la loi fondamentale de la dynamique : $m\frac{d\vec{V}}{dt} = mK\frac{\vec{u}_r}{r^2}$.

Intégrons cette équation entre les états limites « avant interaction » et « après interaction »

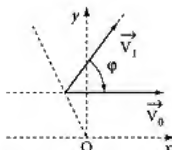
$$\int_{av}^{ap} d\vec{V} = K\int_{av}^{ap} \frac{\vec{u}_r dt}{r^2}$$

or $\qquad \int_{av}^{ap} d\vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}_0$

et avec (1) $\qquad \int_{av}^{ap} \frac{\vec{u}_r dt}{r^2} = \frac{1}{V_0 b}\int_0^{\pi-\varphi} \vec{u}_r d\theta \quad$ (d'après (1) : $\frac{dt}{r^2} = \frac{d\theta}{r^2\dot{\theta}} = \frac{1}{V_0 b}d\theta$).

Nous avons donc $\quad \vec{V}_1 - \vec{V}_0 = \frac{K}{V_0 b}\int_0^{\pi-\varphi} \vec{u}_r(\theta)\,d\theta.$

Projetons sur les axes Ox et Oy
$(\vec{u}_r = -\cos\theta\vec{u}_x + \sin\theta\vec{u}_y)$:



$$\begin{cases} V_0(\cos\varphi - 1) = -\dfrac{K}{V_0 b}\displaystyle\int_0^{\pi-\varphi}\cos\theta\,d\theta \\ V_0\sin\varphi = \dfrac{K}{V_0 b}\displaystyle\int_0^{\pi-\varphi}\sin\theta\,d\theta \end{cases}$$

Soit : $$\begin{cases} V_0(\cos\varphi - 1) = \dfrac{K}{V_0 b}(-\sin\varphi) \Rightarrow \sin^2\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{K}{V_0^2 b}\sin\dfrac{\varphi}{2}\cos\dfrac{\varphi}{2} \\ V_0\sin\varphi = \dfrac{K}{V_0 b}(1+\cos\varphi) \Rightarrow \sin\dfrac{\varphi}{2}\cos\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{K}{V_0^2 b}\cos^2\dfrac{\varphi}{2} \end{cases}$$

Les deux équations sont évidemment identiques et se résument à :

$$\boxed{\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{K}{V_0^2 b}} \quad (3)$$

La déviation est d'autant plus forte que le paramètre d'impact b et la vitesse V_0 sont faibles et que la constante de force K est élevée, ce qui est cohérent.

Application : le champ de force est le champ coulombien répulsif, on a donc :

$$\vec{F} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}}{r^2}.$$

2. a. Écrivons les lois de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie mécanique du système des deux particules chargées, dans le référentiel d'étude supposé galiléen, entre les états « bien avant » interaction et « bien après » interaction, états pour lesquels les particules sont à l'infini et infiniment distantes l'une de l'autre. Dans ces états, l'énergie mécanique se réduit à l'énergie cinétique. D'où :

$$m\vec{V}_0 + \vec{0} = m\vec{V}_q(\text{ap}) + M\vec{V}_Q(\text{ap})$$
$$\frac{1}{2}mV_0^2 + 0 = \frac{1}{2}m\vec{V}_q^2(\text{ap}) + \frac{1}{2}M\vec{V}_Q^2(\text{ap}).$$

Soit avec $m = M \Rightarrow \vec{V}_0 = \vec{V}_q(\text{ap}) + \vec{V}_Q(\text{ap})$ et $V_0^2 = V_q^2(\text{ap}) + V_Q^2(\text{ap})$.

Et en éliminant V_0 : $\left[\vec{V}_q(\text{ap}) + \vec{V}_Q(\text{ap})\right]^2 = V_q^2(\text{ap}) + V_Q^2(\text{ap})$.

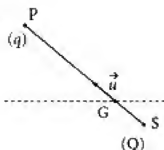
Soit finalement $$\boxed{\vec{V}_q(\text{ap})\cdot\vec{V}_Q(\text{ap}) = 0}$$

Les deux particules repartent après interaction dans des directions perpendiculaires (résultat classique pour $m = M$ indépendant de la nature de l'interaction).

2. b. α) Considérons le référentiel du centre de masse $\mathcal{R}_G$, ce référentiel est en translation par rapport au référentiel galiléen d'étude avec une vitesse $\vec{V}_G$ telle que :

$$\overrightarrow{V_G} = \frac{m\overrightarrow{V_0} + \vec{0}}{m + M} \Rightarrow \overrightarrow{V_G} = \frac{m}{m + M}\overrightarrow{V_0} \quad (\overrightarrow{V_G} = \overrightarrow{\text{constante}})$$

$\mathcal{R}_G$ est donc galiléen. Dans ce référentiel, la charge q est soumise à la force $\vec{F} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}$ avec $r = \|\overrightarrow{SP}\|$.



Or $\quad GP = \frac{M}{m + M}SP \quad (4)$ (G barycentre).

Posons $r' = GP$, il vient $r = \left(1 + \frac{m}{M}\right)r'$, et :

$$\vec{F} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0\left(1 + \frac{m}{M}\right)^2}\frac{\vec{u}}{r'^2}.$$

On est alors – dans $\mathcal{R}_G$ – ramené au problème précédent avec un centre de force fixe placé en G, et une constante de force d'expression :

$$K' = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 m\left(1 + \frac{m}{M}\right)^2} \qquad \boxed{K' = \frac{K_0}{\left(1 + \frac{m}{M}\right)^2}}$$

2. b. β) Dans ce même référentiel, la particule q va subir une déviation d'angle φ' donnée par la relation (*cf.* (3)) :

$\tan\left(\frac{\varphi'}{2}\right) = \frac{K'}{V_0'^2 b'}$, il reste donc à déterminer les paramètres V_0' et b'.

• Pour V_0', appliquons la composition des vitesses dans le cas de la translation

soit $\quad \overrightarrow{V_0} = \overrightarrow{V_0'} + \overrightarrow{V_G} \Rightarrow \overrightarrow{V_0'} = \overrightarrow{V_0} - \overrightarrow{V_G}$

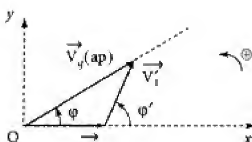
et $\quad \overrightarrow{V_0'} = \overrightarrow{V_0} - \frac{m}{m + M}\overrightarrow{V_0} = \frac{M}{m + M}\overrightarrow{V_0} \Rightarrow V_0' = \frac{M}{m + M}V_0.$

• b' s'obtient à partir de b par une formule barycentrique identique à (4).

d'où $\quad b' = b\frac{M}{m + M}.$

Finalement : $\tan\left(\frac{\varphi'}{2}\right) = \dfrac{K'}{\left(1 + \frac{m}{M}\right)^2 V_0^2 b \dfrac{1}{\left(1 + \frac{m}{M}\right)^3}}.$

Soit : $\quad \boxed{\tan\left(\frac{\varphi'}{2}\right) = \frac{K_0}{V_0^2 b}\left(1 + \frac{m}{M}\right)} \quad (4)$



2. b. γ) La déviation cherchée dans le référentiel d'étude $\mathcal{R}_e$, où initialement Q est immobile s'obtiendra aisément en composant de nouveau les vitesses. Après interaction, on aura :

$\vec{V}_q(\text{après}) = \vec{V}_G + \vec{V}'_1$ avec $V'_1 = V'_0$.

Soit en projetant sur les directions $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$:

$$\left.\begin{aligned} V_q(\text{ap})\cos\varphi &= V_G + V'_0\cos\varphi' \\ V_q(\text{ap})\sin\varphi &= V'_0\sin\varphi' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tan(\varphi) = \frac{\sin\varphi'}{\left(\dfrac{V_G}{V'_0}\right) + \cos\varphi'} \qquad (5)$$

Or $\dfrac{V_G}{V'_0} = \dfrac{m}{M}$ d'où une déviation φ telle que :

$$\boxed{\tan(\varphi) = \frac{\sin\varphi'}{\dfrac{m}{M} + \cos\varphi'} \quad \text{avec} \quad \tan\left(\frac{\varphi'}{2}\right) = \frac{K_0}{V_0^2 b}\left(1 + \frac{m}{M}\right)}$$

Commentaire

Un calcul utilisant les relations entre $\sin\varphi'$, $\cos\varphi'$ et $\tan\left(\dfrac{\varphi'}{2}\right)$ donne après simplifications :

$$\tan\varphi = \frac{\dfrac{2K_0}{V_0^2 b}}{\left(1 - \dfrac{K_0^2}{V_0^4 b^2}\right) + \dfrac{m^2}{M^2}\dfrac{K_0^2}{V_0^4 b^2}}.$$

• Pour $m \ll M$, on obtient $\tan\left(\dfrac{\varphi'}{2}\right) \# \dfrac{K_0}{V_0^2 b}$ (*cf.* relation (4)) et $V_G \ll V'_0$ ce qui implique (en fait pour $\dfrac{m}{M} \ll \cos\varphi'$), *cf.* figure, $\varphi \sim \varphi'$, soit finalement :

$$\tan\varphi \approx \frac{K_0}{V_0^2 b}$$

comme il se doit. En effet, à la limite où la masse M est très grande devant m, on pourra considérer en première approximation qu'elle reste fixe.

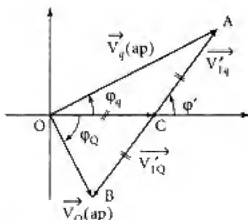
• Pour $m = M$, on a $V_G = \dfrac{m}{m+M}V_0 = \dfrac{V_0}{2}$ et $V'_0 = V'_1 = \dfrac{V_0}{2}$.

D'autre part, dans $\mathcal{R}_G$ $M\vec{V}'_Q + m\vec{V}'_q = \vec{0}$ soit, pour $m = M$, $\vec{V}'_Q = -\vec{V}'_q$.

D'où le diagramme des vitesses dans $\mathcal{R}_e$ en se rappelant que $\vec{V} = \vec{V}' + \vec{V}_G$

$V'_{1q} = V'_{1Q} = \frac{V_0}{2}$

$OC = V_G = \frac{V_0}{2}$



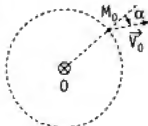
C est le milieu de AB et le triangle OAB est rectangle en O (OC = BC = CA), on a donc, dans ce cas particulier, un angle de $\frac{\pi}{2}$ entre les deux directions de vol des particules après interaction.

519 Météore traversant un nuage peu dense

Une particule M de masse m est soumise à un champ gravitationnel central $\vec{\mathcal{G}}$ (de centre O) tel que :

$$\left.\begin{aligned} \vec{\mathcal{G}}(r) &= -K\frac{\vec{r}}{r^3} \quad \text{pour} \quad r > R \\ \vec{\mathcal{G}}(r) &= -K\frac{\vec{r}}{R^3} \quad \text{pour} \quad r < R \end{aligned}\right\} \text{avec } \vec{r} = \overrightarrow{OM} \text{ et } r = \|\vec{r}\|,\ K > 0.$$

1. À un instant t_0, la particule se trouve en un point M_0 ($OM_0 = R$) et sa vitesse $\vec{V_0}$ fait un angle α avec le rayon vecteur $\overrightarrow{OM_0}$. On prendra $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ et $V_0(= \|\vec{V_0}\|) < V_\ell = \sqrt{\frac{2K}{R}}$.



On posera $\eta = \frac{V_0}{V_\ell}$.

a. À quoi correspond la condition $V_0 < V_\ell$?

b. Caractériser la trajectoire suivie par la particule tant que r reste supérieur à R.

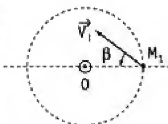
On rappelle que pour une trajectoire elliptique d'équation polaire $\frac{p}{r} = 1 + e\cos(\theta - \theta_1)$, on a :

$$p = \frac{C^2}{K} \text{ (où } mC = L_0 \text{ avec } \vec{L_0} \text{ moment cinétique en O).}$$

$$a = \frac{p}{1-e^2} \text{ (} a = \text{demi-grand axe de l'ellipse).}$$

Dessiner quelques trajectoires (prendre par exemple $\eta = 0{,}9$ et $\alpha = \{0{,}5 ; 0{,}8 ; 1{,}0\}$).

2. La particule se trouve en un point M_1 ($OM_1 = R$) et sa vitesse $\vec{V_1}$, de module V_0, est maintenant orientée de telle façon que $(\vec{V_1}, \overrightarrow{M_1O}) = \beta$ avec $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.



a. Déterminer la nature de la trajectoire suivie pour la particule tant que r reste inférieur à R.

b. On peut montrer que la particule recoupe le cercle de centre O et de rayon R en un point M_1' tel que $(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_1'}) = \psi$ avec :

$$\tan\psi = -\frac{2\eta^2 \sin 2\beta}{1 + 2\eta^2\cos 2\beta}.$$

Vérifier la cohérence de cette expression.

3. On se replace dans les conditions du **1.** Décrire le mouvement ultérieur de la particule. Tracer la trajectoire pour $\eta = 0{,}9$ et $\alpha = 0{,}5$ rad.

Solution

1. a. La particule M se déplace dans le champ $\vec{\mathcal{G}}(r) = -K\frac{\vec{r}}{r^3}$.

Il lui est associé une énergie potentielle $E_p = -\frac{mK}{r}$:

La conservation de l'énergie lors du mouvement s'écrit :

$$E_m = \frac{1}{2}mV^2 + E_p(r) = E_0 = \frac{1}{2}mV_0^2 + E_p(r_0).$$

Or la force est centrale attractive et de type newtonien. La trajectoire reste à distance finie (état lié) pour $E_0 < 0$ soit pour :

$$\frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{mK}{R} < 0 \Rightarrow V_0^2 < \frac{2K}{R} \Rightarrow V_0^2 < V_\ell^2.$$

La condition $V_0 < V_\ell$ traduit donc que la trajectoire restera bornée (trajectoire elliptique).

1. b. D'après ce qui précède, on obtiendra donc une portion d'ellipse d'équation polaire $\frac{p}{r} = 1 + e\cos(\theta - \theta_1)$, où p et e représentent le paramètre et l'excentricité de l'ellipse (grandeurs prises positives).

• D'après le cours, on a $p = \frac{C^2}{K}$ où C est la constante des aires.

$$C = RV_0\sin\alpha \quad (C = \|\overrightarrow{OM_0} \wedge \vec{V_0}\|) \Rightarrow p = \frac{R^2V_0^2\sin^2\alpha}{K}.$$

Et

$$\boxed{\frac{p}{R} = 2\left(\frac{V_0}{V_\ell}\right)^2 \sin^2\alpha}$$

• Le demi-grand axe a s'obtient par $E_m = -\frac{mK}{2a}$ soit :

$$\frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{mK}{R} = -\frac{mK}{2a} \Rightarrow \frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{1}{2}mV_\ell^2 = -\frac{1}{2}mV_\ell^2\left(\frac{R}{2a}\right).$$

Soit $\quad \frac{V_\ell^2 - V_0^2}{V_\ell^2} = \frac{R}{2a} \quad$ et $\quad a = \frac{R}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{V_0}{V_\ell}\right)^2}$

d'où $$\boxed{\frac{a}{R} = \frac{1}{2(1-\eta^2)}} \quad (2)$$

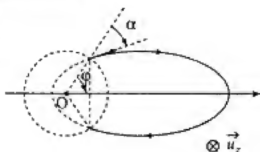
L'excentricité de l'ellipse trajectoire est alors fournie par l'expression $a = \frac{p}{1-e^2}$

soit $\quad e^2 = 1 - \frac{p}{a}$

$$e^2 = 1 - \frac{2\eta^2\sin^2\alpha}{\left(\frac{1}{2(1-\eta^2)}\right)}$$

et $$\boxed{e = \sqrt{1 - 4\eta^2(1-\eta^2)\sin^2\alpha}} \quad (3)$$

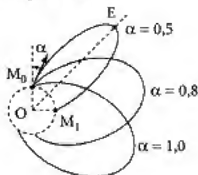
Enfin, déterminons l'angle φ définissant la position du grand axe de l'ellipse (dont le périgée se situe à l'intérieur du cercle de centre O et de rayon R.) la trajectoire a pour équation, en coordonnées polaires, $\frac{p}{r} = 1 + e\cos\theta$ (dans un premier temps, avec les conventions adoptées (*cf.* figure) θ augmente.



D'où $$\frac{p}{R} = 1 + e\cos(\pi - \varphi) \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1 - \frac{p}{R}}{e} \quad (\theta = \pi - \varphi)$$

soit $$\boxed{\cos\varphi = \frac{1 - 2\eta^2\sin^2\alpha}{\sqrt{1 - 4\eta^2(1-\eta^2)\sin^2\alpha}}} \quad (4)$$

Donnons quelques trajectoires pour $\eta = 0,9$:



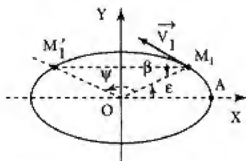
2. a. La particule M est soumise à la force $\vec{F} = -\frac{Km}{R^3}\vec{r}$ (**oscillateur harmonique spatial de centre O**). L'équation de son mouvement est donnée par :

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{Km}{R^3}\vec{r}, \quad \text{soit} \quad \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \frac{K}{R^3}\vec{r} = \vec{0}.$$

Posons $\Omega^2 = \frac{K}{R^3}$ (Ω n'est autre que la pulsation angulaire du mouvement circulaire de rayon R...), il vient : $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \Omega^2\vec{r} = \vec{0}$. (5)

La trajectoire décrite par la particule est plane (force centrale, plan défini par OM_1 et $\vec{V}_1$) : c'est un arc **d'ellipse de centre O** : en choisissant pour axes OX et OY les axes principaux de cette ellipse, l'équation (5) donne, en projection :

$$\begin{cases} \frac{d^2X}{dt^2} + \Omega^2 X = 0 \Rightarrow X = X_0\cos\Omega(t - t_0) \\ \frac{d^2Y}{dt^2} + \Omega^2 Y = 0 \Rightarrow Y = Y_0\sin\Omega(t - t_0). \end{cases}$$

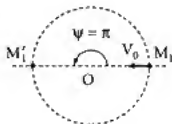


2. b. La particule ressortira du disque de centre O et de rayon R au point M'_1 symétrique de M_1 par rapport à l'axe OY. Le rayon vecteur $\vec{r}$ aura alors tourné d'un angle $\psi = \pi - 2\varepsilon$. D'après le texte, on a :

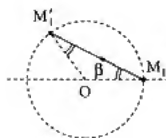
$$\tan\psi = -\frac{2\eta^2\sin2\beta}{1 + 2\eta^2\cos2\beta} \quad (6)$$

Vérifions la cohérence de cette expression.

– pour $\beta = 0$, la particule quitterait le disque au point M'_1 diamétralement opposé, ce qui impose $\psi = \pi$ pour $\beta = 0$ en accord avec (6).

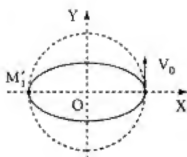


– Pour V_0 suffisamment grand ($\frac{1}{2}mV_0^2 >> \frac{mK}{R}$, soit $\eta^2 >> 1$), la particule présente un déplacement quasi rectiligne. Elle ressort en M'_1 tels que $\psi = \pi - 2\beta$ (cohérent avec (6)).



– Pour $\beta = \frac{\pi}{2}$ la trajectoire a pour équations paramétriques :

$$\begin{cases} X = R\cos\Omega t \\ Y = \dfrac{V_0}{\Omega}\sin\Omega t. \end{cases}$$

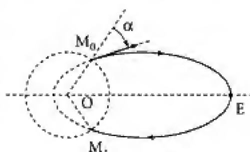


Cette trajectoire est effectivement intérieure au disque de rayon R pour $\frac{V_0}{\Omega} < R$, c'est-à-dire

$$\frac{V_0^2}{K/R^3} < R^2 \Rightarrow \frac{2V_0^2}{V_l^2} < 1 \Rightarrow 2\eta^2 < 1.$$

On doit donc avoir $\psi \to \pi$ pour $\beta \to \frac{\pi}{2}$ quand $2\eta^2 < 1$ ce qui est également vérifié.

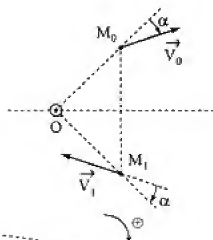
3. Dans un premier temps, la particule décrit l'arc $\widehat{M_0EM_1}$ de **l'ellipse de foyer O** caractérisée au 1. b. Elle revient sur le cercle de rayon R en un point M_1 symétrique de M_0 par rapport à l'axe OE de cette ellipse. La conservation de l'énergie implique (puisque de plus $OM_1 = OM_0 = R$ et donc $E_p(M_1) = E_p(M_0)$) :

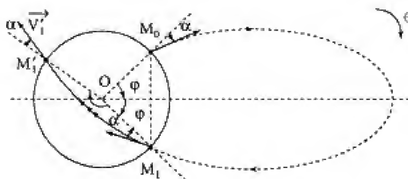


$$\left\|\overrightarrow{V_1}\right\| = V_0.$$

D'autre part, la conservation du moment cinétique va se traduire (puisque $\left\|\overrightarrow{V_1}\right\| = V_0$) par $(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{V_1}) = \pi - \alpha$, (*cf.* figure).

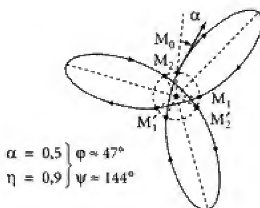
On est alors ramené au cas traité à la question 2. et la particule décrit l'arc $\widehat{M_1M'_1}$ de l'ellipse de centre O, le rayon vecteur tournant d'un angle ψ ($\beta = \alpha$).





La particule ressort en M'_1 avec une vitesse $\overrightarrow{V'_1}$ telle que $\left\|\overrightarrow{V'_1}\right\| = V_0$ (conservation de l'énergie) et $(\overrightarrow{OM'_1}, \overrightarrow{V'_1}) = \alpha$ (conservation du moment cinétique). On est alors ramené à la même situation qu'en M_0, la particule redécrivant un arc d'ellipse de foyer O obtenu à partir de l'arc M_0EM_1 par une rotation d'angle $A = 2\varphi + \psi$.

D'où le dessin :



$$\left.\begin{aligned}\alpha &= 0{,}5\\ \eta &= 0{,}9\end{aligned}\right\}\begin{aligned}\varphi &\approx 47°\\ \psi &\approx 144°\end{aligned}$$

520 Marées

1. On considère deux masses $M_1(m_1)$ et $M_2(m_2)$ formant un système isolé en interaction gravitationnelle. Elles décrivent des trajectoires circulaires (autour de leur centre de masse G) dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_G$. On a $M_1M_2 = D = \text{cte}$.

On appelle $\mathcal{R}'$ le référentiel **en translation** centré sur M_1. On étudie dans $\mathcal{R}'$ le mouvement d'une particule de masse m dont on suppose qu'elle ne perturbe pas le système (M_1, M_2).

a. Montrer que la loi fondamentale de la dynamique appliquée dans $\mathcal{R}'$, à la masse m, s'écrit : $m\vec{a}' = -\dfrac{\mathcal{G}m_1m\vec{r}}{r^3} + m\delta\vec{G} = m(\overrightarrow{G_1} + \delta\vec{G})$

avec $\vec{r} = \overrightarrow{M_1M}$, le point M désignant la masse m.

On montrera que le terme « perturbateur » $\delta\vec{G}$ qui tient compte de la présence du corps M_2 peut se mettre sous la forme :

$$\delta\vec{G} = \frac{\mathcal{G}m_2}{D^2}\vec{F}\left(\frac{\vec{r}}{D}\right).$$

Dans le cas où l'on a $r \ll D$, montrer que la fonction vectorielle $\vec{F}$ s'écrit au premier ordre en $\dfrac{\vec{r}}{D}$:

$$\vec{F} = 3\vec{u}\left(\vec{u}\cdot\frac{\vec{r}}{D}\right) - \frac{\vec{r}}{D} \quad \left(\vec{u} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{M_1M_2}\right).$$

b. Application numérique :

Calculer la valeur du rapport $\dfrac{\|\delta\vec{G}\|_{max}}{\|\vec{G_1}\|}$ pour $\dfrac{r}{D} = 1{,}66 \cdot 10^{-2}$ (D = distance Terre-Lune, $r_{max} = R_T$ rayon de la Terre) et $\dfrac{m_2}{m_1} = 1{,}22 \cdot 10^{-2}$ (rapport des masses de la Lune (m_2) et de la Terre (m_1)).

2. Approche simplifiée du phénomène des marées. La Terre est assimilée à une boule rigide de centre T et de rayon R_T recouverte sous une faible épaisseur par de l'eau. Il s'agit de déterminer la forme de la surface libre en tenant compte de la seule influence de la Lune. On fera donc les hypothèses suivantes :

• le système Terre-Lune est isolé, et la distance D séparant la Terre de la Lune est constante (la Lune est assimilée à un point matériel de masse m_L, et on note m_T la masse de la Terre) ;

• une masse δm de fluide est soumise à l'attraction terrestre, à celle de la Lune ainsi qu'aux forces de pression de résultante $\overrightarrow{\delta f_p}$ telle que

$$\overrightarrow{\delta f_p} = -\frac{\delta m}{\rho_0}\overrightarrow{\text{grad}}\,P$$

ρ_0 = masse volumique invariable de l'eau supposée incompressible).

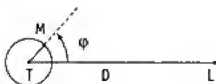
a. On se place dans le référentiel $\mathcal{R}'$ centré en T et en translation par rapport au référentiel galiléen du centre de masse du système Terre-Lune. Donner l'équation traduisant l'équilibre de la masse δm dans $\mathcal{R}'$. On utilisera les résultats du **1.**

b. On suppose que l'eau est en « équilibre à chaque instant » et que l'on peut appliquer le résultat précédent.

α) Montrer que la force perturbatrice liée à la Lune peut se mettre sous la forme :

$$\overrightarrow{\delta f_L} = -\delta m\overrightarrow{\text{grad}}\,V_P(\vec{r}).$$

On exprimera V_P en fonction de $\mathcal{G}$, m_L, D, r = TM (le point M repère la particule fluide) et de l'angle $\varphi = (\overrightarrow{TL}, \overrightarrow{TM})$.



Indication : on pourra projeter $\overrightarrow{\delta f_L}$ sur les axes cartésiens Tx, Ty, Tz ($\vec{u_z}$ // $\overrightarrow{TL}$).

β) En déduire que la surface libre est associée à l'équation :

$$V_1(r_S) + V_P(r_S, \varphi) = \text{cste} \quad \text{où} \quad V_1(r_S) = -\frac{\mathcal{G}m_T}{r_S}.$$

γ) Montrer alors que la variation $s(\varphi)$ du niveau de l'eau (par rapport à une Terre sans lune) s'exprime sous la forme :

$$s \approx \frac{1}{2}\frac{m_L}{m_T}\frac{R_T^4}{D^3}(3\cos^2\varphi - 1).$$

À cet effet, on notera $r_s(\varphi) = R'_T + s(\varphi)$ (R'_T rayon d'une Terre sphérique recouverte d'une épaisseur d'eau uniforme : $R'_T \approx R_T$) et on utilisera le résultat du **2. b.** β).

On tiendra compte de ce que : $\frac{m_L}{m_T}\left(\frac{R_T}{D}\right)^3 \ll 1$.

δ) Application numérique.

Donner dans ce cadre d'hypothèses :

• la hauteur h du marnage (différence entre le niveau le plus haut et le niveau le plus bas) pour un point situé dans le plan équatorial (on supposera que la Lune reste dans ce plan). On prendra $R_T = 6{,}4 \cdot 10^3$ km ;

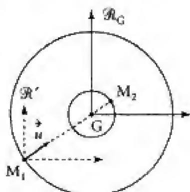
• l'intervalle de temps séparant deux marées hautes consécutives (on considérera que la Lune a dans $\mathcal{R}'$ une trajectoire circulaire autour de T de période $T_L = 28$ jours).

Commenter les résultats obtenus.

Solution

1. a. Le système M_1M_2 forme un système isolé en interaction gravitationnelle.

La distance M_1M_2 étant invariable ($M_1M_2 = D$), les masses m_1 et m_2 décrivent, dans le référentiel $\mathcal{R}_G$ du centre de masse, des cercles centrés en G.



On a donc, dans $\mathcal{R}_G$: $m_1\vec{a}(M_1) = \frac{\mathcal{G}m_1m_2}{D^2}\vec{u}$.

• On étudie maintenant le mouvement d'une masse m $m \ll m_1$ et $m \ll m_2$) dans le référentiel $\mathcal{R}'$ en translation circulaire par rapport à $\mathcal{R}_G$.

Ce référentiel $\mathcal{R}'$ n'étant pas galiléen, il est nécessaire d'introduire la force d'inertie d'entraînement $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}(M_1) = -\frac{\mathcal{G}mm_2}{D^2}\vec{u}$.

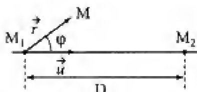
Appliquons la loi fondamentale de la dynamique à la masse m située en M ($\vec{r} = \overrightarrow{M_1M}$), en tenant compte des forces de gravitation exercées sur m par M_1 et M_2 :

$$m\vec{a}' = -\frac{\mathcal{G}mm_1\vec{r}}{r^3} - \mathcal{G}mm_2\frac{\overrightarrow{M_2M}}{M_2M^3} + \vec{f}_{ie}.$$

$$\text{Soit} \quad m\vec{a}' = \underbrace{-\frac{\mathcal{G}mm_1\vec{r}}{r^3}}_{m\vec{G}_1} + \underbrace{\left[-\mathcal{G}mm_2\frac{\overrightarrow{M_2M}}{M_2M^3} - \mathcal{G}mm_2\frac{\vec{u}}{D^2}\right]}_{m\delta\vec{G}}.$$

$$\text{D'où : } \delta\vec{G} = -\mathcal{G}m_2\left\{\frac{\overrightarrow{M_2M}}{M_2M^3} + \frac{\vec{u}}{D^2}\right\}$$

or $\qquad \overrightarrow{M_2M} = \overrightarrow{M_1M} - \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r} - D\vec{u}$.



Et $\qquad \delta\vec{G} = -\mathcal{G}m_2\left\{\dfrac{\vec{r} - D\vec{u}}{\|\vec{r} - D\vec{u}\|^3} + \dfrac{\vec{u}}{D^2}\right\}$.

Soit encore : $\delta\vec{G} = \dfrac{\mathcal{G}m_2}{D^2}\left\{\dfrac{\left(\vec{u} - \dfrac{\vec{r}}{D}\right)}{\left\|\vec{u} - \dfrac{\vec{r}}{D}\right\|^3} - \vec{u}\right\}$ (1)

Le champ perturbateur est bien de la forme $\delta\vec{G} = \dfrac{\mathcal{G}m_2}{D^2}\vec{F}\left(\dfrac{\vec{r}}{D}\right)$ avec :

$$\vec{F}\left(\frac{\vec{r}}{D}\right) = \frac{\vec{u} - \dfrac{\vec{r}}{D}}{\left\|\vec{u} - \dfrac{\vec{r}}{D}\right\|^3} - \vec{u} \quad (2)$$

Supposons maintenant que $r \ll D$, et développons l'expression (2) au premier ordre en $\dfrac{\vec{r}}{D}$. Dès lors :

$$\frac{1}{\left\|\vec{u} - \dfrac{\vec{r}}{D}\right\|^3} = \left[\left(\vec{u} - \frac{\vec{r}}{D}\right)^2\right]^{-3/2} = \left(1 - 2\frac{\vec{u}\,\vec{r}}{D} + \frac{r^2}{D^2}\right)^{-3/2} = 1 + \frac{3\vec{u}\,\vec{r}}{D} + o\left(\frac{r}{D}\right).$$

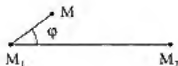
Et $\quad \dfrac{\vec{u} - \dfrac{\vec{r}}{D}}{\left\|\vec{u} - \dfrac{\vec{r}}{D}\right\|^3} = \left(\vec{u} - \dfrac{\vec{r}}{D}\right)\left(1 + \dfrac{3\vec{u}\,\vec{r}}{D} + o\left(\dfrac{r}{D}\right)\right) \approx \vec{u} - \dfrac{\vec{r}}{D} + 3\left(\dfrac{\vec{u}\,\vec{r}}{D}\right)\vec{u}$.

Soit finalement $\boxed{\vec{F}\left(\dfrac{\vec{r}}{D}\right) \approx 3\vec{u}\left(\vec{u}\cdot\dfrac{\vec{r}}{D}\right) - \dfrac{\vec{r}}{D}}$ (3).

À cette approximation, le champ perturbateur s'écrit :

$$\boxed{\delta\vec{G} = \frac{\mathcal{G}m_2}{D^3}[3\vec{u}(\vec{u}\,\vec{r}) - \vec{r}]} \quad (4)$$

1. b. On a $\|\delta\vec{G}\| = \dfrac{\mathcal{G}m_2}{D^3}\sqrt{r^2 + 9(\vec{u}\,\vec{r})^2 - 6(\vec{u}\,\vec{r})^2}$



$\|\delta\vec{G}\| = \dfrac{\mathcal{G}m_2}{D^3}\sqrt{r^2 + 3r^2\cos^2\varphi}$.

D'où $\quad \|\delta\vec{G}\|_{max} = \dfrac{\mathcal{G}m_2}{D^3}2r$. Et $\quad \dfrac{\|\delta\vec{G}\|_{max}}{\|\vec{G}_1\|} = \dfrac{\dfrac{\mathcal{G}m_2 2r}{D^3}}{\dfrac{\mathcal{G}m_1}{r^2}} = 2\left(\dfrac{m_2}{m_1}\right)\cdot\left(\dfrac{r}{D}\right)^3$.

Application numérique :

$$\frac{\left\|\delta\vec{G}\right\|_{max}}{\left\|\vec{G_1}\right\|} = 2 \cdot 1{,}22 \cdot 10^{-2} \times (1{,}66 \cdot 10^{-2})^3 = 1{,}12 \cdot 10^{-7}.$$

On a bien $\left\|\delta\vec{G}\right\|_{max} \ll \left\|\vec{G_1}\right\|$ et l'influence de M_2 sur le mouvement dans $\mathcal{R}'$ de la masse m peut effectivement être traitée en terme de perturbation.

2. a. Le système M_1 et M_2 de la première question est ici remplacé par le système Terre-Lune. La masse δm joue le rôle de m. Elle sera en équilibre dans $\mathcal{R}'$ (repère en translation lié à la Terre) si la résultante des forces appliquées est nulle, soit en tenant compte des résultats du **1.**) :

$$\vec{0} = \delta\vec{f_P} + \delta m(\vec{G_1} + \delta\vec{G}).$$

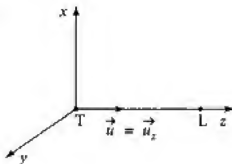
Soit :

$$\boxed{\vec{0} = -\frac{1}{\rho_0}\overrightarrow{\text{grad}}\,P + \vec{G_1} + \delta\vec{G}} \quad (5)$$

Avec $\vec{G_1} = -\dfrac{\mathcal{G}m_T\vec{r}}{r^3}$ $\quad (\vec{r} = \overrightarrow{TM})$ $\quad$ et $\quad \delta\vec{G} \# \dfrac{\mathcal{G}m_L}{D^3}[3\vec{u}(\vec{u}\,\vec{r}) - \vec{r}]$

où $\overrightarrow{TL} = D\vec{u}$.

2. b. α) Il faut montrer que $\delta\vec{G} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V_P(\vec{r})$.



Introduisons l'axe Tz et un repère Txyz. Alors,

$$3\vec{u}(\vec{u}\,\vec{r}) - \vec{r} = 3z\vec{u_z} - (x\vec{u_x} + y\vec{u_y} + z\vec{u_z})$$
$$= 2z\vec{u_z} - (x\vec{u_x} + y\vec{u_y})$$

et $\quad -\dfrac{\partial V_P}{\partial x} = -\dfrac{\mathcal{G}m_L}{D^3}x\,; \quad -\dfrac{\partial V_P}{\partial y} = -\dfrac{\mathcal{G}m_L}{D^3}y\,;$

$$-\frac{\partial V_P}{\partial z} = \frac{\mathcal{G}m_L}{D^3}2z.$$

D'où l'on peut prendre : $V_P(x, y, z) = \dfrac{\mathcal{G}m_L}{D^3}\left(\dfrac{x^2 + y^2}{2} - z^2\right) = \dfrac{\mathcal{G}m_L}{2D^3}(r^2 - 3z^2).$

Or $\quad z = r\cos\varphi$, soit :



$$\boxed{V_P(r, \varphi) = \frac{\mathcal{G}m_L}{2D^3}r^2(1 - 3\cos^2\varphi)} \quad (6)$$

2. b. β) Le champ gravitationnel $\vec{G_1}$ peut être également associé au potentiel $V_1 = -\dfrac{\mathcal{G}m_T}{r}$.
L'équation (5) traduisant « l'équilibre » de la masse d'eau δm devient (ρ_0 = cste) :

$$\vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}}\left[\frac{P}{\rho_0} + V_1(r) + V_P(r, \varphi)\right].$$

La pression au sein de l'eau en « équilibre » se traduit ainsi par l'équation :

$$\frac{P}{\rho_0} + V_l(r) + V_P(r, \varphi) = \text{cste}.$$

Et la surface libre, associée à une pression uniforme (atmosphère) P_0 admet pour équation :

$$V_l(r_S) + V_P(r_S, \varphi) = \text{cste} \quad (7)$$

Pour une Terre sans Lune, on aurait $V_P(r_S, \varphi) = 0$ et $V_l(r_S) = \text{cste}$, ce qui correspond à une surface bien évidemment sphérique pour le modèle présenté ici.

2. b. γ) Notons R'_T son rayon ($R'_T = R_T$).

La présence de la Lune modifie cet état et pour un angle φ donné (symétrie de révolution par rapport à l'axe TL), on note :

$r_S(\varphi) = R'_T + s(\varphi)$ avec $s(\varphi)$ grandeur algébrique très petite devant R'_T.

L'équation (7) donne alors :

$$-\frac{\mathcal{G} m_T}{(R'_T + s)} + \frac{\mathcal{G} m_L}{2D^3}(R'_T + s)^2(1 - 3\cos^2\varphi) = \text{cte}.$$

Et en tenant compte de ce que $|s| \ll R'_T$ et en ne gardant que les termes du premier ordre par rapport à la variable s :

$$-\frac{\mathcal{G} m_T}{R'_T}\left(1 - \frac{s}{R'_T}\right) + \frac{\mathcal{G} m_L}{2D^3}R'^2_T\left(1 + \frac{2s}{R'_T}\right)(1 - 3\cos^2\varphi) = \text{cte}.$$

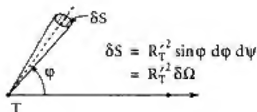
D'où

$$\frac{s}{R'_T}\left\{\underbrace{\frac{m_T}{R'_T}}_{①} + \underbrace{\frac{m_L R'^2_T}{D^3}(1 - 3\cos^2\varphi)}_{②}\right\} + \frac{m_L R'^2_T}{2D^3}(1 - 3\cos^2\varphi) = \text{cte}.$$

Or $\left|\frac{②}{①}\right| \leq 2\frac{m_L}{m_T}\left(\frac{R_T}{D}\right)^3 \ll 1$ (*cf.* Application numérique du 1. b.), d'où :

$$\frac{s}{R'_T} = \text{cte} + \frac{1}{2}\frac{m_L}{m_T}\left(\frac{R'_T}{D}\right)^3(3\cos^2\varphi - 1).$$

Il reste à traduire, pour déterminer la constante, que le volume d'eau n'a pas varié. Or l'élément de surface δS s'est algébriquement déplacé de $s\vec{u}_r$. Soit une variation de volume :



$$\delta V = s\delta S = R'^2_T s\delta\Omega.$$

Et au total : $\delta V_T = R'^2_T \int s\delta\Omega$.

s ne dépendant que de φ on peut prendre $\delta\Omega = 2\pi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \quad (\psi : 0 \to 2\pi)$, d'où :

$$\delta V_T = R_T'^2\, 2\pi \int_0^{\pi} s(\varphi)\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi.$$

On doit avoir $\delta V_T = 0$, ce qui impose $\int_0^{\pi} s(\varphi)\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$

$$\text{or} \quad \int_0^{\pi}(3\cos^2\varphi - 1)\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\pi}(1 - 3\cos^2\varphi)\,\mathrm{d}(\cos\varphi)$$

$$= \Big[\cos\varphi - \cos^3\varphi\Big]_0^{\pi} = 0.$$

On doit donc prendre cste = 0, ce qui donne finalement (avec $R_T' \approx R_T$) :

$$\boxed{s \# \frac{1}{2}\frac{m_L}{m_T}\frac{R_T^4}{D^3}(3\cos^2\varphi - 1)}$$

2. b. δ) Pour un point N dans le plan équatorial qui contient la Lune (*cf.* énoncé), on a : $s_{max} = s(\varphi = 0) = s(\varphi = \pi)$ points N_1 et N_3

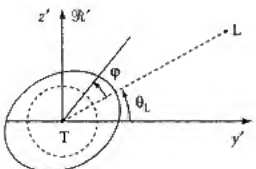
$s_{min} = s\left(\varphi = \dfrac{\pi}{2}\right)$ points N_2 et N_4.

D'où

$$h = s_{max} - s_{min} = \frac{1}{2}\frac{m_L}{m_T}\cdot\frac{R_T^4}{D^3}[(3-1)-(0-1)]$$

$$\boxed{h = \frac{3}{2}\frac{m_L}{m_T}\cdot\frac{R_T^4}{D^3}} \Rightarrow h \# 54 \text{ cm}.$$

D'autre part, dans la modélisation retenue ici, l'eau forme un bourrelet d'axe TL qui tourne dans $\mathfrak{R}'$ à la vitesse angulaire ω_L alors que la partie rigide de la Terre tourne à la vitesse angulaire ω_T. Le point N, lié à la Terre, et contenu dans le plan équatorial, voit le niveau de l'eau s'élever de $s(t)$ avec $\varphi(t) = (\omega_T - \omega_L)t$ (on a considéré qu'à $t = 0$, N est situé sur l'axe TL entre T et L) soit :



$$s(t) = \frac{1}{2}\frac{m_L}{m_T}\cdot\frac{R_T^4}{D^3}[3\cos^2(\omega_T - \omega_L)t - 1].$$

Dans ces conditions, le phénomène des marées présenterait une période T_m définie selon :

$$2(\omega_T - \omega_L)T_m = 2\pi \Rightarrow T_m = \frac{\pi}{\frac{2\pi}{T_T} - \frac{2\pi}{T_L}} = \frac{T_T}{2}\frac{1}{1 - \frac{T_T}{T_L}}$$

or $T_T = 24$ heures et $T_L = 28$ jours d'où :

$$T_m = 12\frac{1}{1 - \frac{1}{28}}\text{ heures} \Rightarrow T_m = \mathbf{12\ h\ 27\ min.}$$

Commentaires

On observe bien des régions de la Terre où les marées sont semi-diurnes (c'est ce qui se passe sur les côtes atlantiques françaises). Mais cette périodicité n'est pas valable pour tous les points du globe.

Par contre, le marnage est très influencé par la forme des côtes. Ainsi certaines baies forment des cavités résonantes qui entrainent des valeurs de *h* beaucoup plus élevées (baie du mont Saint Michel).

Point cours

Soient deux référentiels $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ et $\mathcal{R}'(O', x', y', z')$. M étant un point en mouvement, il possède une vitesse $\overrightarrow{V_{\mathcal{R}}}(M)$ dans $\mathcal{R}$ et $\overrightarrow{V_{\mathcal{R}'}}(M)$ dans $\mathcal{R}'$. La loi de composition des vitesses s'écrit :

$$\overrightarrow{V_{\mathcal{R}}}(M) = \overrightarrow{V_{\mathcal{R}'}}(M) + \vec{V}_e(M).$$

La vitesse $\vec{V}_e(M)$ encore appelée vitesse d'entrainement est celle dans $\mathcal{R}$ du point coïncidant avec M et appartenant à $\mathcal{R}'$.

Dans le cas d'une simple translation (pas forcément rectiligne uniforme) on a $\vec{V}_e(M) = \overrightarrow{V_{\mathcal{R}}}(O')$.

Le mouvement de translation est caractérisé par le fait que les directions d'axe $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ restent fixes dans $\mathcal{R}$, le mouvement dans $\mathcal{R}$ du point O' étant quelconque.

On a ici $\vec{V}_e = \vec{V}_0$ et $\vec{V}(\text{balle}/\mathcal{R}_{sol}) = -V_1\vec{u}_z$ (Oz verticale ascendante).

Soit : $-V_1\vec{u}_z = \vec{V}(\text{balle}/\mathcal{R}_{\text{voiture}}) + \vec{V}_0$

et $\boxed{\vec{V}(\text{balle}/\mathcal{R}_{\text{voiture}}) = -V_1\vec{u}_z - V_0\vec{u}_x = \overrightarrow{V_1'}}$

Fig. 1

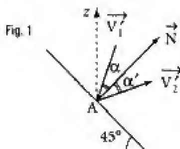
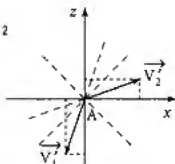


Fig. 2



La balle rebondit symétriquement en conservant le module de sa vitesse, d'où :

$$\alpha = \alpha' \text{ et } \|\overrightarrow{V_1'}\| = \|\overrightarrow{V_2'}\|.$$

Il revient au même de dire que les vecteurs $(A, \overrightarrow{V_2'})$ et $(A, \overrightarrow{V_1'})$ sont symétriques par rapport à la seconde bissectrice (*cf.* figure 2), ce qui implique :

$$V'_{2x} = -V'_{1z} \text{ et } V'_{2z} = -V'_{1x}.$$

Soit encore $\quad V'_{2x} = V_1$ et $V'_{2z} = V_0$.

D'où après rebond, et dans $\mathcal{R}'$: $\overrightarrow{V_2'} = V_1\vec{u}_x + V_0\vec{u}_z$.

Il reste à repasser dans $\mathcal{R}_{sol}$ en appliquant de nouveau la loi de composition des vitesses.

Désignons par $\vec{V}_2$ la vitesse de la balle, il vient :

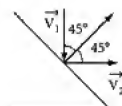
$$\vec{V}_2 = \overrightarrow{V_2'} + \vec{V}_0$$

D'où : $\boxed{\overrightarrow{V_2} = (V_1 + V_0)\overrightarrow{u_x} + V_0\overrightarrow{u_z}}$

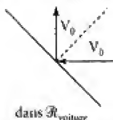
Commentaires

• Pour $V_0 = 0$ (voiture immobile dans $\mathcal{R}_{sol}$), on obtient :

$\overrightarrow{V_2} = V_1\overrightarrow{u_x}$ ce qui est évidemment le résultat attendu.

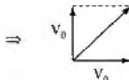


• Pour $V_1 \to 0$, on a bien :



dans $\mathcal{R}_{voiture}$

$\Rightarrow$



dans $\mathcal{R}_{sol}$

• La représentation classique du rebond élastique sur un obstacle n'est géométriquement simple que dans le référentiel où l'obstacle est fixe, d'où l'intérêt d'opérer le changement de référentiel correspondant.

• Les origines précises des deux référentiels utilisés n'interviennent pas : pour exprimer les vitesses par leurs composantes, les vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_z}$ suffisent, et on peut utiliser la même base dans les deux référentiels.

• Notons que sous l'effet du choc la balle, malgré une vitesse initiale faible, sera projetée à une grande distance car sa vitesse aura considérablement augmenté (prendre par exemple $V_1 = 5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et $V_0 = 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} = 36\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$).

Bien sûr, il y a conservation de l'énergie et le gain en énergie cinétique de la balle (dans $\mathcal{R}_{sol}$) se fait au détriment de l'énergie cinétique de la voiture... L'effet est imperceptible du fait de la grande masse de celle-ci (comparée à celle de la balle).

522 Traversée d'une rue

Un piéton désire traverser une rue parcourue par des voitures sur une seule file (voie à sens unique). Une voiture arrive à la vitesse V_0 constante. Le piéton marche (ou court !) en ligne droite, à la vitesse v constante, dont il choisit librement la direction.

En assimilant la voiture à un rectangle de largeur l pratiquement égale à la largeur de la voie, calculer, en fonction de la distance d à laquelle se trouve initialement la voiture, la direction optimale du mouvement du piéton, c'est-à-dire la direction qui lui permet de traverser sans risque de collision, et avec la vitesse v la plus faible possible.

On cherchera la solution par deux méthodes différentes.

Commenter les courbes obtenues.

b. Déterminer la trajectoire du bateau dans le repère lié aux rives et retrouver les résultats précédents. On se placera en coordonnées polaires de centre B_0 et on posera $\eta = \frac{V}{W}$.

On donne une primitive de $\frac{1}{\sin\theta}$: $\int \frac{d\theta}{\sin\theta} = \ln\left|\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$.

1. Ce qu'il faut savoir

Points de cours

- Composition des vitesses.
- Vitesse en coordonnées polaires.

Outils mathématiques

- Coordonnées polaires.
- Équations différentielles du premier ordre à variables séparables.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. a. En mécanique classique, le temps est indépendant du référentiel choisi. On peut donc minimiser la durée de traversée en se plaçant dans le référentiel où le problème est le plus simple.

b. Dans cette question, il faut évidemment se placer dans le référentiel lié aux rives. On peut jouer sur l'angle α que fait la vitesse $\vec{V}$ avec la normale aux rives, et une discussion devra être envisagée selon les valeurs comparées de V et de W.

2. a. Deux cas se présentent selon que $V > W$ ou $V < W$, ce qui était physiquement attendu.

b. Il suffit de traduire qu'en chaque point de la trajectoire, la tangente est colinéaire à la vitesse. On peut s'attendre à ce que le rapport $\eta = \frac{V}{W}$ joue un rôle important. Ainsi si $V < W$, le bateau n'est pas assez rapide pour « remonter » le courant, et il est prévisible que le point de visé ne sera pas accessible.

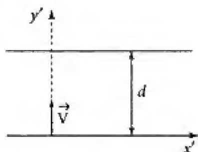
3. Solution

1. a. Plaçons-nous dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié à l'eau. Le bateau s'y déplace avec une vitesse de module constant V.

La durée de la traversée correspond alors à :

$$\Delta t' = \frac{L}{V}$$

où L est la longueur du trajet suivi dans $\mathcal{R}'$.



Elle sera minimale pour $L = d$. Il faut donc orienter l'axe du bateau (direction de $\vec{V}$) perpendiculairement aux rives.

■ Approche analytique

La vitesse du bateau dans $\mathcal{R}$ est $\vec{v} = V\vec{u} + W\vec{u_x}$, soit en notant α l'angle $(\vec{u_y}, \vec{V})$:

$$\begin{cases} v_x = W - V\sin\alpha \\ v_y = V\cos\alpha. \end{cases}$$

L'équation de la trajectoire est alors (origine en A) :

$$\begin{cases} x = (W - V\sin\alpha)t \\ y = V\cos\alpha t. \end{cases}$$

L'abscisse du point d'arrivée C est donnée par $y(t_C) = d$, d'où :

$$x_C = (W - V\sin\alpha)\frac{d}{V\cos\alpha}.$$

Le chemin parcouru sera d'autant plus court que C est proche de B_0.

• Pour $V > W$, on peut réaliser $C = B_0$, c'est-à-dire $x_C = 0$. Il suffit d'imposer :

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{W}{V}}$$

• Pour $V < W$, la situation précédente n'est plus réalisable et $x_C > 0$.

Étudions rapidement la fonction $\alpha \to x_C(\alpha)$. Sa dérivée s'écrit :

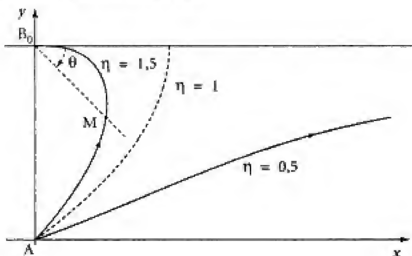
$$\frac{dx_C}{d\alpha} = \frac{d}{V}\cdot\left\{\left(\frac{W - V\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\right)\sin\alpha - \frac{V\cos\alpha}{\cos\alpha}\right\}$$

soit $\quad \dfrac{dx_C}{d\alpha} = \dfrac{d}{V\cos^2\alpha}\{W\sin\alpha - V\sin^2\alpha - V\cos^2\alpha\} = \dfrac{d}{V\cos^2\alpha}\{W\sin\alpha - V\}.$

Elle s'annule pour α tel que $\boxed{\sin\alpha = \frac{V}{W}}$ et il s'agit bien d'un minimum.

On retrouve ainsi les résultats obtenus par la méthode géométrique.

2. a. Examinons les différentes trajectoires :



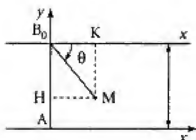
> **POINT COURS**
> Une équation en polaire du type $r = \dfrac{d}{1 + e\cos\theta}$ est représentative d'une conique. On rencontre ce type de trajectoire lors de l'étude du mouvement d'un point matériel soumis à une force centrale attractive $\vec{f} = -\dfrac{K}{r^2}\vec{u}_r$ de centre O.
>
> - $|e| < 1$ correspond à une ellipse dont O est l'un des foyers.
> - $|e| > 1$ est associé à une hyperbole dont O est l'un des foyers.
> - $|e| = 1$ donne une parabole.

- Par ailleurs, on a :

$$\overline{HB_0} = r\sin\theta = d \cdot \left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^{\eta} \quad (2)$$

et $$\overline{B_0K} = r\cos\theta = d\,\frac{\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^{\eta}\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\overline{B_0K} = \frac{d}{2}\,\frac{\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\eta-1}\cos\theta}{\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\eta+1}} \quad (3)$$



L'équation (2) traduit le fait que le bateau coupera l'axe des x, lorsque cela est possible, pour la valeur 0 de θ. L'équation (3) met alors en évidence deux cas :

– Soit $\eta > 1$ $(V > W)$ et $\overline{B_0K}$ tend vers 0 avec θ.

Il en résulte que le bateau atteindra bien l'autre rive en B_0 point visé.

– Soit $\eta < 1$ $(V < W)$ et $\overline{B_0K}$ tend vers l'infini quand $\theta \to 0$, le bateau n'atteindra jamais l'autre rive. Il est entraîné par le courant.

On retrouve bien la condition $V > W$ pour que le point visé B_0 soit effectivement atteint.

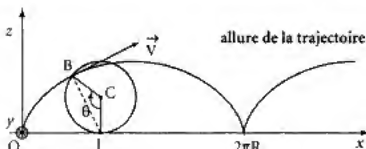
524 Roulement sans glissement d'une roue

Une roue de rayon R roule sans glisser sur un rail rectiligne Ox. Un point B à la périphérie de la roue coïncide à la date $t = 0$ avec l'origine O du repère. Le centre C de la roue a une vitesse $\vec{V_0} = V_0\vec{u_x}$ $(V_0 > 0)$.

1. Déterminer les coordonnées $x(t)$, $z(t)$ du point B. On introduira l'angle $\theta(t)$ dont la roue a tourné depuis la date $t = 0$.
Quelle est la trajectoire de B dans un référentiel $\mathcal{R}$ lié au rail ?

Commentaire

Le point I (point de la roue en contact avec le rail), momentanément immobile dans $\mathcal{R}$, est le centre instantané de rotation, et le point B est, dans ce référentiel, en rotation instantanée autour de l'axe Iy.



2. b. On calcule de même l'accélération de B en dérivant $\vec{V}$ par rapport au temps :

$\vec{A} = \dfrac{d\vec{V}}{dt}$ d'où $\vec{A}\begin{vmatrix}\omega^2 R\sin\theta \\ \omega^2 R\cos\theta\end{vmatrix}$ $\boxed{\vec{A} = \omega^2(R\sin\theta\vec{u_x} + R\cos\theta\vec{u_z}) = \omega^2\overrightarrow{BC}}$

L'accélération est donc centripète par rapport à C.

3. Dans le référentiel $\mathcal{R}'$ d'origine C, en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}$, le mouvement de B est un mouvement circulaire défini par la loi $\theta(t)$.

POINT COURS

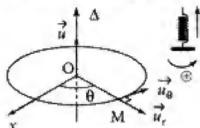
Considérons un point M se déplaçant sur un cercle de centre O et de rayon R. M est en rotation autour d'un axe Δ passant par O normal au plan de la trajectoire.

Dans la base polaire $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$, exprimons $\overrightarrow{OM} = R\vec{u_r}$ et $\vec{V} = R\dot{\theta}\vec{u_\theta}$.

On définit le *vecteur rotation* $\boxed{\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{u}}$ où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire de l'axe de rotation orienté selon le sens positif : un tire-bouchon tournant dans le sens des θ croissants se déplace dans le sens de $\vec{u}$.

Le vecteur vitesse $\vec{V}$ peut alors s'exprimer indépendamment de toute base :

$$\boxed{\vec{V}(M) = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}}$$



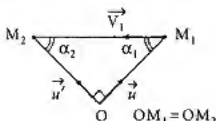
Le mouvement circulaire étudié ici est caractérisé par le vecteur rotation $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{u_y}$ et $\vec{V}'(B) = \vec{V}(B)/\mathcal{R}' = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{CB}$. D'après la loi de composition des vitesses :

$$\vec{V}(B)/\mathcal{R} = \vec{V}(B)/\mathcal{R}' + \vec{V_e}(B)$$

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{V_0} \text{ ($\mathcal{R}'$ en translation par rapport à $\mathcal{R}$ à la vitesse $\vec{V_0}$)}$$

$$\vec{V} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{CB} + \vec{V_0}.$$

La vitesse instantanée du point M_1 est constamment dirigée vers M_2 et son module est constant et vaut V.



Or le triangle M_1OM_2 est rectangle et isocèle puisque $OM_1(t) = OM_2(t)$, et :

$$(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}) = \underbrace{(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2})}_{\frac{\pi}{2}} + \underbrace{(\overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OM_2})}_{\theta} - \underbrace{(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OM_1})}_{\theta}.$$

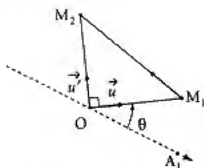
Il vient alors $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{4}$. D'où en projetant la vitesse $\overrightarrow{V_1}$ sur la base orthonormée $\vec{u}$, $\vec{u'}$ ($\vec{u}$ porté par OM_1 et $\vec{u'}$ par OM_2) :

$$\overrightarrow{V_1} = \left(-V\cos\frac{\pi}{4}\right)\vec{u} + \left(V\sin\frac{\pi}{4}\right)\vec{u'} = V\frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{u} + \vec{u'}) \qquad (1)$$

Or les composantes de la vitesse $\overrightarrow{V_1}$ en coordonnées polaires d'axe OA_1 s'écrivent :

$$\overrightarrow{V_1} = \dot{r}\vec{u} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} \qquad (2)$$

avec (*cf.* figure) $\overrightarrow{u_r} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{u_\theta} = \vec{u'}$.



On a donc en particulier $\dot{r}(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}V$.

À l'instant initial $t = 0$, on a $r = OA_1 = a$.

Le point matériel atteindra le point O (lieu de rencontre des quatre mouches) au bout d'un temps tel que :

$$\int_0^\tau \dot{r}(t)\mathrm{d}t = -\frac{\sqrt{2}}{2}V\int_0^\tau \mathrm{d}t \qquad \text{(V est une constante).}$$

Soit encore $\int_a^0 \mathrm{d}r = -\frac{\sqrt{2}}{2}V\tau \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}}V\tau$,

d'où
$$\boxed{\tau = \frac{a\sqrt{2}}{V}}$$

Pendant dt, la mouche M_1 aura ainsi parcouru la distance $\mathrm{d}s = V\mathrm{d}t$. Au total, son trajet aura une longueur $L = \int \mathrm{d}s$, d'où :

$$L = \int_0^\tau V\mathrm{d}t \Rightarrow L = V\tau \Rightarrow \boxed{L = a\sqrt{2}}$$

2. On a montré, à la question précédente, que (*cf.* (1) et (2)) :

$$\overrightarrow{V_1} = V\frac{\sqrt{2}}{2}(-\overrightarrow{u_r} + \overrightarrow{u_\theta}) = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}.$$

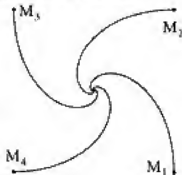
On a donc
$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -V\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = V\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (3)$$

POINT MÉTHODE

Pour déterminer l'équation différentielle, il suffit d'éliminer dt dans (3).

L'équation différentielle de la trajectoire $r(\theta)$ est alors donnée par l'équation :

$$\frac{dr}{rd\theta} = \frac{\frac{dr}{dt}}{r\frac{d\theta}{dt}} = \frac{-V\frac{\sqrt{2}}{2}}{V\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1.$$



Soit $\frac{dr}{r} = -d\theta$. Et, après intégration, en remarquant que $\theta(0) = 0$ et $r(0) = a$:

$$\ln\frac{r(t)}{a} = -\theta(t) \Rightarrow \boxed{r = a\exp(-\theta)}$$

La trajectoire est une spirale logarithmique.

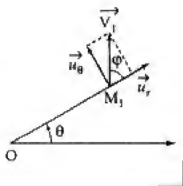
Commentaire

On a montré que $(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{V_1}) =$ constante $\left(\text{ici } \frac{3\pi}{4}\right)$.

C'est une propriété caractéristique d'une spirale logarithmique. En effet, on a (*cf.* figure ci-contre) :

$\cot\varphi = \frac{dr}{rd\theta} = K =$ constante $\Rightarrow \frac{dr}{r} = K\theta$

et $r = r_0 e^{K\theta}$.



Les lois horaires $r(t)$ et $\theta(t)$ s'obtiennent à partir des relations (3) :

$\frac{dr}{dt} = -V\frac{\sqrt{2}}{2}$ donne : $\boxed{r(t) = -V\frac{\sqrt{2}}{2}t + a}$ $(r(0) = a)$.

$r\frac{d\theta}{dt} = V\frac{\sqrt{2}}{2}$ devient $\frac{d\theta}{dt} = V\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{a - V\frac{\sqrt{2}}{2}t}$ $\left(t < \frac{a\sqrt{2}}{V}\right)$.

$$\text{D'où} \quad d\theta = \frac{\left(V\frac{\sqrt{2}}{2}dt\right)}{a - V\frac{\sqrt{2}}{2}t} = -d\ln\left(a - V\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)$$

et $\theta(t) = -\left[\ln\left(a - V\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)\right]_0^t$ puisque $\theta(0) = 0$.

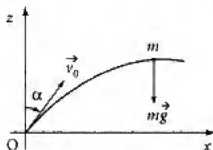
Soit : $\boxed{\theta(t) = -\ln\left[1 - V\frac{\sqrt{2}}{2a}t\right]}$

3. Solution

1. Le mouvement d'un projectile soumis à la seule force de pesanteur est plan, dans le plan défini par O, $\vec{g}$ et $\vec{v_0}$ (le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ est supposé galiléen…). Prenons Ox horizontal dans ce plan.

L'équation du mouvement

$$m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g}$$



donne alors, en projection :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$$

d'où : $\begin{cases} \dot{x} = \text{constante} = v_0 \sin\alpha \\ \dot{z} = -gt + \text{constante} = -gt + v_0\cos\alpha \end{cases}$

et : $\begin{cases} x = v_0 \sin\alpha \cdot t & (x(t=0) = 0) \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\cos\alpha \cdot t & (z(t=0) = 0). \end{cases}$

À une date t donnée, la position (x, z) de chaque projectile est fonction de α. L'équation vérifiée par les coordonnées de tous les projectiles s'obtient en éliminant α entre les deux équations du mouvement :

$$\sin\alpha = \frac{x}{v_0 t}; \quad \cos\alpha = \frac{z + \frac{1}{2}gt^2}{v_0 t}.$$

Soit $\left(\frac{x}{v_0 t}\right)^2 + \left(\frac{z + \frac{1}{2}gt^2}{v_0 t}\right)^2 = 1 \qquad (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1)$

$$x^2 + \left(z + \frac{1}{2}gt^2\right)^2 = (v_0 t)^2$$

équation d'un cercle de rayon $v_0 t$, centré sur Oz en C $(x_C = 0,\ z_C = -\frac{1}{2}gt^2)$: dans l'espace, les projectiles seront répartis sur la sphère de centre C et de rayon $R = v_0 t$.

2. Le référentiel $\mathcal{R}'$ est en translation rectiligne par rapport au référentiel $\mathcal{R}$, avec l'accélération constante $\vec{a_e} = \vec{g}$, et confondu avec $\mathcal{R}$ à la date $t = 0$.

Il est donc caractérisé par le mouvement de chute libre $z_{\mathcal{R}'} = -\frac{1}{2}gt^2$: il a pour origine le point C, et les projectiles s'éloignent tous uniformément de C.

Les trajectoires dans $\mathcal{R}'$ sont donc des droites parcourues à la vitesse v_0 (à la date t, ils sont à la distance $R = v_0 t$ …). Le résultat est évident si l'on compare les accélérations d'un point M dans les deux référentiels :

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \vec{a}(M/\mathcal{R}') + \vec{a_e}(M)$$

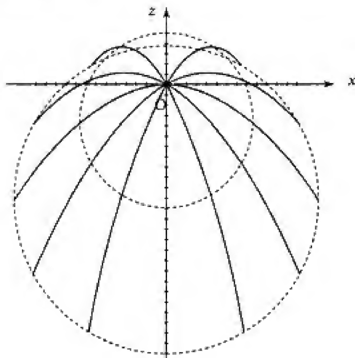
avec ici : $\vec{a}_e(\mathrm{M}) = \vec{a}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \vec{g}$ (mouvement de translation)

soit : $\vec{g} = \vec{a}(\mathrm{M}/\mathcal{R}') + \vec{g}$ et : $\vec{a}(\mathrm{M}/\mathcal{R}') = \vec{0}$.

Le mouvement de M dans $\mathcal{R}'$ est rectiligne et uniforme (à la vitesse v_0, d'après la loi de composition des vitesses, appliquée à $t = 0$), ce qui est bien le résultat déjà obtenu.

Remarque

On peut visualiser le cercle obtenu (dans le plan xOz) en « arrêtant » le mouvement des projectiles à une date t donnée :



527 Verticale apparente sur un manège

Sur le plancher d'un manège, tournant à une vitesse angulaire ω constante autour d'un axe vertical (verticale définie par la direction de $\vec{g}$, le référentiel terrestre étant supposé galiléen), un observateur veut déterminer la direction de la « verticale » dans le référentiel du manège à l'aide d'un fil à plomb (masse m suspendue à un fil de masse négligeable).

L'observateur tient le fil en un point A, à la distance x_0 de l'axe de rotation, et à une hauteur h au-dessus du plancher du manège.

Il ajuste alors la longueur du fil du pendule, de façon à ce que la masse m effleure un point B du plancher (sans qu'il y ait contact...), et il appelle « verticale » du point A la direction AB du fil.

1. Caractériser cette direction pour un point A quelconque.

2. Que pensez-vous de cette définition de la verticale ?

1. Ce qu'il faut savoir

- Équilibre dans un référentiel non galiléen.
- Forces d'inertie.

2. Ce qu'il faut comprendre

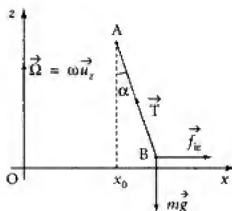
1. Le bilan des forces (et des forces d'inertie...) appliquées à la masse m située pratiquement au point B doit permettre de déterminer la direction AB.

2. On pourra rechercher l'existence de cas singuliers et/ou de cas limites, et s'interroger sur la signification physique d'une telle verticale.

3. Solution

1. Quel que soit le référentiel envisagé, la masse m en B, pratiquement dans le plan $z = 0$ du manège (tournant autour de l'axe Oz), est soumise à deux forces :

- son poids $m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$;
- la tension $\vec{T}$ du fil, portée par AB.



Si on se place dans le référentiel $\mathcal{R}$ **lié au manège** (celui où le point B est immobile, donc en équilibre...), il faut y ajouter les forces d'inertie liées au mouvement de $\mathcal{R}$, en rotation uniforme par rapport au référentiel terrestre galiléen.

> **POINT COURS**
>
> **Les forces d'inertie appliquées à un point matériel M, dans un référentiel en rotation (rotation d'axe Oz caractérisée par le vecteur $\vec{\Omega}$) sont :**
>
> **– la force d'inertie d'entraînement :**
>
> $$\vec{f}_{ie} = -m\left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM})\right);$$
>
> **– la force d'inertie de Coriolis :**
>
> $$\vec{f}_{ic} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R}).$$

Dans le cas présent, $M = B$, la rotation est uniforme ($\vec{\Omega} = \overrightarrow{\text{cste}}$) et $\vec{f}_{ie}$ devient :

$$\vec{f}_{ie} = -m\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OB}) = +m\Omega^2\overrightarrow{HB} = +m\Omega^2\overrightarrow{OB}$$

(H est le projeté du point mobile sur l'axe de rotation...).

D'autre part, $\vec{f_{ic}} = \vec{0}$ puisque le point B est immobile dans $\mathfrak{R}$. La loi fondamentale de la dynamique, appliqué à la masse m, immobile dans $\mathfrak{R}$, donne :

$$\frac{\overrightarrow{dp}}{dt} = m\vec{a} = \vec{0} = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{f_{ic}}.$$

Il en résulte que AB est dans le plan vertical contenant Oz et A (plan Oxz).
Appelons x l'abscisse de B et α l'angle de AB avec Oz. En projetant sur la direction perpendiculaire à $\vec{T}$: $-mg\sin\alpha + m\omega^2 x\cos\alpha = 0$ soit : $\tan\alpha = \frac{\omega^2 x}{g}$ (1)

D'autre part : $\tan\alpha = \frac{x - x_0}{h}$ soit : $x = x_0 + h\tan\alpha$

et, en reportant : $\tan\alpha = \frac{\omega^2}{g}(x_0 + h\tan\alpha)$

$$\tan\alpha\left(1 - \frac{\omega^2 h}{g}\right) = \frac{\omega^2}{g}x_0$$

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{x_0}{\frac{g}{\omega^2} - h} = \frac{x_0}{h_{max} - h}} \quad \text{en posant} \quad h_{max} = \frac{g}{\omega^2}.$$

La direction AB est ainsi déterminée par l'angle α qu'elle fait avec Oz, dans le plan xOz.

2. Le résultat ci-dessus appelle quelques commentaires :

• Le calcul et le résultat n'ont de sens que pour $h < h_{max} = \frac{g}{\omega^2}$. Pour $h \geq h_{max}$, le point B est rejeté à l'infini (α augmente et tend vers $\frac{\pi}{2}$ à mesure que l'observateur laisse glisser le fil…).

• Pour un point A donné, la méthode proposée définit donc bien une direction AB unique, repérée par α tel que :

$$\tan\alpha = \frac{x_0}{h_{max} - h} \quad \text{si} \quad h < h_{max} = \frac{g}{\omega^2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \quad \text{si} \quad h \geq h_{max}.$$

Pour $h \geq h_{max}$, la « verticale » du point A dans $\mathfrak{R}$ est horizontale dans $\mathfrak{R}_{terrestre}$!

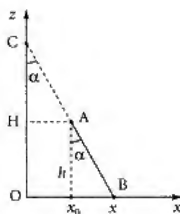
• Le calcul précédent garde un sens pour $h \to 0$, c'est-à-dire pour un point A très proche du plancher du manège :

$$\tan\alpha \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \frac{\omega^2 x_0}{g} = \frac{\omega^2 x}{g} \text{ (cohérent avec la relation (1)).}$$

(À la limite, on a un fil à plomb de longueur nulle !).

• Même si cette définition de la « verticale » est logiquement cohérente, on peut s'interroger sur sa signification physique. En particulier, pour un point A′ situé le long de AB, la « verticale » est-elle la direction de AB ?

Étudions cette droite AB, elle coupe l'axe Oz en un point C, d'ordonnée z_C et $\tan\alpha = \frac{x}{z_C} = \frac{x_0}{z_C - h}$ (les triangles COB et CHA sont semblables…).
On a donc, par identification : $z_C = h_{max} = \frac{g}{\omega^2}$.



La position du point C est indépendante du choix de A : toutes les « verticales » des points A tels que $h < h_{max}$ sont concourantes au point C !

Réciproquement, tous les points A′ alignés avec C et A ont même « verticale » CAB.

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d_m} = \frac{1}{2}mV_0^2\left[1 - \frac{m}{m+M}\right] = \frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}V_0^2$$

d'où finalement :

$$\boxed{d_m = \frac{q^2(m+M)}{2\pi\varepsilon_0 mMV_0^2}}$$

Commentaires

- Si V_0 augmente, la distance minimale d'approche est plus faible, ce qui est cohérent puisqu'on lance P avec une énergie cinétique plus grande.
- En introduisant $\mu = \dfrac{mM}{m+M}$ (masse réduite du système), $d_m = \dfrac{q^2}{2\pi\varepsilon_0\mu V_0^2}$.

1. b. α)

> **POINT COURS**
>
> **Le référentiel barycentrique est un référentiel d'origine G centre de masse en translation par rapport au référentiel du laboratoire.**
>
> **Si le système est pseudo-isolé, il y a conservation de la quantité de mouvement du système et donc le barycentre G a une vitesse constante. Si le référentiel du laboratoire est galiléen, il en sera donc de même du référentiel barycentrique.**

Dans le référentiel du laboratoire, la vitesse du centre de masse donnée par $\overrightarrow{V_G} = \dfrac{m\overrightarrow{V_P} + M\overrightarrow{V_Q}}{m+M}$ vaut ici $\overrightarrow{V_G} = \dfrac{mV_0}{m+M}\overrightarrow{u_x}$.

La loi de composition des vitesses s'écrit :

$$\begin{cases} \overrightarrow{V_0} = \overrightarrow{V_G} + (\overrightarrow{V'_P})_0 \\ \overrightarrow{0} = \overrightarrow{V_G} + (\overrightarrow{V'_Q})_0 \end{cases}$$

$\overrightarrow{V'_P}$ et $\overrightarrow{V'_Q}$ étant respectivement les vitesses initiales de P et Q dans le référentiel barycentrique,

d'où : $(\dot{x}'_P)_0 = V_0 - \dfrac{mV_0}{m+M} = \dfrac{MV_0}{m+M}$

$(\dot{x}'_Q)_0 = -\dfrac{mV_0}{m+M}$.

1. b. β)

> **POINT COURS**
>
> Dans le référentiel barycentrique et à chaque instant $\begin{cases} x'_P = \overline{GP} = x_P - x_G \\ x'_Q = \overline{GQ} = x_Q - x_G \end{cases}$
>
> avec $x_G = \dfrac{mx_P + Mx_Q}{m+M}$

On reconnait l'expression de $d_m = \dfrac{q^2(m+M)}{2\pi\varepsilon_0 mMV_0^2}$

d'où $\left(\dfrac{\dot{r}}{V_0}\right)^2 = 1 + \left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{r}\right)d_m$ (4)

La distance minimale d'approche est r_m telle que $\dot{r} = 0$.

Soit $1 = d_m\left(\dfrac{1}{r_m} - \dfrac{1}{a}\right) \Rightarrow r_m = \dfrac{d_m}{1+\left(\dfrac{d_m}{a}\right)}$.

Remarquons que lorsque $a \to \infty$, on se retrouve dans le cas précédent et $r_m \to d_m$.
L'expression (4) se réécrit à l'aide de d_m et r_m :

$$\left(\frac{\dot{r}}{V_0}\right)^2 = d_m\left(\frac{1}{r_m} - \frac{1}{r}\right) = \frac{d_m}{r_m}\left(1 - \frac{r_m}{r}\right).$$

POINT MÉTHODE

Mathématiquement, l'équation $\left(\dfrac{\dot{r}}{V_0}\right)^2 = f(r)$ donne $\dfrac{\dot{r}}{V_0} = \pm\sqrt{f(r)}$.

Physiquement, on lève l'indétermination du signe.

Ici, r diminue au cours du temps donc $\dot{r} < 0$ (phase de rapprochement).

$$\dot{r} = -V_0\sqrt{\frac{d_m}{r_m}}\sqrt{1 - \frac{r_m}{r}} \quad \text{(relation manifestement homogène).}$$

Posons $u = \dfrac{r}{r_m}$, on obtient $\dfrac{\dot{r}}{r_m} = -\dfrac{V_0}{r_m}\sqrt{\dfrac{d_m}{r_m}}\sqrt{1 - \dfrac{1}{u}}$.

Il apparaît un temps caractéristique :

$$\tau = \frac{r_m}{V_0}\sqrt{\frac{r_m}{d_m}}.$$

L'équation du mouvement devient :

$$\frac{du}{\sqrt{1 - \frac{1}{u}}} = -\frac{dt}{\tau}.$$

On reconnait la primitive donnée par l'énoncé lorsque r varie de a à $r(t)$, u varie de $\dfrac{a}{r_m}$ à $\dfrac{r(t)}{r_m}$. On obtient donc :

$$\left[\operatorname{Arg\,ch}(\sqrt{u}) + \sqrt{u}\sqrt{u-1}\right]_{a/r_m}^{r(t)/r_m} = -\frac{t}{\tau}.$$

Le temps τ' pour atteindre l'état $r = r_m$ s'obtient en faisant $\dfrac{r(t)}{r_m} = 1$ dans l'expression précédente soit :

$$\tau' = \tau\left[\operatorname{Arg\,ch}\left(\sqrt{\frac{a}{r_m}}\right) + \sqrt{\frac{a}{r_m}}\sqrt{\frac{a}{r_m} - 1}\right].$$



Point matériel sur une sphère

Un point matériel M de masse m est assujetti à se déplacer sur une sphère de centre O et de rayon a. La liaison est bilatérale (le point M ne peut donc pas quitter la sphère) et sans frottements. Le mouvement du point M est repéré par ses coordonnées cylindriques r, θ, z, l'axe Oz étant confondu avec un des diamètres de la sphère.

À l'instant initial, le point M possède une vitesse $\overrightarrow{V_0} = V_0\overrightarrow{u_\theta}$ tangente à la sphère et perpendiculaire à Oz ; Il se confond avec un point M_0 tel que $(\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OM_0}) = \alpha_0$ ($\alpha_0 \in\ ]0, \pi[$) et donc de cote $z_0 = a\cos\alpha_0$.

1. On suppose dans cette question l'absence de pesanteur.

Décrire le mouvement ultérieur du point matériel.

2. On désire prendre en compte la pesanteur, l'axe Oz correspondant à la verticale ascendante : $\vec{g} = -g\overrightarrow{u_z}$.

a. Montrer que dans certains cas, on peut observer un mouvement circulaire d'axe Oz. Quelle valeur V_c faut-il alors donner à V_0 ? Commenter.

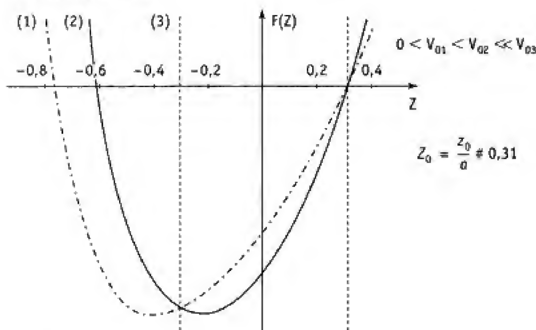
b. α) Justifier que l'énergie mécanique E_m associée au point matériel est une constante du mouvement.
Cette énergie E_m peut se mettre sous la forme :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 f(z) + U_{eff}(z) = E_0.$$

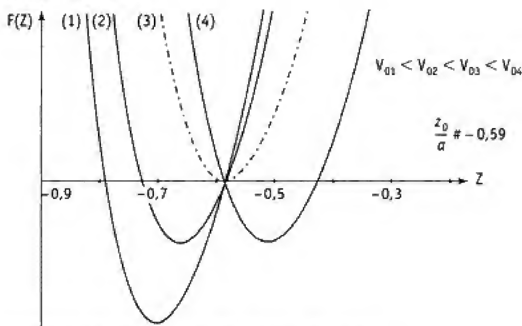
E_0 étant définie par les conditions initiales, et $f(z) > 0$.
On a tracé les courbes donnant :

$$Z = \frac{z}{a} \rightarrow F(Z) = \frac{U_{eff}(z) - E_0}{mga}.$$

■ **1er cas** : $\alpha_0 = 0{,}4\pi$.



■ **2ᵉ cas :** $\alpha_0 = 0{,}7\pi$.



Commenter ces courbes et préciser le mouvement selon z.

β) L'expression de $U_{eff}(z)$ est donnée par :

$$U_{eff}(z) = mgz + \frac{ma^2v_0^2\sin^2\alpha_0}{2(a^2 - z^2)}.$$

L'origine de l'énergie potentielle de pesanteur est prise en O.

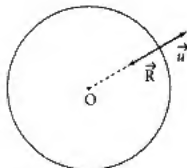
Retrouver les résultats obtenus au **2. a.**

δ) Montrer que la composante σ_z, selon $\vec{u}_z$, du moment cinétique en O, $\vec{\sigma}(O)$, est également une constante du mouvement. Justifier alors l'expression de $U_{eff}(z)$ donnée au **2. β)**.

Que peut-on dire du mouvement du point M ?

Solution

1. Le point matériel se déplace sur une surface sphérique de centre O et de rayon a. Il est soumis à la réaction $\vec{R}$ qui est normale à cette surface (liaison sans frottements) et donc colinéaire à $\vec{u}$.



$\vec{R} = R\vec{u}$ (R algébrique dans cette expression).

Le support de cette force passant par O, son moment en ce point est nul :

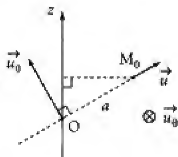
$$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{R}}(O) = \vec{0}.$$

On est donc invité à appliquer le théorème du moment cinétique en O selon :

$$\frac{d\vec{\sigma}(O)}{dt} = \vec{\mathcal{M}}(O) = \vec{\mathcal{M}}_{\vec{R}}(O) = \vec{0}.$$

Il en résulte que le moment cinétique $\vec{\sigma}(\mathrm{O})$ est une **constante du mouvement** dont la valeur est donnée à partir des conditions initiales :

$$\vec{\sigma}(\mathrm{O}) = \overrightarrow{\mathrm{OM}_0} \wedge maV_0\vec{u}_\theta$$



soit $\vec{\sigma}(\mathrm{O}) = maV_0\vec{u}_0$

$\vec{u}_0$ est un vecteur constant contenu dans le plan $(\mathrm{O}z, \mathrm{OM}_0)$ et perpendiculaire à OM_0 (*cf.* figure ci-contre).

On a donc, quel que soit t : $\overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge m\vec{V} = maV_0\vec{u}_0$.

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ est ainsi perpendiculaire à $\vec{u}_0$.

La trajectoire suivie par la particule est de ce fait un grand cercle de centre O passant par M_0 et contenu dans le plan $(\overrightarrow{\mathrm{OM}_0}, \vec{V}_0 = V_0\vec{u}_\theta)$ perpendiculaire à $\vec{u}_0$.

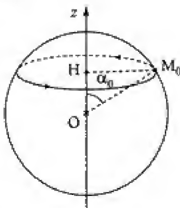
Cette trajectoire circulaire sera décrite à vitesse de module V_0 constant comme nous l'indique le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{\mathrm{dE_c}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{\vec{R}} = \vec{R}\cdot\vec{V} = 0.$$

La réaction $\vec{R}$ est à chaque instant perpendiculaire à la vitesse (absence de frottements).

On a bien $\mathrm{E_c}$ = constante, soit $\|\vec{V}\| = \text{cste} = V_0$.

2. a. On tient compte désormais de la pesanteur avec $\vec{g} = -g\vec{u}_z$. Il n'y a donc en général ni conservation du moment cinétique en O (le poids ne passe pas par O) ni conservation de l'énergie cinétique (le poids travaille quand z varie).



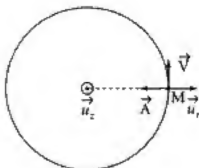
On cherche à démontrer qu'une trajectoire circulaire d'axe Oz est envisageable.

Dans ce cas, l'altitude du point M est constante ainsi que son énergie potentielle ($\mathrm{E_p} = mgz$ avec une origine arbitraire en O). Le théorème de l'énergie cinétique se traduit alors selon :

$$\frac{\mathrm{dE_c}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{dE_p}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{\vec{R}} = 0 \text{ (absence de frottements).}$$

Soit encore $\mathrm{E_c} + \mathrm{E_p}$ = cste, et donc $\mathrm{E_c}$ = cste.

Un tel mouvement s'effectue à module de vitesse constant $\|\vec{V}\| = V_0$.



Ainsi l'accélération $\vec{A}$ de M sur sa trajectoire est centripète et vaut :

$$\vec{A} = -\frac{V_0^2}{\mathrm{HM}}\vec{u}_r \quad \text{où} \quad \mathrm{HM} = a\sin\alpha_0.$$

La loi fondamentale de la dynamique n'est alors vérifiée que si l'égalité suivante est réalisée :

$$m\vec{A} = m\vec{g} + \vec{R} = -mg\vec{u}_z + R\vec{u}.$$

Soit : $-m\dfrac{V_0^2}{a\sin\alpha_0}\vec{u}_r = -mg\vec{u}_z + R\vec{u}$.

Une condition nécessaire est déjà que $\alpha_0 > \dfrac{\pi}{2}$ (*cf.* figure)

($m\vec{A}$, résultante des forces $m\vec{g}$ et $\vec{R}$ doit être opposée à $\vec{u}_r$).

D'autre part, on doit avoir avec $\beta = \pi - \alpha_0$:

$$\tan\beta = \frac{\|\vec{A}\|}{mg} = \frac{V_0^2}{ag\sin\alpha_0} = \tan(\pi - \alpha_0) = -\tan\alpha_0.$$

$\left(\alpha_0 > \dfrac{\pi}{2}\right)$

D'où : $\dfrac{V_0^2}{ag} = -\dfrac{\sin^2\alpha_0}{\cos\alpha_0}$.

En conclusion une trajectoire circulaire d'axe Oz n'est possible que pour $\alpha_0 > \dfrac{\pi}{2}$ et un module de vitesse V_c tel que :

$$\boxed{V_c = \left[-ag\frac{\sin^2\alpha_0}{\cos\alpha_0}\right]^{1/2}} \qquad (\cos\alpha_0 < 0).$$

Commentaires

- La particule devant se déplacer dans le plan z = cste, il faut que la composante R_z puisse équilibrer le poids, soit :

$0 < \alpha_0 < \dfrac{\pi}{2}$ $\qquad$ $\dfrac{\pi}{2} < \alpha_0 < \pi$

Ainsi, dans le premier cas, la résultante des forces serait centrifuge, ce qui est incompatible avec un mouvement circulaire de centre H. On retrouve la condition $\alpha_0 > \dfrac{\pi}{2}$.

- Et pour $\alpha_0 > \dfrac{\pi}{2}$ on aura :

$$\begin{cases} R_z = -\|\vec{R}\|\cos\alpha_0 = mg \\ R_r = -\|\vec{R}\|\sin\alpha_0 = -\dfrac{mV^2}{HM}. \end{cases}$$

Ainsi quand α_0 diminue et tend vers $\dfrac{\pi^+}{2}$, on doit avoir (du moins théoriquement) $\|\vec{R}\| \to +\infty$ et donc $V \to +\infty$, ce qui redonne bien $V_c \to +\infty$ quand $\alpha_0 \to \dfrac{\pi^+}{2}$.

2. b. α) La particule est soumise à son poids et à la réaction $\vec{R}$. Cette dernière ne travaille pas ($\vec{R}$ perpendiculaire à la surface de la sphère : absence de frottements). Quant au poids, on peut lui associer une énergie potentielle $E_p = mgz$ (origine prise arbitrairement en $z = 0$). On a donc d'après le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{\vec{R}} + \mathcal{P}_{\text{poids}} = 0 - \frac{dE_p}{dt}$$

d'où : $\frac{d}{dt}(E_p + E_c) = \text{cste} \Rightarrow \boxed{E_m = E_c + E_p = \text{cste} = E_0}$

Ici, l'énergie mécanique est bien une constante du mouvement définie à partir des conditions initiales : $E_m = E_0 = \frac{1}{2}mV_0^2 + mgz_0$.

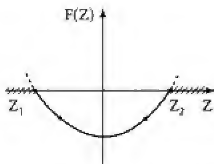
On a de ce fait : $\frac{1}{2}mV^2 + mgz = \frac{1}{2}mV_0^2 + mgz_0$ avec $V^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2$.

En éliminant $\dot{r}$ et $\dot{\theta}$, on aboutit à l'expression donnée dans le texte. Les valeurs de z correspondant au mouvement doivent vérifier :

$$\frac{1}{2}m\dot{z}^2 f(z) \geqslant 0 \text{ c'est-à-dire } U_{eff}(z) \leqslant E_0.$$

Les valeurs de $Z = \frac{z}{a}$ accessibles à la particule sont définies à partir de la condition $F(Z) \leqslant 0$.

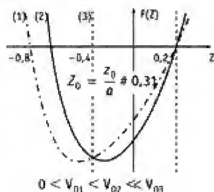
Ainsi sur la figure ci-contre, on peut conclure que $Z(t)$ oscille (de façon non sinusoïdale) entre les valeurs extrêmes $Z_{min} = Z_1$ et $Z_{max} = Z_2$. Aux points Z_1 et Z_2 on a bien $F(Z) = 0$, et donc $\dot{z} = 0$, mais la particule ne peut pas se maintenir aux altitudes correspondantes ($\frac{dF}{dZ}$ est non nul en Z_1 et Z_2).

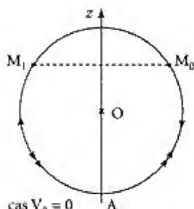


■ 1er cas : $\alpha_0 = 0{,}4\pi$ soit $z_0 = 0{,}31a$. La position initiale se situe dans l'hémisphère supérieur.

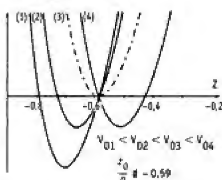
Le mouvement est bien périodique selon Oz, $Z(t)$ variant entre les valeurs $Z_{max} = \frac{z_0}{a}$ et Z_{min}.

D'une part, Z_{min} tend naturellement vers la valeur − 1 quand V_0 diminue à z_0 fixé (pour $V_0 = 0$ la particule décrit dans le plan vertical contenant l'axe Oz et M_0 l'arc de cercle $M_0 \to A \to M_1 \to A \ldots$).





D'autre part, Z_{min} tend vers $-\frac{z_0}{a}$ quand V_0 augmente « indéfiniment ». En effet pour une vitesse initiale suffisamment importante on pourra négliger l'effet de la pesanteur $\frac{1}{2}mV^2 \gg mga$ et on retrouve à la limite le cas décrit au 1. pour lequel la trajectoire se situe bien entre $-z_0$ et $+z_0$.



■ 2ᵉ cas : $\alpha_0 = 0{,}7\pi$ soit $z_0 \# -0{,}59a$. le point M_0 se trouve alors dans l'hémisphère inférieur.

• Il apparaît une vitesse initiale critique V_c associée à V_{03}. La seule valeur possible de z correspond alors à z_0 (on a $F(Z)$ positif pour $Z \neq Z_0$, et $F(Z) = 0$ pour $Z = Z_0$ soit $z = z_0$).

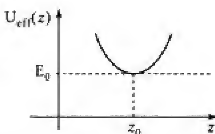
La particule décrit un petit cercle d'axe Oz à la vitesse constante V_c. C'est la situation du 2. a.

• Pour $V_0 < V_c$ (cas V_{01} et V_{02}), $z(t)$ oscille entre une valeur $z_{min} < z_0$ et une valeur maximale $z_{max} = z_0$. On observe que z_{min} tend, comme il se doit, vers $-a$ quand V_0 diminue (*cf.* explication donnée lors du 1ᵉʳ cas).

• Pour $V_0 > V_c$ (cas V_{04}) $z(t)$, varie périodiquement entre $z_{min} = z_0$ et $z_{max} > z_0$, z_{max} tendant vers $-z_0$ ($z_0 < 0$) quand V_0 croît indéfiniment (*cf.* explication donnée lors du 1ᵉʳ cas).

2. b. β) L'énoncé donne l'expression de $U_{eff}(z)$:

$$U_{eff}(z) = mgz + \frac{ma^2V_0^2\sin^2\alpha_0}{2(a^2 - z^2)}.$$



La trajectoire suivie par la particule sera un cercle d'axe Oz et de rayon $r_0 = a\sin\alpha_0$ ($z_0 = a\cos\alpha_0$) si le graphe de $U_{eff}(z)$ correspond à la figure ci-contre. Il faut ainsi assurer que seule la valeur z_0 de z est possible. On doit donc avoir :

$$U_{eff}(z_0) = E_0 \quad (1)$$

et $U_{eff}(z)$ minimale pour $z = z_0$ (2)

La première condition est automatiquement vérifiée puisque les conditions initiales sont telles que $z = z_0$, et $\vec{V} = V_0\vec{u_\theta}$ et donc $\dot{z_0} = 0$.

Calculons alors la dérivée première de $U_{eff}(z)$

$$\frac{dU_{eff}(z)}{dz} = mg + \frac{ma^2V_0^2\sin^2\alpha_0}{(a^2 - z^2)^2}z$$

Soit encore :

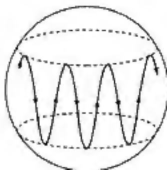
$$\frac{1}{2}m\dot{z}^2\frac{a^2}{a^2-z^2}+\left\{\frac{1}{2}m\frac{a^2V_0^2\sin^2\alpha_0}{a^2-z^2}+mgz\right\} = E_0$$

et $f(z) = \dfrac{1}{1-\dfrac{z^2}{a^2}} > 0$; $\boxed{U_{eff}(z) = mgz + \dfrac{ma^2V_0^2\sin^2\alpha_0}{2(a^2-z^2)}}$

On retrouve bien l'expression proposée au 2. b. β).

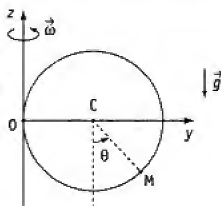
Les études précédentes montrent que la trajectoire dessinée sur la sphère résulte de la combinaison d'un mouvement oscillant selon Oz ($z_{min} < z < z_{max}$) et d'un mouvement de rotation par rapport à ce même axe caractérisé par une vitesse de rotation $\dot{\theta}$ définie positive et donnée par (4).

On peut ainsi tracer l'allure de cette trajectoire :



530 Point matériel sur un cercle vertical tournant

Un point matériel M, de masse m, se déplace sans frottement sur une circonférence de centre C et de rayon a, contenue dans un plan vertical. Par rapport au référentiel terrestre, supposé galiléen, ce cercle tourne à la vitesse angulaire ω constante autour d'un axe vertical tangent à la circonférence. La position du point M est repérée par l'angle θ que fait $\overrightarrow{CM}$ avec la verticale descendante.

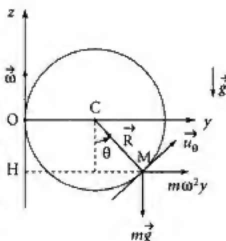


1. Déterminer les positions d'équilibre relatif du point M par rapport au cercle.

2. Étudier la stabilité de ces positions d'équilibre. Commenter.

Solution

1. Introduisons le référentiel $\mathcal{R}(Oxyz)$ (Oz est l'axe de rotation du cercle dans le référentiel terrestre, et Oy contient le point C centre du cercle : *cf.* figure).



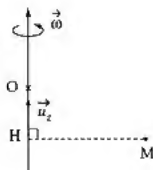
Ce référentiel n'est pas galiléen. Dans $\mathcal{R}$, le point M est soumis à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$, à la réaction $\vec{R}$ de la circonférence ($\vec{R}$ est perpendiculaire à celle-ci puisqu'il n'y a pas de frottements), ainsi qu'aux forces d'inertie (pour une étude d'équilibre dans $\mathcal{R}$, ces dernières forces se réduisent à la seule force d'inertie d'entraînement).

On a donc, pour M immobile dans $\mathcal{R}$:

$$\vec{0} = m\vec{g} + \vec{R} + \vec{f}_{ie}$$

or $\vec{\omega} = \omega\vec{u}_z = \overrightarrow{cte} \Rightarrow \vec{f}_{ie} = m\omega^2\overrightarrow{HM}$

d'où $-mg\vec{u}_z + m\omega^2\overrightarrow{HM} + \vec{R} = \vec{0}$.



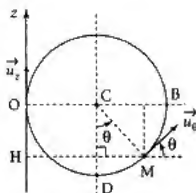
Projetons cette équation sur la tangente $\vec{u}_\theta$ à la circonférence : $-mg\vec{u}_z \cdot \vec{u}_\theta + m\omega^2\overrightarrow{HM} \cdot \vec{u}_\theta + 0 = 0$.

Soit $-mg\sin\theta + m\omega^2(a + a\sin\theta)\cos\theta = 0$

et ($\theta = \frac{\pi}{2}$ n'étant pas solution) :

$$\boxed{\tan\theta = \frac{\omega^2 a}{g}(1 + \sin\theta)} \quad (1)$$

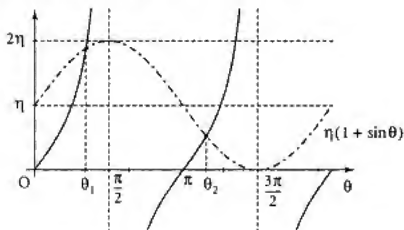
Les solutions ne dépendent que du paramètre sans dimension $\eta = \frac{\omega^2 a}{g}$ qui compare « l'accélération centrifuge » pour $r = HM = a$ – qui aurait tendance, à elle seule, à placer la particule en B – à l'accélération de la pesanteur pour laquelle la position préférentielle serait D.



Les deux effets vont clairement dans le même sens pour $\theta \in \left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$ et $\theta \in \left[\frac{3\pi}{2} ; 2\pi\right]$ (on a pris $\theta = 0$ pour M = D). Il n'existe donc pas de position d'équilibre dans ces deux domaines.

Les positions d'équilibre ne peuvent correspondre qu'à une compensation de ces deux effets, ce qui se traduit par une force tangentielle f_θ nulle qui nous a conduit à la relation (1). Cela va se produire pour une première valeur $\theta_1 \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ et pour une

seconde $\theta_2 \in \left[\pi ; \frac{3\pi}{2}\right]$, comme nous le montre le graphe ci-dessous où l'on a représenté les deux fonctions : $\theta \mapsto \tan\theta$ et $\theta \mapsto \eta(1 + \sin\theta)$



2. Pour étudier la stabilité, on peut soit s'intéresser aux variations en fonctions de θ de la force tangentielle f_θ pour θ voisin de θ_1 (ou de θ_2), soit étudier la fonction énergie potentielle $E_P(\theta)$ dont dérive f_θ (on a en effet $f_\theta = -\frac{1}{a}\frac{dE_P}{d\theta}$).

Déterminons $E_P(\theta)$: $E_P(\theta) = E_P(\theta\text{ ; pesanteur}) + E_P(\theta\text{ ; force d'inertie}) = E_{P_1} + E_{P_2}$

or $E_{P_1} = +mgz(M) = -mga\cos\theta$ (origine prise en C)

et $dE_{P_2} = -\delta W_{f_{ie}} = -m\omega^2\overrightarrow{HM}\,d\overrightarrow{CM} = -m\omega^2\overrightarrow{HM}\,d(\overrightarrow{HM})$

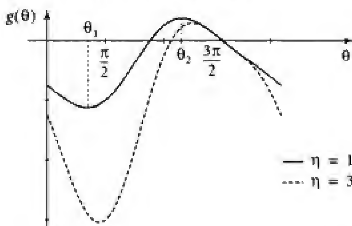
soit $E_{P_2} = -\frac{1}{2}m\omega^2 HM^2 \Rightarrow E_{P_2} = -\frac{1}{2}m\omega^2 a^2(1 + \sin\theta)^2$.

Au total, $E_P = -\frac{1}{2}m\omega^2 a^2(1 + \sin\theta)^2 - mga\cos\theta$

ou encore, en divisant par mga : $\frac{E_P}{mga} = -\cos\theta - \frac{\omega^2 a}{2g}(1 + \sin\theta)^2$

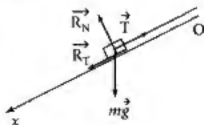
soit : $\boxed{\frac{E_P}{mga} = -\cos\theta - \frac{1}{2}\eta(1 + \sin\theta)^2} = g_\eta(\theta)$ (2)

Traçons la fonction $\eta \to g_\eta(\theta)$ pour $\theta \in [0 ; 2\pi]$:



Écrivons maintenant la condition d'équilibre de la masse m :

$$m\vec{a} = \vec{0} = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{R_N} + \vec{R_T}$$



($\vec{R_T}$ composante tangentielle de la force de contact).

Soit, en projection :

$$0 = mg\sin\alpha - T \pm R_T \text{ (avec } R_T > 0)$$

$$0 = mg\cos\alpha - R_N$$

et, dans le cas de l'équilibre limite :

$$R_T = f \cdot R_N = \tan\varphi \cdot R_N.$$

D'où deux cas selon que le mouvement s'amorce vers le bas ou vers le haut :

• soit, à la limite du mouvement vers les x positifs :

$$(\vec{R_T} = -R_T \cdot \vec{u_x})$$

$$T = m'g\cos\alpha = mg\sin\alpha - \tan\varphi \cdot mg\cos\alpha \quad (R_N = mg\cos\alpha)$$

l'équilibre est donc rompu dès que :

$$m' < m'_{\text{lim}1} = \frac{m}{\cos\alpha}(\sin\alpha - \tan\varphi \cdot \cos\alpha) = m(\tan\alpha - \tan\varphi)\,;$$

• soit à la limite du mouvement vers les x négatifs :

$$(\vec{R_T} = +R_T \cdot \vec{u_x})$$

$$T = m'g\cos\alpha = mg\sin\alpha + \tan\varphi \cdot mg\cos\alpha$$

l'équilibre est donc rompu dès que :

$$m' > m'_{\text{lim}2} = m(\tan\alpha + \tan\varphi).$$

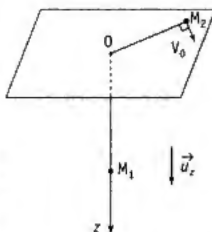
Finalement, les conditions fixant la possibilité d'équilibre sont données par :

$$\tan\alpha - \tan\varphi \leqslant \frac{m'}{m} \leqslant \tan\alpha + \tan\varphi.$$

Évidemment, si $\alpha < \varphi$, la limite inférieure ne joue pas, ce qui traduit le fait que le glissement vers les x positifs est alors impossible.

On vérifie facilement que dans le cas où le frottement disparait ($f = \tan\varphi \to 0$), la condition d'équilibre devient $\frac{m'}{m} = \tan\alpha$, ce qui correspond bien à $a = 0$ d'après le résultat de la première question.

532 Système couplé de deux masses



Deux points matériels M_1 (masse m_1) et M_2 (masse m_2) sont reliés par un fil inextensible (longueur l) sans masse et parfaitement souple. La masse M_1 est assujettie à se déplacer sur l'axe vertical Oz et la masse M_2 sur le plan horizontal Oxy. Le fil passe par un trou suffisamment fin situé au point O du plan Oxy. Toutes les liaisons sont sans frottement.

Dans l'état initial, la masse m_1 est en un point de cote z_0 $(0 < z_0 < l)$ et sa vitesse est nulle, la masse m_2 est à la distance $r_0 = l - z_0$ de O et possède une vitesse orthoradiale de norme V_0 $(V_0 > 0)$.

Le mouvement est repéré pour le point M_1 par sa cote $z(t)$ et pour M_2 par ses coordonnées polaires $r(t) = OM_2$ et $\theta(t) = (\vec{u}_x, \overrightarrow{OM_2})$.

1. a. Montrer qu'il existe une valeur critique V_c de V_0 pour laquelle le point M_1 reste fixe.

b. Justifier que l'énergie mécanique E_m du système des deux masses m_1 et m_2 est une constante du mouvement. Quelle est sa valeur ?

c. Décrire ce qui se passe qualitativement pour $V_0 < V_c$ puis pour $V_0 > V_c$.

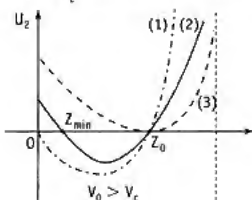
2. a. Donner les expressions reliant $z(t)$ et $\theta(t)$ à $r(t)$.

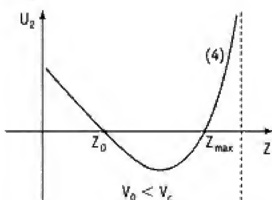
b. Compte tenu des relations du **2. a.**, l'équation énergétique du **1. b.** peut se mettre sous la forme :

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{z}^2 + U(z) = 0.$$

α) Vérifier que l'on a $U(z) = \frac{1}{2}m_2V_0^2\left(\frac{r_0^2}{(l-z)^2} - 1\right) - m_1g(z - z_0)$.

On donne l'allure des courbes $Z = \frac{z}{l} \rightarrow U_2(Z) = \dfrac{U(z)}{\frac{1}{2}m_2V_c^2}$ pour différentes valeurs du rapport $\dfrac{V_0}{V_c}$ à m_1, m_2, l, r_0 fixés (on note $Z_0 = \frac{z_0}{l}$).





Que représentent les courbes (1), (2), (3) et (4) ?

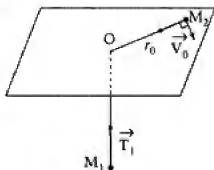
β) Donner les caractéristiques générales du mouvement et tracer l'allure de la trajectoire suivie par le point M_2.

3. On donne maintenant la valeur $V_c(1+\varepsilon)$ à la vitesse initiale V_0, où $|\varepsilon|$ est supposé petit devant l'unité. On pose $r = r_0(1+\eta(t))$ avec $\eta(t) \ll 1$. Établir l'équation du mouvement en $\eta(t)$ en fonction de ε, du temps t et de la grandeur $\Omega = \sqrt{\dfrac{3m_1 g}{(m_1+m_2)r_0}}$.

4. Comment sont modifiés les résultats précédents si l'on supprime m_1 et que l'on exerce au point M_1 une force verticale constante $\vec{F_1} = F_0 \cdot \vec{u_z}$? Que se passe-t-il pour $F_0 = m_1 g$?

Solution

1. a. Lorsque M_1 reste fixe, c'est que M_2 décrit un cercle de centre O, de rayon r_0 et de vitesse (bien évidemment orthoradiale) $V_0 = V_c$ (vitesse critique que l'on cherche à déterminer).

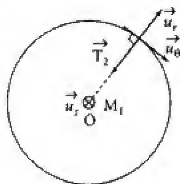


La masse m_1 demeurant immobile, la tension $\vec{T_1}$ du fil équilibre le poids $\vec{P_1} = m_1\vec{g}$ soit : $\vec{T_1} = -m_1\vec{g}$.

Le fil est idéal (inextensible, sans masse et infiniment souple), les contacts en O et sur le plan s'effectuent sans frottement, on a donc :

$$T_1 = T_2 \quad \text{d'où} \quad T_2 = m_1 g.$$

Enfin, le point M_1 décrivant une trajectoire circulaire possède une accélération $\vec{a_2}$ telle que (coordonnées polaires) :



$$\vec{a_2} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV}{dt}\vec{u_\theta} + \frac{V^2}{r_0}(-\vec{u_r}).$$

Et d'après la loi fondamentale de la dynamique appliquée à M_2 (en projection sur le plan horizontal Oxy) :

$$m_2\vec{a_2} = \vec{T_2} = -m_1 g\,\vec{u_r}.$$

On a donc :

$$\frac{dV}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{m_2 V^2}{r_0} = m_1 g \Rightarrow \boxed{V_c = \sqrt{\frac{m_1 g r_0}{m_2}}} \quad (1)$$

1. b.

> **POINT COURS**
>
> **Le théorème de la puissance cinétique appliqué à un système matériel s'écrit**
>
> $$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{int}.$$
>
> **Si l'on considère comme système l'ensemble constitué par les points matériels M_1 et M_2, les forces de tension $\overrightarrow{T_1}$ et $\overrightarrow{T_2}$ sont intérieures au système (elles se transmettent ici d'un point à l'autre par l'intermédiaire du fil). Il faut donc s'intéresser à la puissance intérieure $\mathcal{P}_{int}$ qu'elles développent.**

> POINT MÉTHODE
>
> Il revient au même d'appliquer le théorème de la puissance cinétique à chacun des points.

Ainsi, pour le point matériel M_1 :

$$\frac{dE_{c_1}}{dt} = \mathcal{P}_1(\text{poids}) + \overrightarrow{T_1} \cdot \overrightarrow{V_1} = -\frac{dE_{p_1}}{dt} + T_1 \cdot V_1.$$

E_{p_1} représente l'énergie potentielle de pesanteur associée à la masse m_1, soit :

$$E_{p_1} = -m_1gz \quad (\text{origine prise en } z = 0).$$

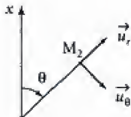
De même, pour le point matériel M_2 :

$\frac{dE_{c_2}}{dt} = \overrightarrow{T_2} \cdot \overrightarrow{V_2}$ (le poids ne travaille pas, pas plus que la réaction verticale – absence de frottements – du plan).

Au total, avec $E_c = E_{c_1} + E_{c_2}$ et $E_p = E_{p_1}$:

$$\frac{d}{dt}(E_c + E_p) = \overrightarrow{T_1} \cdot \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{T_2} \cdot \overrightarrow{V_2}.$$

Or $\overrightarrow{T_1} \cdot \overrightarrow{V_1} = -T_1 \cdot \dot{z}$ $(T_1 = -T_1\overrightarrow{u_z}$ et $\overrightarrow{V_1} = \dot{z}\,\overrightarrow{u_z})$.



De plus, en coordonnées polaires $\overrightarrow{V_2} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$

et avec $T_2 = -T_2\overrightarrow{u_r}$ il vient : $\overrightarrow{T_2} \cdot \overrightarrow{V_2} = -T_2\dot{r}$

D'où : $\overrightarrow{T_1} \cdot \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{T_2} \cdot \overrightarrow{V_2} = -T_1\dot{z} - T_2\dot{r}$.

Or $T_1 = T_2$ (*cf.* 1. a.) et $z + r = l$ soit $\dot{r} = -\dot{z}$.

On a donc :

$$\frac{d}{dt}(E_c + E_p) = -T_1\dot{z} - T_1 \cdot (-\dot{z}) = 0.$$

L'énergie mécanique du système, définie selon $E_m = E_{c_1} + E_{c_2} + E_p$, est bien une constante du mouvement. Elle vaut $E_0 = \frac{1}{2}mV_0^2 - m_1 g z_0$.

Soit $$\boxed{E_m(t) = E_0 = \frac{1}{2}mV_0^2 - m_1 g z_0} \quad (2)$$

1. c. ■ Remarquons tout d'abord que le point matériel M_2 n'est horizontalement soumis qu'à la force de tension $\vec{T} = -T\vec{u}_r$ du fil (pas de frottements). Cette force est centrale (de centre O), ainsi le mouvement plan de M_2 doit conserver son moment cinétique en O ; on a donc :

$$\boxed{rV_\theta = r_0V_0} \quad (3) \quad (\vec{\sigma}(O) = m_2\overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{V_2} = m_2 r V_\theta \vec{u}_z).$$

L'évolution du système doit donc respecter les constantes du mouvement ((2) et (3)) ainsi que la relation $r(t) + z(t) = l$ traduisant l'inextensibilité du fil.

■ Soulignons maintenant que la vitesse V_0 (différente de V_c) correspondrait, pour M_2, à un mouvement circulaire de rayon r_0 pour une valeur T_0 de la tension définie selon :

$$\frac{m_2V_0^2}{r_0} = T_0 \Rightarrow T_0 = m_1 g\left(\frac{V_0}{V_c}\right)^2 \quad (cf.\ 1.)$$

Ainsi pour $V_0 < V_c$, on aura $T_0 < m_1 g$ et la masse m_1 est tout d'abord entraînée vers le bas ($m_1 g$ supérieure à la tension du fil) : z augmente et r diminue.
Pour $V_0 > V_c$, le même raisonnement conduit à la situation inverse.

■ On peut également définir la valeur r' de r pour laquelle le système finirait par se stabiliser en imaginant, par exemple, une force de frottement du type $\vec{f} = -\lambda\dot{r}\,\vec{u}_r$ s'exerçant sur M_2 (cette force conserve (3)).
Dès lors :

$$\frac{m_2V'^2}{r'} = m_1 g \quad \text{avec} \quad r'V' = r_0V_0.$$

Soit finalement :

$$\frac{m_2r_0^2V_0^2}{r'^3} = m_1 g \Rightarrow r'^3 = r_0^3\frac{m_2V_0^2}{m_1 g r_0}$$

$$r' = r_0\left(\frac{V_0}{V_c}\right)^{2/3}.$$

On a donc $r' < r_0$ pour $V_0 < V_c$ et $r' > r_0$ pour $V_0 > V_c$.

■ **Analyse qualitative :**
Le mouvement du système doit obéir aux lois de conservation :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m_1\dot{z}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m_2V_\theta^2 - m_1 g z = E_0 \\ rV_\theta = r_0V_0 \\ r + z = l \Rightarrow \dot{z}^2 = \dot{r}^2. \end{cases}$$

• 1er cas : $V_0 < V_c$

D'après ce qui précède, on peut conclure que dans un premier temps, r diminue (et z croît), passe par la valeur r' définie plus haut avec une vitesse $\dot{r} < 0$ non nulle, et finit par atteindre une valeur $r_{min} < r'$ ($\dot{r} = 0$) sur laquelle il ne peut pas se stabiliser ($r_{min} \neq r'$; de plus on a nécessairement $r_{min} > 0$ puisque V_θ restant borné, r ne peut pas tendre vers 0). Le système repart donc dans l'autre sens. On observera des oscillations non sinusoïdales de $r(t)$ entre les valeurs r_{min} et r_0 (et de M_1 entre $z_{max} = l - r_{min}$ et $z_0 = l - r_0$). La trajectoire de M_2 ressemblera à une « rosace » tangente intérieurement au cercle (O, r_0) et extérieurement au cercle (O, r_{min}) $\left(\dot{\theta} = \frac{V_\theta}{r} = \frac{r_0 V_0}{r^2(t)}\right)$.

• 2e cas : $V_0 > V_c$

Les conclusions restent les mêmes $r(t)$ évoluant cette fois-ci de r_0 à $r_{max} > r_0$ (on a bien ici $r' > r_0$).

Un tel mouvement n'est entièrement possible que pour $r_{max} < l$. Déterminons alors la vitesse limite V_l pour qu'il en soit ainsi :

(2) entraîne avec $\dot{r} = 0$ pour $r = r_{max} = l$ $(z = 0)$:

$$0 + \frac{1}{2}m_2 V_\theta^2 - m_1 g \cdot 0 = \frac{1}{2}m_2 V_l^2 - m_1 g z_0 \quad (z_0 = l - r_0)$$

Soit avec (3) : $l V_\theta = r_0 V_l$.

D'où : $\frac{1}{2}m_2 \frac{r_0^2}{l^2} V_l^2 = \frac{1}{2}m_2 V_l^2 - m_1 g z_0$

et $\frac{1}{2}V_l^2 m_2\left(1 - \frac{r_0^2}{l_0^2}\right) = m_1 g z_0 \Rightarrow V_l^2 = \frac{2m_1 g z_0}{m_2\left(1 - \frac{r_0^2}{l_0^2}\right)}$

$$V_l^2 = \frac{2m_1 g z_0}{m_2\left(1 - \frac{r_0}{l}\right)\left(1 + \frac{r_0}{l}\right)}$$

$$\boxed{V_l^2 = V_c^2 \frac{2}{\left(1 + \frac{r_0}{l}\right) \cdot \frac{r_0}{l}}} \quad (4)$$

Ainsi pour $V_c < V_0 < V_1$, M_2 décrira une « rosace » s'inscrivant entre les cercles de rayon r_0 et r_{max} ($r_{max} < l$).

2. a. On a vu que $\boxed{z(t) = l - r(t)}$ et $r(t)V_\theta(t) = r_0 V_0$.

Or $V_\theta(t) = r(t)\dot{\theta}(t)$, d'où : $\boxed{\dot{\theta}(t) = \frac{r_0 V_0}{r^2(t)}}$

2. b. α) L'équation traduisant la conservation de l'énergie s'écrit (*cf.* **2. a.** : $\dot{r} = -\dot{z}$ et $V_\theta = \frac{r_0 V_0}{r}$) :

$$\frac{1}{2}m_1\dot{z}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}m_2\dot{z}^2 + \frac{1}{2}m_2\frac{r_0^2V_0^2}{r^2}}_{\frac{1}{2}m_2\dot{r}^2+\frac{1}{2}m_2V_\theta^2} - m_1gz = \frac{1}{2}m_2V_0^2 - m_1gz_0$$

D'où $\quad \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{z}^2 + \left\{\frac{1}{2}m_2V_0^2\left(\frac{r_0^2}{r^2}-1\right) - m_1g(z-z_0)\right\} = 0.$

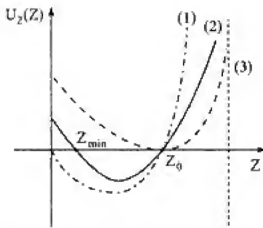
On a bien $(r = l - z)$: $\quad \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{z}^2 + U(z) = 0$ avec :

$$\boxed{U(z) = \frac{1}{2}m_2V_0^2\left(\frac{r_0^2}{(l-z)^2}-1\right) - m_1g(z-z_0)} \qquad (5)$$

Soit encore avec $V_c^2 = \frac{m_1gr_0}{m_2}$ et $Z = \frac{r}{l}$ (et $Z_0 = \frac{r_0}{l}$)

$$\frac{U(z)}{\frac{1}{2}m_2V_c^2} = \left(\frac{V_0}{V_c}\right)^2\left[\left(\frac{1-Z_0}{1-Z}\right)^2 - 1\right] - 2\left[\frac{Z-Z_0}{1-Z_0}\right] = U_2(Z).$$

• 1er cas : $V_0 > V_c$



– La courbe (1) correspond à $V_0 = V_1$ pour laquelle $Z_{min} = 0$. Ainsi, pour $V_0 \in (V_c, V_1)$, M_1 oscille entre les valeurs de $Z_{min} > 0$ et Z_0 (les valeurs de Z accessibles étaient définies par $U(z) < 0$ et donc $U_2(Z) < 0$).

– La courbe (3) est associée à $V_0 = V_c$: une seule valeur possible pour Z ($Z = Z_0$, c'est-à-dire $z = z_0$ et $r = r_0$).

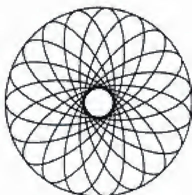
– La courbe (2) représente une situation intermédiaire ($V_c < V_0 < V_1$).

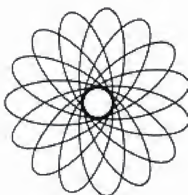
• 2e cas : $V_0 < V_c$

Alors $Z(t)$ varie entre les valeurs extrêmes Z_0 et Z_{max} ($Z_0 < Z_{max} < 1$).

2. b. β) Les caractéristiques générales du mouvement ont été signalées au **1. c.**
On donne ci-après l'allure de la trajectoire du point M_2 tracée à l'ordinateur :

$\dfrac{V_0}{V_c} = 0{,}2$; $\dfrac{m_2}{m_1} = 2$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{V_0}{V_c} = 4$; $\dfrac{m_2}{m_1} = 2$





3.

> **Point méthode**
> On pourrait reconsidérer l'équation énergétique (5) du mouvement dans le cadre des petits mouvements. Il est aussi simple de reprendre la démonstration à partir de la loi fondamentale de la dynamique appliquée successivement à M_1 et M_2 : on aboutira directement à une équation différentielle du second ordre en $r(t)$.

On a ainsi :

$$m_2(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -T \quad \text{et} \quad m_1\ddot{z} = m_1 g - T.$$

Éliminons T entre ces deux équations en tenant compte de ce que $r + z = l_0$ et donc $\ddot{z} = -\ddot{r}$.

$$(m_1 + m_2)\,\ddot{r} - m_2 r\dot{\theta}^2 = -m_1 g$$

or $r^2\dot{\theta} = r_0 V_0$, d'où $r\dot{\theta}^2 = \dfrac{r_0^2 V_0^2}{r^3}$.

Soit : $\quad (m_2 + m_1)\ddot{r} - \dfrac{m_2 r_0^2 V_0^2}{r^3} = -m_1 g \quad (6)$

• Linéarisons cette équation (r reste voisin de r_0) : $r = r_0(1 + \eta)$ où $\eta \ll 1$;

et $\dfrac{1}{r^3} = \dfrac{1}{r_0^3}(1 + \eta)^{-3} \approx \dfrac{1}{r_0^3}(1 - 3\eta)$ $\quad$ (au premier ordre en η).

(6) devient : $\quad (m_2 + m_1)r_0\ddot{\eta} - \dfrac{m_2 V_0^2}{r_0}(1 - 3\eta) = -m_1 g.$

Or $V_c^2 = \dfrac{m_1 g r_0}{m_2}$ $\quad$ soit $\quad \dfrac{m_2}{r_0} = \dfrac{m_1 g}{V_c^2}$

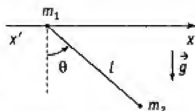
Soit $\Omega = \sqrt{\dfrac{3F_0}{m_2 r_0}}$.

- Si l'on fait $F_0 = m_1 g$, les résultats relatifs à V_c, $V_{lim} = V_l$, z_{min}, z_{max} sont inchangés. La valeur de Ω est elle modifiée selon :

$$\Omega = \sqrt{\frac{3m_1 g}{m_2 r_0}}.$$

533 Pendule double

Un pendule double est constitué de deux masses ponctuelles m_1 et m_2 placées aux extrémités M_1 et M_2 d'une tige sans masse de longueur l.



Le point M_1 est assujetti à se déplacer sans frottements sur l'axe horizontal $x'x$.

Le pendule peut osciller librement sous l'action de la pesanteur tout en restant dans un même plan vertical contenant l'axe $x'x$.

Le système est abandonné sans vitesse initiale dans un référentiel $\mathcal{R}_0$ supposé galiléen, θ ayant une valeur θ_0.

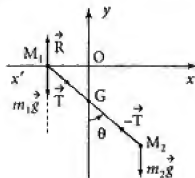
1. Que peut-on dire du mouvement du centre de masse G du système ?

2. Déterminer, par application du théorème de l'énergie cinétique, une intégrale première du mouvement en $\theta(t)$.

3. Donner la période des petites oscillations. On pourra poser $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}\left(\dfrac{m_2}{m_1} + 1\right)}$. Commenter le résultat obtenu.

Solution

1. Le mouvement du centre de masse G se déduit de l'application de la loi fondamentale de la dynamique appliquée à chacune des masses m_1 et m_2.



Pour m_1 seule, on a, en notant $\vec{R}$ la réaction du support $x'x$:

$$m_1 \frac{d\vec{V}_1}{dt} = m_1\vec{g} + \vec{R} + \vec{T} \qquad (1)$$

De même pour m_2 :

$$m_2 \frac{d\vec{V}_2}{dt} = m_2\vec{g} + (-\vec{T}) \qquad (2)$$

(la tige étant supposée sans masse, les forces $\vec{T}$ et $-\vec{T}$ sont bien portées par M_1M_2 et sont de sens opposés).

Éliminons $\vec{T}$ entre les deux équations :

$$\frac{d}{dt}(m_1\overrightarrow{V_1} + m_2\overrightarrow{V_2}) = (m_1 + m_2)\vec{g} + \vec{R} \quad (3)$$

Le glissement du point M_1 sur l'axe horizontal $x'x$ s'effectuant sans frottement, la réaction $\vec{R}$ est normale à $x'x$ (elle est de plus contenue dans le plan vertical Oxy). Soit :

$$\vec{R} = R\overrightarrow{u_y}$$

(3) donne alors en projection sur Ox : $\frac{d}{dt}(m_1V_{1x} + m_2V_{2x}) = 0$

c'est-à-dire $m_1V_{1x} + m_2V_{2x} = \text{cste} = 0$, les vitesses initiales étant nulles.

Or par définition du point G, on a : $(m_1 + m_2)\overrightarrow{V_G} = m_1\overrightarrow{V_1} + m_2\overrightarrow{V_2}$.

Il vient alors $V_{Gx} = 0$.

Le centre de masse se déplace sur la verticale passant par $G_0 = G(t = 0)$. On pourra donc étudier le mouvement dans le référentiel galiléen Oxy (O point fixe de $x'x$, l'axe Oy passant par G_0).

2. Le théorème de la puissance cinétique appliqué au système des deux masses s'écrit :

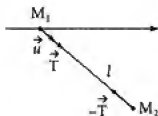
$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{int}.$$

Ici $\mathcal{P}_{ext} = \mathcal{P}_{ext}(\text{poids}) + \mathcal{P}_{ext}(\vec{R})$.

Or $\mathcal{P}_{ext}(\vec{R}) = 0$ (force perpendiculaire au déplacement) ;

$$\mathcal{P}_{ext}(\text{poids}) = -\frac{dE_p}{dt} \quad \text{avec} \quad E_p = E_p(m_1) + E_p(m_2) = 0 + mgy(m_2)$$

(origine de l'énergie potentielle prise en $y = 0$).



Montrons que les tensions $\vec{T}$ et $-\vec{T}$ fournissent une puissance $\mathcal{P}_{int}$ globalement nulle. En effet :

$$\mathcal{P}_{int} = \vec{T}\cdot\vec{V}(M_1) - \vec{T}\cdot\vec{V}(M_2) = \vec{T}\cdot[\vec{V}(M_1) - \vec{V}(M_2)]$$

et $\mathcal{P}_{int} = \vec{T}\cdot\frac{d\overrightarrow{M_2M_1}}{dt}$, soit avec $\vec{T} = T\vec{u}$ et $\overrightarrow{M_1M_2} = +l\vec{u}$

$$\mathcal{P}_{int} = T\vec{u}\cdot\left(-l\frac{d\vec{u}}{dt}\right) \quad (\text{distance } M_1M_2 \text{ constante égale à } l)$$

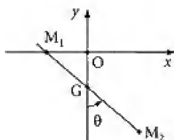
soit $\mathcal{P}_{int} = -\frac{lT}{2}\frac{d}{dt}(\vec{u}^2) = 0 \quad (\vec{u}^2 = 1)$

on a donc finalement : $\frac{dE_c}{dt} = -\frac{dE_p}{dt}$ et $\boxed{E_c + E_p = \text{cste}}$

Avec $E_p = -m_2 g l \cos\theta$.

Pour calculer l'énergie cinétique, on écrira en notant $(x_1 , 0)$ et (x_2 , y_2) les coordonnées des points M_1 et M_2 dans le référentiel Oxy :

$$E_c = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2).$$



Exprimons x_1, x_2, y_2 en fonction de l'angle θ.

On a : $\begin{cases} m_1 GM_1 = m_2 GM_2 & \text{(propriété du centre de masse)} \\ GM_1 + GM_2 = l. \end{cases}$

Soit : $GM_1 = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}l = l_1$ et $GM_2 = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}l = l_2$.

Les coordonnées des points M_1 et M_2 s'écrivent dans le repère Oxy :

$$M_1\begin{cases} x_1 = -l_1 \sin\theta \\ y_1 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad M_2\begin{cases} x_2 = l_2 \sin\theta \\ y_2 = -l\cos\theta \end{cases}$$

D'où en remplaçant :

$$E_c = \left[\frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta\right] + \frac{1}{2}m_2[l_2^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + l^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta]$$

et, en utilisant les valeurs de l_1 et l_2 :

$$E_c = \frac{1}{2}\frac{l^2\dot{\theta}^2}{(m_1 + m_2)^2}[m_1 m_2^2\cos^2\theta + m_2 m_1^2\cos^2\theta + m_2(m_1 + m_2)^2\sin^2\theta]$$

$$E_c = \frac{1}{2}\frac{l^2\dot{\theta}^2}{(m_1 + m_2)^2}[m_1 m_2(m_1 + m_2)\cos^2\theta + m_2(m_1 + m_2)^2\sin^2\theta]$$

et $$E_c = \frac{1}{2}\frac{m_2 l^2\dot{\theta}^2}{m_1 + m_2}[m_1\cos^2\theta + (m_1 + m_2)\sin^2\theta]$$

$$E_c = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}l^2\dot{\theta}^2\left[1 + \frac{m_2}{m_1}\sin^2\theta\right].$$

La conservation de l'énergie se traduit alors par l'équation ($\theta(t = 0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(t = 0) = 0$) :

$$\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}l^2\dot{\theta}^2\left[1 + \frac{m_2}{m_1}\sin^2\theta\right] - m_2 g l\cos\theta = -m_2 g l\cos\theta_0.$$

Soit encore :

$$\dot{\theta}^2\left[1+\frac{m_2}{m_1}\sin^2\theta\right]+\frac{g}{l}\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)2(\cos\theta_0-\cos\theta) = 0 \quad (4)$$

Posons $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)}$, l'équation dévient :

$$\dot{\theta}^2\left[1+\frac{m_2}{m_1}\sin^2\theta\right]+4\omega^2\left[\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right] = 0 \quad (5)$$

Les valeurs permises de θ doivent vérifier $\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) > \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ ce qui impose $|\theta| \leqslant \theta_0$.

Le pendule double va osciller, de façon non sinusoïdale, entre les valeurs $-\theta_0$ et θ_0, la vitesse s'annulant lorsque M_2 atteint les positions d'altitude maximale ($\theta = \pm\theta_0$: énergie potentielle maximale pour le système), les vitesses de M_1 et M_2 étant non nulles quand θ passe par la valeur 0 (énergie potentielle minimale pour le système)…

3. Le mouvement est d'autant plus proche d'un mouvement sinusoïdal que $\theta(t)$ reste suffisamment petit (il faut donc qu'il en soit de même de θ_0). Cette approximation permet de ne conserver que les termes d'ordre deux (au plus) en θ et $\dot{\theta}$ dans l'équation (5), ce qui donne :

$$1+\frac{m_2}{m_1}\sin^2\theta = 1+o(\theta) \qquad \left(\frac{m_2}{m_1}\theta_0^2 \ll 1\right)$$

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{4}\theta^2+o(\theta^2) \qquad \left(\frac{\theta_0^2}{12} \ll 1\right).$$

D'où : $\quad \dot{\theta}^2+4\omega^2\left(\frac{\theta^2}{4}-\frac{\theta_0^2}{4}\right) \# 0 \Rightarrow \boxed{\dot{\theta}^2+\omega^2(\theta^2-\theta_0^2) = 0}$

Cette dernière relation est l'équation énergétique d'un oscillateur harmonique non amorti et non forcé, de pulsation caractéristique ω.

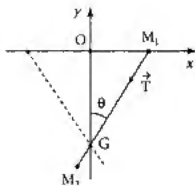
La période T′ des petites oscillations est alors :

$$T' = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)}} \quad (6)$$

Commentaires

- Pour $m_1 \gg m_2$, on obtient $T' \# T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. La masse M_1 est alors quasiment fixe, et le système se réduit pratiquement à un **pendule simple de longueur *l*** et donc de période T_0 pour les petites amplitudes des mouvements.
- Pour $m_2 \gg m_1$, on a à la limite $G \sim M_2$ et $m_1\ddot{x}_1 \# -T\theta$ où $l\theta \sim x_1$.

Soit $m_1\ddot{x}_1 + \frac{T}{l}x_1 = 0$



et en faisant (au premier ordre en x_1) $T \sim m_2 g$ (M_2 pratiquement immobile) :

$$m_1\ddot{x}_1 + \frac{m_2 g}{l}x_1 = 0 \;\Rightarrow\; \ddot{x}_1 + \left(\frac{m_2 g}{m_1 l}\right)x_1 = 0.$$

D'où une pulsation $\omega_2 = \sqrt{\frac{m_2 g}{m_1 l}}$ et une période :

$$\boxed{T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \quad (m_2 \gg m_1)}$$

le résultat est conforme à l'expression générale (6) dans l'hypothèse où la masse m_2 est suffisamment grande devant m_1 $\left(1 + \frac{m_2}{m_1} \sim \frac{m_2}{m_1}\right)$.

On a donc $\underline{V} = V_0 e^{-\beta t}(\cos\omega t + i\sin\omega t)$ que l'on identifie à $\underline{V} = V_x + iV_y$

$$\begin{cases} V_x = V_0 e^{-\beta t}\cos\omega t \\ V_y = V_0 e^{-\beta t}\sin\omega t \end{cases}$$

Déterminons $V(t)$: $\boxed{V(t) = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = V_0 e^{-\beta t}}$

$\dfrac{1}{\beta} = \dfrac{m}{\alpha}$ est un temps caractéristique de décroissance du module de la vitesse.

Point méthode

Pour déterminer $V(t)$, on peut également écrire le théorème de la puissance cinétique

$$\frac{dE_c}{dt} = (\vec{F} + \vec{F}_f)\cdot\vec{V}.$$

En remarquant que la force magnétique ne travaille pas car elle est constamment perpendiculaire à la vitesse :

$$\frac{dE_c}{dt} = \vec{F}_f\cdot\vec{V} = -\alpha V^2.$$

On a donc $$\frac{1}{2}m\frac{dV^2}{dt} + \alpha V^2 = 0.$$

Soit encore $\dfrac{dV}{dt} + \beta V = 0$ et $V(t) = V_0 e^{-\beta t}$.

2. On introduit de la même façon la variable $\underline{r} = x + iy$ pour déterminer $x(t)$ et $y(t)$.

$\dot{\underline{r}} = V_x + iV_y = \underline{V} = V_0 e^{-(\beta - i\omega)t}$

$\underline{r} = \dfrac{V_0}{(i\omega - \beta)}\cdot e^{-(\beta - i\omega)t} + \text{constante}.$

Or $\underline{r}(0) = 0$, donc $\text{constante} = \dfrac{V_0}{\beta - i\omega}$.

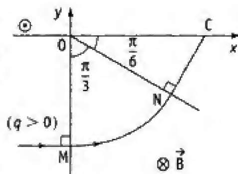
On obtient ainsi : $\underline{r} = \dfrac{V_0}{\beta^2 + \omega^2}(\beta + i\omega)(1 - e^{-\beta t}e^{i\omega t}).$

Puis en séparant partie réelle et partie imaginaire et en identifiant :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{\beta V_0}{\beta^2 + \omega^2} + \dfrac{V_0 e^{-\beta t}}{\beta^2 + \omega^2}(\omega\sin\omega t - \beta\cos\omega t) \\ y(t) = \dfrac{\omega V_0}{\beta^2 + \omega^2} - \dfrac{V_0 e^{-\beta t}}{\beta^2 + \omega^2}(\omega\cos\omega t + \beta\sin\omega t) \end{cases}$$

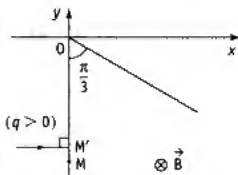
Lorsque $t \to \infty$, l'électron finit par s'arrêter en un point C de coordonnées :

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{\beta V_0}{\beta^2 + \omega^2} \\ y_C = \dfrac{\omega V_0}{\beta^2 + \omega^2} \end{cases}$$



Cette région de champ $\vec{B}$ est un secteur angulaire de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$, limité par les demi-droites OM et ON. Le faisceau entre et sort normalement aux limites de cette zone.

1. Déterminer, en fonction de $\frac{q}{m}$, l'abscisse x_0 du point C d'impact des particules sur l'axe Ox.



2. Le faisceau pénètre maintenant en M' dans la zone où règne le champ $\vec{B}$. Comment est modifiée la trajectoire des particules ?
En considérant MM' = δy comme un infiniment petit ($\varepsilon = \frac{\delta y}{OM} = \frac{\delta y}{R} \ll 1$) montrer, qu'après avoir traversé la zone de champ $\vec{B}$, le faisceau passe par un point fixe (au second ordre près en $\frac{\delta y}{R}$).
Que peut-on conclure de la valeur des coordonnées de ce point ?
Comment peut-on espérer réaliser expérimentalement la configuration décrite au **1.** ?

3. Le faisceau pénétrant en M dans la région de champ $\vec{B}$ est maintenant composé de deux sortes de particules (m, q) et (m', q) de même charge q et de masses légèrement différentes :

$$m' = m + \delta m \quad \text{avec} \quad \frac{\delta m}{m} = \eta \ll 1.$$

Déterminer – au premier ordre en η – l'écart CC' = δx des impacts sur l'axe Ox des deux sortes de particules. Application ?
On négligera le poids des particules.

1. Ce qu'il faut savoir

- Charge (q, m) en mouvement dans un champ magnétique uniforme.
- Accélération d'une particule chargée sous une différence de potentiel donnée.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. Dans un champ magnétique uniforme, les particules chargées ont une trajectoire circulaire : les conditions imposées au faisceau permettent de situer le centre de la trajectoire. Le problème est alors géométriquement simple.

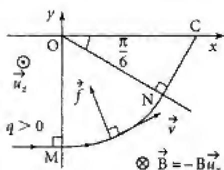
2. En changeant le point d'entrée M du faisceau dans le champ $\vec{B}$, on change la position du centre du cercle décrit : le faisceau ne sort plus perpendiculairement à la frontière de la zone de champ.

3. Dans le cas d'une modification de la masse des particules, le rayon des trajectoires est modifié (ce qui déplace aussi le centre...) : il faudra adapter à ce cas, la méthode de calcul utilisée à la question précédente.

3. Solution

1. Sur la partie MN de la trajectoire des particules, la seule force agissante est la force magnétique $\vec{f_m} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

> **POINT COURS**
>
> **Cette force, perpendiculaire à la vitesse, ne travaille pas : l'énergie cinétique de la particule se conserve, ainsi que la norme v_0 de sa vitesse.**
>
> **De plus, la force est perpendiculaire à $\vec{B}$. En notant $\vec{B} = B\vec{u_z}$ et $\vec{v} = \vec{v_\perp} + v_{//}\vec{u_z}$ on a :**
>
> $$\vec{f_m} = q\vec{v} \wedge B\vec{u_z} = q\vec{v_\perp} \wedge B\vec{u_z}.$$
>
> **• $\vec{f_m}$ est dans le plan xOy, avec $qv_\perp B$ pour module.**
> **La vitesse $v_{//}$ est constante, et $v_\perp$ aussi.**
>
> **• $\vec{f_m} \perp \vec{v_\perp}$: l'accélération est normale, et le mouvement est circulaire uniforme, de rayon R tel que :**
>
> $$\frac{mv_\perp^2}{R} = qv_\perp B, \quad \text{soit : } R = \frac{mv_\perp}{qB}.$$



La force en M est $\vec{f_m}(M) = qv_0B\vec{u_y}$ et la vitesse initiale $\vec{v_0}$ est perpendiculaire à $\vec{B}$.

La particule décrit donc, dans le secteur où règne le champ $\vec{B}$, un arc de cercle de centre O puisque, d'après le texte, on a $\vec{v}(M) \perp \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v_N} \perp \overrightarrow{ON}$.

Ainsi $\quad OM = ON = R = \dfrac{mv_0}{qB}. \quad (2)$

Le point C, impact des particules sur Ox, a pour abscisse : $OC = x_0 = \dfrac{ON}{\cos\frac{\pi}{6}} = \dfrac{R}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \Rightarrow x_0 = \dfrac{2R}{\sqrt{3}} = \dfrac{m}{q}\dfrac{2v_0}{\sqrt{3}B}.$

Enfin, les particules ayant été accélérées sous la différence de potentiel U, le théorème de l'énergie cinétique donne immédiatement :

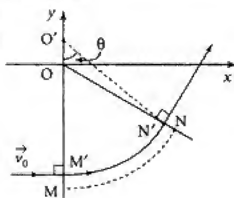
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = qU \quad \text{soit} \quad v_0 = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$$

d'où, en reportant : $$x_0 = \sqrt{\frac{m}{q}} \cdot \frac{2\sqrt{2U}}{\sqrt{3} \cdot B} \quad (3)$$

2. Le rayon R du cercle décrit par le faisceau n'est pas modifié : le centre O′ de ce cercle est donc décalé :

$$OO' = MM' = \delta y = \varepsilon \cdot OM = \varepsilon R$$

et le faisceau ne ressort plus normalement à ON de la zone de champ $\vec{B}$; il émerge en N′, et a ensuite une trajectoire rectiligne orthogonale à O′N′.



• Déterminons le point N′.

Dans le triangle OO′N′ on a :

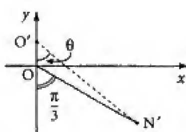
$ON'^2 = OO'^2 + O'N'^2 - 2OO' \cdot O'N' \cos\theta$.

Or $OO' = \varepsilon R$, $O'N' = R$

d'où : $ON'^2 = R^2[\varepsilon^2 + 1 - 2\varepsilon\cos\theta]$ et

$ON' = R[1 - 2\varepsilon\cos\theta + \varepsilon^2]^{\frac{1}{2}}$.

Au premier ordre en ε, on peut confondre θ et $\frac{\pi}{3}$ dans l'expression précédente (la différence entre θ et $\frac{\pi}{3}$ est du premier ordre en ε et introduirait donc un terme d'ordre deux...).



Soit avec $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ $\quad ON' \# R\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \quad (4)$

D'où les coordonnées x' et y' du point N′ (toujours au premier ordre en ε) :

$$x' = ON' \sin\frac{\pi}{3}$$

$$y' = -ON' \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} x' \# \frac{\sqrt{3}}{2}R\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \\ y' \# -\frac{R}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \end{array} \right. \quad (5)$$

• Au-delà de N′, la trajectoire est rectiligne ($\vec{B} = \vec{0}$) et orthogonale à la droite O′N′. Soit en notant C′ le point d'impact, d'abscisse x_0', sur l'axe Ox :

soit $\overrightarrow{O'N'} \cdot \overrightarrow{N'C'} = 0 \Rightarrow (x' - 0)(x_0' - x') + (y' - \varepsilon R)(0 - y') = 0$.

D'où : $\quad x_0' = x' + \frac{y'}{x'}(y' - \varepsilon R)$.

Remplaçant les grandeurs x' et y' par leurs valeurs (*cf.* (5)), et ne gardant que des termes du premier ordre en ε, il vient :

$$x_0' = \frac{\sqrt{3}}{2}R\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left[-\frac{R}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \varepsilon R\right].$$

Soit : $x'_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}R - \frac{\sqrt{3}}{4}R\varepsilon + \frac{R}{2\sqrt{3}} + \underbrace{\frac{\varepsilon R}{\sqrt{3}}\left[1 - \frac{1}{4}\right]}_{\frac{\sqrt{3}R\varepsilon}{4}}$

Les termes en ε disparaissent de sorte que :

$$\boxed{x'_0 = \frac{2R}{\sqrt{3}}[1 + o(\varepsilon)]}$$

d'où $x'_0 = x_0(1 + o(\varepsilon))$.

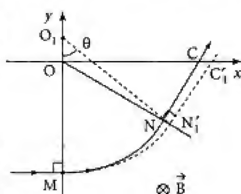
Au second ordre près en ε, les points C′ et C sont donc confondus. Si le point d'entrée M du faisceau dans la zone de champ $\vec{B}$ est décalé d'un infiniment petit du premier ordre, la position du point d'impact C sur l'axe Ox ne varie qu'au second ordre : il y a focalisation en C du faisceau émergent.

La focalisation au point C montre comment on peut expérimentalement réaliser la condition $OM = R = \frac{mv_0}{qB}$. Si l'on déplace progressivement le point M d'entrée du faisceau dans le champ magnétique, l'abscisse du point C′ varie au second ordre par rapport à ε $\left(\varepsilon = \frac{\overline{MM'}}{R}\right)$ (à démontrer ; on a vérifié ici qu'elle ne dépendait pas de ε au premier ordre) : le bon réglage de la position du faisceau correspondra alors à la valeur extrémale de x'_0.

3. Les particules ayant des masses différentes, les trajectoires dans le champ B ont des rayons différents $R = \frac{mv_0}{qB}$ et

$R' = \frac{m'v_0}{qB} = \frac{mv_0}{qB}\left(1 + \frac{\delta m}{m}\right) = R(1 + \eta)$

les particules de masse m suivent le trajet MNC (étudié au 1.) ; quant aux particules de masse m', elles décrivent l'arc de cercle MN'_1 de centre O_1, avec $O_1M = R' = R(1 + \eta)$ soit $OO_1 = \eta R$.



On peut alors reprendre les calculs faits au 2. :

$$ON_1'^2 = OO_1^2 + O_1N_1'^2 - 2OO_1 \cdot O_1N_1' \cos\theta$$

or $OO_1 = \eta R$ et $O_1N'_1 = R(1 + \eta)$

d'où : $ON_1'^2 = \eta^2R^2 + R^2(1 + \eta)^2 - 2\eta R^2(1 + \eta)\cos\theta$.

Ne gardant que des termes du premier ordre en η, et remplaçant θ par $\frac{\pi}{3}$ (*cf.* 1.) :

$$ON_1'^2 \# R^2(1 + 2\eta) - 2R^2\eta\frac{1}{2} \# R^2(1 + \eta).$$

Soit $$ON'_1 \# R\left(1 + \frac{\eta}{2}\right).$$

D'où les coordonnées du point N_1' au premier ordre en η, (*cf.* 5. $\varepsilon \to -\eta$) :

$$x_1' = \frac{\sqrt{3}}{2}R\left(1+\frac{\eta}{2}\right) \quad \text{et} \quad y_1' = -\frac{R}{2}\left(1+\frac{\eta}{2}\right).$$

Au-delà, la trajectoire est rectiligne perpendiculaire à O_1N_1', et recoupe Ox en $C_1'(x_0'')$.

Le même calcul que celui effectué au 2. conduit à $(OO_1 = \eta R)$:

$$x_0'' = x_1' + \frac{y_1'}{x_1'}(y_1' - \eta R).$$

Soit au premier ordre en η : $x_0'' = \frac{\sqrt{3}}{2}R\left(1+\frac{\eta}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left[-\frac{R}{2}\left(1+\frac{\eta}{2}\right) - \eta R\right]$

$$x_0'' = \frac{2R}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{4}R\eta + \frac{\eta R}{\sqrt{3}}\left(1+\frac{1}{4}\right) = \frac{2R}{\sqrt{3}} + \frac{3R}{4\sqrt{3}}\eta + \frac{5\eta R}{4\sqrt{3}}.$$

Finalement $\boxed{x_0'' = \frac{2R}{\sqrt{3}}[1+\eta+o(\eta)]} \Rightarrow x_0'' = x_0(1+\eta+o(\eta)).$

L'écart δx des impacts $C_1'(x_0'')$ et $C(x_0)$ sur l'axe Ox est alors :

$$\delta x = x_0'' - x_0 \Rightarrow \boxed{\delta x \approx x_0\eta} \quad \left(x_0 = \frac{2R}{\sqrt{3}}\right).$$

Ce dispositif constitue un **spectrographe de masse**, qui peut permettre de mettre en évidence la présence d'isotopes : on a dans ce cas $\frac{\delta m}{m} = \frac{1}{M}$ (M : nombre de masse).

• Pour une utilisation en spectrographe de masse, si on peut mesurer des écarts $\frac{\delta x}{x_0} = 5 \cdot 10^{-3}$, on aura comme limite de résolution :

$$\frac{\delta m}{m} = \frac{1}{M} = \eta - 5 \cdot 10^{-3} \quad \text{soit} \quad M \approx 200.$$

Remarquons que l'on a intérêt, pour augmenter x_0, à utiliser des tensions accélératrices élevées, et un champ magnétique pas trop grand...



Stabilisation par champ magnétique

Une particule chargée (masse m, charge $q < 0$) est soumise à un champ électrostatique extérieur associé au potentiel $V(x, y, z)$ tel que :

$$V(x,y,z) = \frac{V_0}{2a^2}(x^2+y^2-2z^2)$$

a est une longueur et V_0 un potentiel ($V_0 > 0$).

1. Montrer que la position $x = y = z = 0$ correspond à une position d'équilibre. Cet équilibre est-il stable ?

Il s'agit là d'un système de Cramer en x_0 et y_0 paramétré par p.

On obtient $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ pour $\begin{vmatrix} (p^2 - \omega_0^2) & \omega_c p \\ -\omega_c p & (p^2 - \omega_0^2) \end{vmatrix} = 0.$

Les valeurs de p (dans $\mathbb{C}$) sont donc solutions de l'équation :

$(p^2 - \omega_0^2)^2 + \omega_c^2 p^2 = 0 \Rightarrow \boxed{p^4 + (\omega_c^2 - 2\omega_0^2)p^2 + \omega_0^4 = 0}$

Notons p_1^2 et p_2^2 les racines correspondantes. Elles vérifient :

$$p_1^2 p_2^2 = \omega_0^4 > 0 \text{ et } p_1^2 + p_2^2 = 2\omega_0^2 - \omega_c^2.$$

De plus, $\Delta = (\omega_c^2 - 2\omega_0^2)^2 - 4\omega_0^4 = \omega_c^4 - 4\omega_c^2\omega_0^2 = \omega_c^2(\omega_c^2 - 4\omega_0^2)$.

D'où :

• pour $\Delta < 0$, il vient $p_1^2 = \alpha + i\beta$ et $p_2^2 = \alpha - i\beta$ et par conséquent :
$p_1 = \pm(\alpha' + i\beta')$ et $p_2 = \pm(\alpha' - i\beta')$; les solutions en $e^{(\alpha' \pm i\beta)t} = e^{\alpha' t}e^{\pm i\beta' t}$ avec $\alpha' > 0$ divergeraient ce qui entraînerait l'instabilité.

• Pour $\Delta > 0$, les racines en p^2 sont réelles et négatives puisque $\Delta > 0$ assure également $p_1^2 + p_2^2 < 0$ ($p_1^2 p_2^2 > 0$ nous indiquant que les racines réelles sont de même signe). Dans ce cas, on a donc $p_1 = \pm i\alpha_1$ et $p_2 = \pm i\alpha_2$ ce qui correspond à des solutions sinusoïdales, donc bornées.

Pour assurer la stabilité de l'équilibre $x = y = z = 0$, il faut donc que l'on ait $\Delta > 0$, c'est-à-dire $\omega_c^2 > 4\omega_0^2$, ce qui donne :

$$\omega_c > 2\omega_0 \Rightarrow \boxed{B_0 > \frac{2}{a}\sqrt{\frac{mV_0}{(-q)}}} \quad (2)$$

Commentaires

• Le sens de $\vec{B_0}$ ne modifie en rien la conclusion (changer z en $-z$ et x en y n'affecte pas la nature physique du problème). On écrira donc la condition (2) sous la forme :

$$|B_0| > \frac{2}{a}\sqrt{\frac{mV_0}{(-q)}}.$$

• En présence du champ magnétique, on a toujours $E_m = E_c + E_p = \text{cste}$ (la force magnétique $\vec{f_m} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ ne travaille pas). Ainsi bien que le point O corresponde, pour le plan xOy, à un maximum d'énergie potentielle ($E_p(x, y, z = 0) = \frac{qV_0}{2a^2}(x^2 + y^2)$, et $q < 0$), la force supplémentaire $\vec{f_m}$ stabilise la charge q : dans ce cas, un maximum d'énergie potentielle n'est donc pas nécessairement associé à une position d'équilibre instable…

3. L'équation du mouvement dans $\mathcal{R}$ s'écrit :

$$m\vec{a} = -\frac{qV_0}{a^2}\vec{r} + \frac{2qV_0}{a^2}z\vec{u_z} + q\vec{v} \wedge B_0\vec{u_z} \quad (3)$$

Le plus simple, pour passer dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}'$ en rotation uniforme par rapport à $\mathcal{R}$, est d'exprimer l'accélération $\vec{a}$ et la vitesse $\vec{v}$ (grandeurs définies dans $\mathcal{R}$) en fonction des grandeurs correspondantes dans $\mathcal{R}'$. Ainsi on a :

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_e + \vec{a}_c \text{ avec } \begin{cases} \vec{a}_e = -\Omega^2 \vec{r}' \\ \vec{a}_c = 2\Omega \vec{u}_z \wedge \vec{v}' \end{cases} \quad (\Omega = \text{cste et } \vec{r}' = x'\overrightarrow{u_{x'}} + y'\overrightarrow{u_{y'}})$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_e \text{ où } \vec{v}_e = \vec{0} + \Omega \vec{u}_z \wedge \vec{r}'.$$

L'équation (3) devient, en projection sur $Ox'y'$ $\left(\vec{a}' = \dfrac{d^2\vec{r}'}{dt^2}\right)$:

$$\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = \omega_0^2\vec{r}' + \omega_c\vec{u}_z \wedge (\vec{v}' + \Omega\vec{u}_z \wedge \vec{r}') + \Omega^2\vec{r}' - 2\Omega\vec{u}_z \wedge \vec{v}' \quad (4)$$

Il s'agit maintenant de supprimer les termes en $\vec{v}'$, ce qui est réalisé si on impose la relation $2\Omega = \omega_c$.

On obtient alors : $\dfrac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = \left(\omega_0^2 + \dfrac{\omega_c^2}{4}\right)\vec{r}' + \dfrac{\omega_c^2}{2}\vec{u}_z \wedge (\vec{u}_z \wedge \vec{r}')$.

Le double produit vectoriel a pour valeur $-\dfrac{\omega_c^2}{2}\vec{r}'$ $(\vec{u}_z \perp \vec{r}')$, d'où :

$$(5) \quad \boxed{\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = \left(\omega_0^2 - \frac{\omega_c^2}{4}\right)\vec{r}'} \quad \Rightarrow G(\omega_0, \omega_c) = \omega_0^2 - \frac{1}{4}\omega_c^2.$$

La particule restera confinée dans un voisinage de O (point d'équilibre), dans $\mathcal{R}'$ comme dans $\mathcal{R}$, si l'équation précédente (5) se réduit à celle d'un oscillateur harmonique, ce qui nécessite :

$$\omega_0^2 - \frac{\omega_c^2}{4} < 0 \Rightarrow |\omega_c| > 2\omega_0.$$

On retrouve bien la condition établie au **2. b.**



544 Optique électronique

Des électrons (masse m, charge $-e$) sont émis, avec une vitesse négligeable, par une source maintenue au potentiel zéro. Cette source est située du côté des z négatifs.

Ils pénètrent dans un domaine D dans lequel des électrodes assurent la répartition suivante du potentiel :

$$z < 0 : (V(x, y, z) = V_1 = \text{constante}) > 0.$$

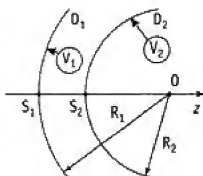
$$z > a : (V(x, y, z) = V_2 = \text{constante}) \quad (V_2 > V_1).$$

Dans la zone intermédiaire ($0 \leq z \leq a$) le potentiel varie continûment entre les valeurs $V_1(z=0)$ et $V_2(z=a)$: $V(x, y, z) = f(z)$ avec $f(0) = V_1$ et $f(a) = V_2$.

1. Un électron arrive sur le plan $z = 0$ avec une vitesse $\vec{v_1}$ faisant un angle i_1 avec $\vec{u_z}$: $(\vec{u_z}, \vec{v_1}) = i_1$. L'électron ressort en $z = a$ avec une vitesse $\vec{v_2}$ faisant un angle i_2 avec $\vec{u_z}$: $(\vec{u_z}, \vec{v_2}) = i_2$. Déterminer la relation liant V_1, V_2, i_1, i_2. Commenter.

2. Les équipotentielles sont maintenant des calottes sphériques concentriques d'axe Oz. On a $V = V_1$ pour $r = R_1$ et $V = V_2$ pour $r = R_2$. $V(r)$ variant continûment de V_1 à V_2 pour $R_2 < r < R_1$.

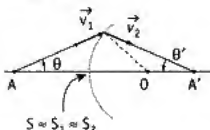
a. Reprendre l'étude précédente pour un électron ayant une vitesse $\vec{v_1}$ contenue dans un plan méridien.



b. Les électrons sont émis d'un point A de l'axe Oz situé à gauche de S_1. Le dispositif est aménagé pour que leurs trajectoires soient assimilables à des droites en deçà du dioptre D_1 ainsi qu'au-delà du dioptre D_2. On suppose que la relation établie au **2. a.** reste toujours valable.

Un électron émis de A recoupe l'axe des z (à droite de D_2) en un point A'. En supposant que $S_1S_2 \ll R_1$ et R_2, et que les vitesses prises en compte sont faiblement inclinées sur l'axe, montrer que l'on a :

$$\frac{\sqrt{V_1}}{\overline{SA'}} - \frac{\sqrt{V_2}}{\overline{SA}} = C \quad (S \# S_1 \# S_2)$$



où C est une constante que l'on déterminera en fonction de V_1, V_2 et de $\overline{SO} = R - R_1 - R_2$.

Solution

1. L'électron part de la source avec une vitesse négligeable (on la prendra nulle). Soumis au champ électrostatique, il possède une vitesse $\vec{v}(M)$ quand il atteint un point de l'espace de potentiel $V(M)$ et une énergie potentielle $E_p = qV = -eV$.

La conservation de l'énergie mécanique de l'électron s'écrit alors :

$$\frac{1}{2}mv^2 - eV = 0 - 0$$

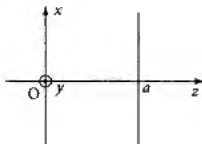
(au point d'émission on a $v \sim 0$ et $V = 0$).

D'où $$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}.$$

Quand il atteint le plan $z = 0$, sa vitesse est $\vec{v_1}$ et $V = V_1$: $v_1 = \sqrt{\dfrac{2eV_1}{m}}$ (1)

De même, on aura en $z = a$, $\quad v_2 = \sqrt{\dfrac{2eV_2}{m}}$ (2)

• Étudions maintenant le passage $z = 0 \rightarrow z = a$: l'électron est soumis à la force électrostatique $\vec{F} = (-e)\left(-\dfrac{dV}{dz}\right)\vec{u}_z = e\dfrac{dV}{dz}\vec{u}_z$ (puisque le potentiel $V(M)$ ne dépend, dans cette région, que de z).



La loi fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} v_x = \text{cste} \\ v_y = \text{cste}. \end{cases}$$

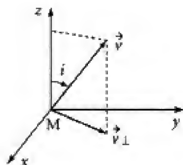
Ainsi la composante $\vec{v_\perp}(v_x, v_y, 0)$ de la vitesse, perpendiculaire à l'axe Oz est conservée.

Or : $\|v_\perp\| = v\sin i$.

D'où : $v_1 \sin i_1 = v_2 \sin i_2$.

Soit en utilisant les relations (1) et (2) :

$$\boxed{\sqrt{V_1}\sin i_1 = \sqrt{V_2}\sin i_2} \quad (3)$$



Commentaire

• Le résultat trouvé au 1. s'apparente à la relation de Descartes en optique géométrique (passage à travers un « dioptre » plan d'un milieu d'indice n_1 proportionnel à $\sqrt{V_1}$ à un milieu d'indice n_2 proportionnel à $\sqrt{V_2}$ (même constante de proportionnalité)) : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.

2. a. Les arguments précédents sur la conservation de l'énergie restent valables. On a donc : $v_1 = \sqrt{\dfrac{2eV_1}{m}}$ et $v_2 = \sqrt{\dfrac{2eV_2}{m}}$.

Cette fois-ci, le potentiel ne dépend que de $r (r = OM)$ et le champ qui en résulte est donc radial :

$$V = V(r) \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V(r) = -\frac{dV}{dr}\vec{u}_r.$$

Il en est de même de la force électrostatique $\vec{F} = -e\vec{E} = e\dfrac{dV}{dr}\vec{u}_r$.

L'électron est donc soumis à une force centrale dans la zone $R_2 < r < R_1$, son moment cinétique se conserve et le mouvement est plan (si la vitesse $\vec{v_1}$ passait par O le mouvement serait rectiligne). Un électron se déplaçant initialement dans un plan méridien y restera. Traduisons la conservation du moment cinétique en O :

$$\vec{\sigma}_1 = \overrightarrow{OM_1} \wedge m_1\vec{v}_1 = -mR_1v_1\sin i_1\vec{k}$$

$$\vec{\sigma}_2 = \overrightarrow{OM_2} \wedge m_2\vec{v}_2 = -mR_2v_2\sin i_2\vec{k}.$$

Le passage $[r = R_1] \rightarrow [r = R_2]$ se traduit donc par la relation :

$$R_1v_1\sin i_1 = R_2v_2\sin i_2.$$

Soit encore :

$$\boxed{R_1\sqrt{V_1}\sin i_1 = R_2\sqrt{V_2}\sin i_2} \quad (4)$$

2. b. Considérons, à l'approximation envisagée, que les points S_1 et S_2 sont pratiquement confondus $(S_1 \# S_2) = S$ et les angles i_1, i_2 suffisamment petits pour que l'on puisse assimiler la tangente et le sinus d'un angle à son argument $(\tan i \# \sin i \# i)$.

Dès lors : $\omega \# \dfrac{\overline{HM}}{\overline{HO}}$, $\theta \# \dfrac{\overline{HM}}{\overline{AH}}$ et $\theta' \# \dfrac{\overline{HM}}{\overline{HA'}}$ (posons $\delta = \overline{HM}$).

À l'approximation considérée, on a également :

$R_1 \# R_2 \Rightarrow S_1O \# S_2O = R$ avec $OH = R\cos\omega$.

On a donc $S_1O = HO$ au second ordre près en ω $\left(\cos\omega \# 1 - \dfrac{\omega^2}{2}\right)$.

Il est donc possible, dans une approximation au 1[er] ordre (M voisin de S_1 et S_2) de confondre les points H et S d'où :

$$\omega \# \frac{\delta}{\overline{SO}} \quad \theta \# \frac{\delta}{\overline{AS}} \text{ et } \theta' \# \frac{\delta}{\overline{SA'}}.$$

La relation (4) s'écrit en confondant R_1 et R_2 : $\sqrt{V_1}i_1 \# \sqrt{V_2}i_2$.

Or : $i_1 = \theta + \omega \# \delta\left(\dfrac{1}{\overline{AS}} + \dfrac{1}{\overline{SO}}\right)$ et $i_2 = \omega - \theta' \# \delta\left(\dfrac{1}{\overline{SO}} - \dfrac{1}{\overline{SA'}}\right)$.

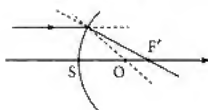
D'où : $\sqrt{V_1}\left(\dfrac{1}{\overline{AS}} + \dfrac{1}{\overline{SO}}\right) = \sqrt{V_2}\left(\dfrac{1}{\overline{SO}} - \dfrac{1}{\overline{SA'}}\right)$.

C'est-à-dire : $\boxed{\dfrac{\sqrt{V_2}}{\overline{SA'}} - \dfrac{\sqrt{V_1}}{\overline{SA}} = \dfrac{\sqrt{V_2} - \sqrt{V_1}}{\overline{SO}}}$ (5), soit : $C = \dfrac{\sqrt{V_2} - \sqrt{V_1}}{\overline{SO}}$.

On pourrait montrer que ce système est l'équivalent en optique d'un dioptre sphérique de centre O et de sommet S séparant des milieux d'indice n_1 et n_2 tels que $\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sqrt{V_1}}{\sqrt{V_2}}$.

Le dioptre est convergent pour $V_2 > V_1$. Ainsi, pour A « rejeté à l'infini », le point A' se confondant alors avec le foyer F', la formule de conjugaison précédente (5) donne :

$$\frac{\sqrt{V_2}}{\overline{SF'}} = \frac{\sqrt{V_2} - \sqrt{V_1}}{\overline{SO}}$$



545 Lentille magnétique

1. Des électrons de masse m et de charge $-e$ ($e > 0$) sont émis à partir du point O de l'axe Oz avec des vitesses de même module V_0 ($\overrightarrow{V_0} \cdot \overrightarrow{u_z} > 0$). Ils sont soumis à un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B} = B_0\overrightarrow{u_z}$. On note α l'angle entre l'axe Oz et la vitesse $\overrightarrow{V_0}$: $\alpha = (\overrightarrow{u_z}, \overrightarrow{V_0})$.

Montrer que pour des angles α suffisamment petits, les électrons convergent, pour la première fois, en un point C de l'axe Oz dont on déterminera la cote z_C en fonction des grandeurs m, e, B_0 et V_0.

2. On suppose maintenant que les électrons, de vitesse de norme fixée V_0, sont soumis à l'action d'un champ magnétique de révolution par rapport à l'axe $z'Oz$ de composantes :

$$B_z(r, z) = f(z) ; \quad B_r(r, z) = -\frac{r}{2}\frac{df}{dz} ; \quad B_\theta = 0$$

(r, θ, z) représentent les coordonnées cylindriques d'axe Oz.

Un électron est ainsi repéré par ses coordonnées $r(t)$, $\theta(t)$ et $z(t)$.

(Ce champ est par exemple celui créé, sur son axe Oz, par une bobine de centre O.)

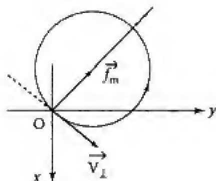
a. Montrer que l'on a $r^2\dot{\theta} = \frac{e}{2m}r^2B_z + \text{cste}$; on prendra par la suite cste = 0.

b. On considère désormais les trajectoires **peu inclinées** sur l'axe Oz, et on pose $r(t) = \rho[z(t)]$. Montrer que la fonction $\rho(z)$ vérifie l'équation :

$$\frac{d^2\rho}{dz^2} + \frac{e^2B_z^2(z)}{4mV_0^2}\rho = 0.$$

Le mouvement en projection dans le plan Oxy est circulaire, de rayon R tel que :

$$\frac{mV_{\perp}^2}{R} = eV_{\perp}B_0 \Rightarrow \frac{V_{\perp}}{R} = \frac{eB_0}{m}.$$



Ce cercle est donc décrit avec une pulsation $\omega = \frac{eB_0}{m}$ et une durée $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

La particule recoupera pour la première fois l'axe des z au bout d'un temps $t = T$, soit en un point C tel que :

$$z_C = V_z T \Rightarrow z_C = \frac{2\pi m}{eB_0} V_0 \cos\alpha.$$

Pour α infiniment petit du premier ordre, on a $\cos\alpha \approx 1$ et :

$$\boxed{z_C = \frac{2\pi m V_0}{eB_0}}$$

Ainsi, à cette approximation, les électrons passant par le point O, avec une vitesse V_0 peu inclinée sur l'axe, convergent au même point C de cet axe.

2. L'électron est soumis à la force $\vec{f}_m = -e\vec{V} \wedge (B_r\vec{u}_r + B_z\vec{u}_z)$.

La vitesse garde donc une norme constante $\|\vec{V}\| = V_0$. Appliquons la loi fondamentale de la dynamique :

$$m\vec{a} = \vec{f}_m.$$

$$\vec{f}_m = -e\begin{vmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} B_r \\ 0 \\ B_z \end{vmatrix} = -e\begin{vmatrix} r\dot{\theta}B_z & \vec{u}_r \\ \dot{z}B_r - \dot{r}B_z & \vec{u}_\theta \\ -r\dot{\theta}B_r & \vec{u}_z \end{vmatrix}$$

Et d'après le cours, $\vec{a} = a_r\vec{u}_r + a_\theta\vec{u}_\theta + a_z\vec{u}_z$ avec :

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2\,; \quad a_\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\,; \quad a_z = \ddot{z}.$$

D'où le système d'équations :

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -er\dot{\theta}B_z & (1) \\ m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = -e(\dot{z}B_r - \dot{r}B_z) & (2) \\ m\ddot{z} = er\dot{\theta}B_r & (3) \end{cases}$$

Soit : $\dot{r}_A = \left.\frac{dr}{dt}\right)_A \# \left.\frac{d\rho}{dz}\right)_A \cdot V_0 \Rightarrow \left.\frac{d\rho}{dz}\right)_A \sim \alpha.$

D'où : $\alpha = \lambda\frac{d\rho_1}{dz}(z_A) + \mu\frac{d\rho_2}{dz}(z_A).$

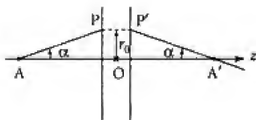
Il vient alors $\lambda = \alpha\lambda'$ et $\mu = \alpha\mu'$, les grandeurs λ' et μ' s'exprimant en fonction de $\rho_1(z_A)$, $\rho_2(z_A)$, $\frac{d\rho_1}{dz}(z_A)$ et $\frac{d\rho_2}{dz}(z_A)$.

Soit $\rho(z) = \alpha[\lambda'\rho_1(z) + \mu'\rho_2(z)]$. (7)

Ainsi, si la trajectoire de l'un de ces électrons (issus de A) recoupe l'axe Oz en un point A', c'est-à-dire si l'on a $\rho(z_{A'}) = 0$, il en sera de même pour tous les autres électrons (dans le cadre des approximations envisagées : α faible). En effet, la condition $\rho(z_{A'}) = 0$ est réalisée pour $\lambda'\rho_1(z_{A'}) + \mu'\rho_2(z_{A'}) = 0$ indépendamment de la valeur – petite – de α.

Les points A et A' sont dits conjugués.

2. c. α) D'après les hypothèses de l'énoncé, on peut considérer que les trajectoires des particules sont assimilables à des droites pour $|z| > \frac{d}{2}$. Un tel électron pénètre dans la zone d'interaction avec une vitesse $\overrightarrow{V_0}$ incliné de α sur l'axe Oz de telle sorte que :



$$\left.\frac{d\rho}{dz}\right)_P \# \frac{r_0}{\overline{AO}} \quad (OA \gg d).$$

De même, après interaction :

$$\left.\frac{d\rho}{dz}\right)_{P'} \# \frac{r_0}{\overline{A'O}} \quad (\text{sur la figure } \overline{A'O} < 0 \text{ et } \overline{AO} > 0).$$

On a considéré que la distance à l'axe $r(t)$ ne variait pour ainsi dire pas lors de la traversée de la zone d'interaction très étroite.

Intégrons alors l'équation (6) par rapport à z :

$$\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \frac{d^2\rho}{dz^2}dz = -\frac{e^2}{4m^2V_0^2}\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \rho B_z^2 dz.$$

Soit encore en faisant $\rho = r_0$ dans la deuxième intégrale :

$$\left.\frac{d\rho}{dz}\right)_{P'} - \left.\frac{d\rho}{dz}\right)_P \# -\frac{e^2}{4m^2V_0^2}r_0\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} B_z^2 dz.$$

Mais le champ B étant négligeable au-delà de la zone $|z| \leqslant \frac{d}{2}$, on peut étendre l'intégrale de $-\infty$ à $+\infty$, d'où : $\frac{r_0}{\overline{A'O}} - \frac{r_0}{\overline{AO}} \# r_0\left(-\frac{e^2}{4m^2V_0^2}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} B_z^2 dz.$

Soit après simplification par r_0 : $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}} = \frac{1}{f'}$ (8).

Avec $\boxed{\frac{1}{f'} \# \frac{e^2}{4m^2V_0^2}\int_{-\infty}^{+\infty} B_z^2 dz}$

La relation (8) s'identifie à la formule de conjugaison des lentilles minces.

Le système proposé correspond, pour les charges, à une **lentille magnétique convergente** (f' défini positif).

2. c. β) Un calcul immédiat donne :

$$\frac{1}{f'} = \frac{e^2}{4m^2V_0^2}B_0^2 a\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\left(\frac{z}{a}\right)}{\left(1+\left(\frac{z}{a}\right)^2\right)^2} \Rightarrow \boxed{f' = \frac{8m^2V_0^2}{\pi e^2 B_0^2 a}}$$

Application numérique : $f' = 10$ cm.

Chapitre

6

Thermodynamique

- A - Hydrostatique et gaz parfait
- B - Bilans d'énergie
- C - Bilans d'énergie et d'entropie
- D - Corps pur diphasé
- E - Machines thermiques

2. Ce qu'il faut comprendre

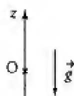
Dans les deux cas, il faut exprimer le fait que la pression varie verticalement dans un fluide en équilibre $\left(\frac{dP}{dz} = -\rho g\right)$, et qu'elle garde la même valeur en deux points d'un même fluide situés à la même altitude ($P = P(z)$ seulement à l'intérieur d'une zone de fluide homogène).

Lorsque la pression varie, les niveaux d'équilibre des différents liquides sont modifiés, y compris dans la cuve (A), les variations de ces niveaux étant liées par la conservation du volume de chacun des liquides (que l'on suppose bien sûr incompressibles : leurs masses volumiques sont données comme constantes).

3. Solution

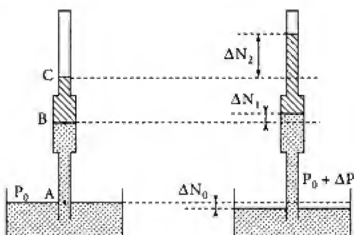
1. a. Considérons un fluide incompressible de masse volumique ρ_0 soumis au seul champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{u_z}$. La loi de l'hydrostatique s'écrit :

$$-\overrightarrow{\text{grad}}\, P + \rho_0 \vec{g} = \vec{0}.$$



Par projection sur Oz, il vient :

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \rho_0(-g) = 0 \Rightarrow P(z) = \text{cste} - \rho_0 g z.$$



Considérons que les niveaux correspondent à des hauteurs (exprimées en mètre).

Dans le premier état, ($P = P_0$) la pression en A vaut P_0, et d'après la loi de l'hydrostatique, on a : $P_A = (P_A - P_B) + (P_B - P_C) + P_C$

or $P_A - P_B = \rho g(N_1 - N_0)$; $P_B - P_C = \mu g(N_2 - N_1)$ et $P_C = 0$ (*cf.* énoncé).

D'où : $P_0 = \rho g(N_1 - N_0) + \mu g(N_2 - N_1)$ (1)

quand la pression extérieure passe à $P_0 + \Delta P$, les niveaux varient respectivement de ΔN_1, ΔN_2 et ΔN_0 ($\Delta N_1 > 0$ $\Delta N_2 > 0$ et $\Delta N_0 < 0$ pour $\Delta P > 0$).

On a ainsi :

$$P_0 + \Delta P = \rho g(N_1 + \Delta N_1 - N_0 - \Delta N_0) + \mu g(N_2 + \Delta N_2 - N_1 - \Delta N_1) \quad (2)$$

Et en faisant la différence (2) − (1) :

$$\Delta P = \rho g(\Delta N_1 - \Delta N_0) + \mu g(\Delta N_2 - \Delta N_1).$$

Il reste à traduire la conservation du volume :

– du mercure, soit : $S_1\Delta N_1 = -S_0\Delta N_0$ ($\Delta N_0 < 0$ pour $\Delta N_1 > 0$)

– de la glycérine, soit $S_2\Delta N_2 = S_1\Delta N_1$.

Éliminons ΔN_1 et ΔN_0 et faisons $\Delta N_2 = \Delta N$:

$$\Delta P = g\Delta N\left[\rho\left(\frac{S_2}{S_1} + \frac{S_1 S_2}{S_0 S_1}\right) + \mu\left(1 - \frac{S_2}{S_1}\right)\right]$$

or $\Delta P = \rho g \Delta H$ (ΔH = variation de pression exprimée en hauteur de mercure).

D'où
$$\Delta H = \Delta N\left[\frac{S_2}{S_1} + \frac{S_2}{S_0} + \frac{\mu}{\rho}\left(1 - \frac{S_2}{S_1}\right)\right]$$

et
$$\boxed{\frac{\Delta N}{\Delta H} = \frac{1}{\dfrac{S_2}{S_1} + \dfrac{S_2}{S_0} + \dfrac{\mu}{\rho}\left(1 - \dfrac{S_2}{S_1}\right)}}$$

1. b. Avec les valeurs fournies, l'application numérique donne :

$$\frac{\Delta N}{\Delta H} = 7{,}79.$$

La variation de niveau est notablement plus importante que la variation ΔH de hauteur de la colonne de mercure d'un tube barométrique « ordinaire » : **la sensibilité du baromètre a été augmentée.**

En effet, avec un tube barométrique ordinaire, on aurait :

$$H = H_0 + \Delta H = H_0 + x\left(1 + \frac{s}{S}\right)$$

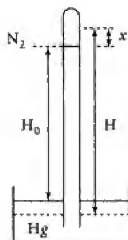
soit : $$\frac{x}{\Delta H} = \frac{1}{1 + \dfrac{s}{S}}$$

et, en prenant $s = S_2$: $\dfrac{x}{\Delta H} = 0{,}995 \# 1$

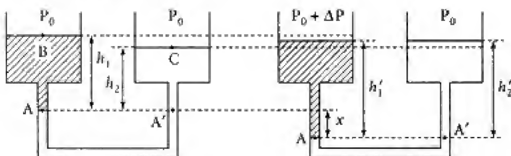
d'où $x \# \Delta H$ pour un tube barométrique ordinaire.

Par contre : $\Delta N = 7{,}79\Delta H \# 7{,}8 \cdot x$;

le rapport $\dfrac{\Delta N}{\Delta H}$ exprime bien – à très peu près – le gain en sensibilité dû au dispositif adopté…



2. a.



L'équilibre hydrostatique se traduit dans le premier cas par :
$P_A = P_{A'}$ avec $P_A = P_0 + \rho_1 g h_1$ et $P_{A'} = P_0 + \rho_2 g h_2$.
Soit $\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2$ (3)
Puis pour le nouvel équilibre :
$P_A = P_{A'}$ avec $P_A = P_0 + \Delta P + \rho_1 g h'_1$ et $P_{A'} = P_0 + \rho_2 g h'_2$.
Soit $\Delta P = (\rho_2 h'_2 - \rho_1 h'_1)g$ (4)
Traduisons maintenant la conservation des volumes des deux fluides :

$$\left.\begin{aligned} xs &= (h_1 + x - h'_1)S \Rightarrow h_1 - h'_1 = x\left(\frac{s}{S} - 1\right) \\ xs &= (h'_2 - x - h_2)S \Rightarrow h'_2 - h_2 = x\left(\frac{s}{S} + 1\right) \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

(3) et (4) donnent alors : $\Delta P = [\rho_2(h'_2 - h_2) - \rho_1(h'_1 - h_1)]g$

Soit avec (5) : $\Delta P = \left[\rho_2\left(1 + \frac{s}{S}\right) - \rho_1\left(1 - \frac{s}{S}\right)\right]gx$.

D'où
$$\boxed{\frac{x}{\Delta P} = \frac{1}{\left[(\rho_2 - \rho_1) + \frac{s}{S}(\rho_2 + \rho_1)\right]g}}$$

2. b. *Application numérique* : $\frac{x}{\delta P} = 4{,}47 \cdot 10^{-4}$ m · Pa^{-1}

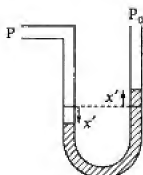
soit $\frac{x}{\delta P} = 0{,}45$ mm · Pa^{-1}, ce qui correspond à une sensibilité élevée.

Pour s'en convaincre, on peut comparer à ce que donnerait un manomètre constitué d'un simple tube en U rempli d'un liquide de masse volumique $\rho = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)$:

$$P = P_0 + \delta P = P_0 + 2x'\rho g$$

soit :

$$\frac{x'}{\delta P} = \frac{1}{2\rho g} = \frac{1}{g(\rho_1 + \rho_2)}$$



d'où, en comparant x à x' :

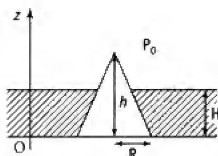
$$\frac{x}{x'} = \frac{1}{\frac{s}{S} + \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}} = 8{,}86$$

ce qui montre bien l'amélioration de la sensibilité...

602 Cône au fond d'un récipient

Un cône de hauteur h et de base circulaire de rayon R repose sur le fond d'un récipient contenant de l'eau sur une hauteur H. La pression extérieure est supposée uniforme et égale à P_0. La masse volumique de l'eau est ρ_e.

On cherche à déterminer la résultante $\vec{F_P}$ des efforts de pression s'exerçant sur la surface latérale du cône.



1. Déterminer la force $\vec{F_P}$ en utilisant la notion de poussée d'Archimède. On envisagera deux cas et on tracera la courbe donnant

$$F_P = \left\|\vec{F_P}\right\| \text{ en fonction de } X = \frac{H}{h}.$$

On fera les approximations nécessaires, tenant compte d'une masse volumique de l'eau à peu près 1 000 fois supérieure à celle de l'air.

On pourra exprimer tous les résultats en fonction des grandeurs : $F_0 = \pi R^2 P_0$ et $F_1 = \rho_e g V$ où V désigne le volume du cône $\left(V = \frac{1}{3}\pi R^2 h\right)$.

2. Retrouver les résultats précédents en effectuant un calcul direct de $\vec{F_P}$. Commenter.

1. Ce qu'il faut savoir

- Loi de l'hydrostatique.
- Poussée d'Archimède.

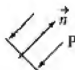
2. Ce qu'il faut comprendre

1. Pour appliquer correctement le théorème d'Archimède, il est nécessaire que le solide soit entièrement entouré de fluide(s). Il en est ainsi si l'on imagine le cône maintenu en position par rapport au niveau haut de l'eau et que l'on abaisse le niveau bas.

La poussée d'Archimède $\vec{P_A}$ comprend alors la résultante $\vec{F'}$ des efforts de pression qui s'exercent alors sur la surface de base du cône, et qu'il faudra donc retrancher pour obtenir $\vec{F_P}$.

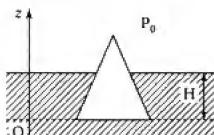
2. Il suffit de se rappeler que la force élémentaire s'exerçant sur un élément de surface $\delta\Sigma$ est donnée par l'expression : $\delta\vec{F} = -P\vec{n}\,\delta\Sigma$.

On intégrera sur toute la surface latérale du cône, et on tiendra compte des symétries du système.



3. Solution

1. La résultante des forces de pression s'exerçant sur la surface latérale n'est pas modifiée si l'on décale le fond du récipient vers le bas tout en maintenant fixe le cône. Dans cette configuration, la résultante des efforts de pression sur la surface totale du cône s'identifie à la poussée d'Archimède $\overrightarrow{P_A}$.



Nous avons donc : $\overrightarrow{P_A} = \overrightarrow{F_P} + \overrightarrow{F'}$ (1) avec $\overrightarrow{P_A} = -m_{\text{fluides déplacés}}\vec{g}$

où $\overrightarrow{F'}$ est associée aux efforts de pression qui s'exercent sur la base du cône. Il vient :

$$\overrightarrow{F'} = [P_0 + \rho_e gH]\pi R^2\overrightarrow{u_z} \quad (2)$$

En effet, la loi de l'hydrostatique s'écrit ici : $-\dfrac{dP}{dz} - \rho_e g = 0$

soit avec $\rho = \rho_e = \text{cste} \Rightarrow \dfrac{dP}{dz} = -\rho_e g = \text{cste}$.

Et après intégration : $P(z) = P(H) - \rho_e g(z - H) = P_0 - \rho_e g(z - H)$.

Pour $z = 0$, nous obtenons donc $P = P_0 + \rho_e gH$.

(1) et (2) donnent : $\overrightarrow{F_P} = \overrightarrow{P_A} - \pi R^2(P_0 + \rho_e gH)\overrightarrow{u_z}$. (3)

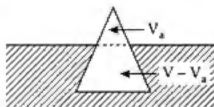
Il reste à déterminer la poussée d'Archimède dans la configuration précisée ci-dessus. Elle est égale et opposée au poids des fluides déplacés. Deux cas sont donc à envisager :

α) $H \geqslant h$, le cône est entouré d'eau de telle sorte que : $\overrightarrow{P_A} = -\rho_e V\vec{g} = \rho_e Vg\overrightarrow{u_z}$ (4)

β) $0 < H < h$, le cône n'est que partiellement immergé dans l'eau ce qui donne :

$$\overrightarrow{P_A} = -[\rho_a V_a + \rho_e(V - V_a)]\vec{g}$$

V_a désigne le volume « baigné » par l'air.



Il faut alors remarquer que la masse volumique de l'eau est bien supérieure à celle de l'air $\left(\dfrac{\rho_e}{\rho_a} \sim 10^3\right)$, ce qui permet d'adopter le cadre d'hypothèses suivant :

H1 – La pression dans l'air est uniforme et vaut P_0.

H2 – La contribution de la poussée d'Archimède due à l'air est négligée ce qui impose :

$$\overrightarrow{P_A} \# -\rho_e(V - V_a)\vec{g} \quad (5)$$

En toute rigueur, il faudrait que l'on ait $\rho_e(V - V_a) \gg \rho_a V_a$; cependant, pour $V_a = V$, on a $\overrightarrow{P_A} = -\rho_a V\vec{g} = +\frac{1}{3}\pi R^2\rho_a hg\overrightarrow{u_z}$ grandeur qui est effectivement négligeable dans la mesure où l'on a fait l'hypothèse H1, qui revient à ne pas tenir compte de la chute de pression $(\rho_a hg)$ sur la hauteur du cône…

Calculons V et V_a : $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

$V_a = \frac{1}{3}\pi R'^2 h'$ et $\tan\alpha = \frac{R}{h} = \frac{R'}{h'}$

d'où $V_a = \frac{1}{3}\pi R^2 h \left(\frac{h'}{h}\right)^3$ avec $h' = h - H$

soit $V_a = V\left[1 - \frac{H}{h}\right]^3$.

À cette approximation, nous obtenons donc : $\overrightarrow{P_A} \# \rho_e g V\left[1 - \left(1 - \frac{H}{h}\right)^3\right]\vec{u}_z$.

Nous pouvons maintenant donner l'expression de la force $\overrightarrow{F_P}$:

α) $H \geqslant h$: $\overrightarrow{F_P} = \rho_e V g \vec{u}_z - \pi R^2(P_0 + \rho_e g H)\vec{u}_z$

D'où : $\overrightarrow{F_P} = \left\{-\pi R^2 P_0 - \rho_e g V\left(\frac{3H}{h} - 1\right)\right\}\vec{u}_z$.

Et avec les notations du texte $F_0 = \pi R^2 P_0$, $F_1 = \rho_e g V$:

$$\overrightarrow{F_P} = \left\{-F_0 - F_1\left(3\frac{H}{h} - 1\right)\right\}\vec{u}_z \quad (6)$$

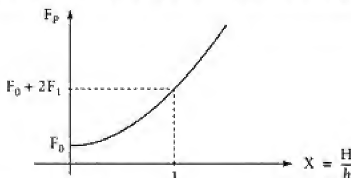
Dans ce cas, la pression varie linéairement en fonction de H en tout point de la surface latérale du cône, il en est donc de même de la force $\overrightarrow{F_P}$:

β) $H \leqslant h$: $\overrightarrow{F_P} = \rho_e g V\left[1 - \left(1 - \frac{H}{h}\right)^3\right]\vec{u}_z - \pi R^2(P_0 + \rho_e g H)\vec{u}_z$.

D'où
$$\overrightarrow{F_P} = -\left\{F_0 + F_1\left[\frac{3H}{h} - 1 + \left(1 - \frac{H}{h}\right)^3\right]\right\}\vec{u}_z \quad (7)$$

Il y a bien continuité de $\overrightarrow{F_P}$ (conférer (6) et (7)) pour $h = H$.

Traçons le graphe donnant F_P ($\overrightarrow{F_P} = -F_P\vec{u}_z$) en fonction de la variable $X = \frac{H}{h}$:

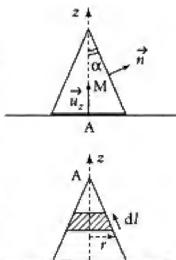


On a $F_P(0) = F_0$; $F(1) = F_0 + 2F_1$.

• Remarquons enfin que le solide reposera (sans intervention extérieure) sur le fond du récipient que si son poids est supérieur à la poussée d'Archimède, soit pour :

$$Mg > \rho_e(V - V_a) \text{ pour } H < h$$
$$Mg > \rho_e V \text{ pour } H > h.$$

2. On a : $\vec{F_P} = -\iint P(M)\vec{n}\,\delta\Sigma$.



La répartition des efforts de pression possède la symétrie de révolution autour de l'axe Az du cône, de telle sorte que la résultante de ces efforts est colinéaire à $\vec{u_z}$ soit :

$$\vec{F_P} = (\vec{F_P}\cdot\vec{u_z})\vec{u_z} = \left\{-\iint P(M)\vec{n}\cdot\vec{u_z}\delta\Sigma\right\}\vec{u_z} = -F_P\vec{u_z}.$$

Notons que $\vec{n}\cdot\vec{u_z} = \sin\alpha$.

Pour calculer $\delta\Sigma$, considérons la portion de la surface du cône située entre les plans de cotes z et $z + dz$; nous avons :

$\delta\Sigma = 2\pi r dl$, avec $dl\cos\alpha = dz$.

De plus, $\tan\alpha = \dfrac{r(z)}{-z}$ (origine prise au sommet A du cône)

soit $\quad \delta\Sigma = -2\pi z\tan\alpha\dfrac{dz}{\cos\alpha} \quad$ et $\quad \vec{n}\cdot\vec{u_z}\delta\Sigma = -2\pi z\tan^2\alpha dz$.

D'où
$$\boxed{F_P = -2\pi\tan^2\alpha\int_{-h}^{0}P(z)z\,dz} \quad (8)$$

Envisageons alors les deux cas de figure selon que le cône est complètement immergé ou non dans l'eau :

α) $H \geq h$:

$P(z) = P_0 + \rho_e g(H - h - z)$ puisque la pression doit augmenter lorsque $(-z)$ croit.

L'intégrale (8) s'écrit alors :

$$F_P = -2\pi\tan^2\alpha\int_{-h}^{0}[P_0 + \rho_e g(H - h - z)]z\,dz$$

ce qui donne :

$$F_P = -2\pi\tan^2\alpha\left[P_0\cdot\left(\frac{-h^2}{2}\right) + \rho_e g(H-h)\cdot\left(\frac{-h^2}{2}\right) - \rho_e g\frac{h^3}{3}\right].$$

Soit avec $\tan\alpha = \dfrac{R}{h}$ (et donc $R = h\tan\alpha$) : $F_P = \pi R^2 P_0 + \pi R^2\rho_e g\left[H - h + \dfrac{2h}{3}\right]$.

Finalement, nous obtenons avec $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h$:

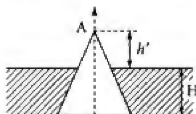
$$\boxed{F_P = \pi R^2 P_0 + \rho_e g V\left[\frac{3H}{h} - 1\right]}$$

β) $H \leq h$:

Rappelons que $h' = h - H$, d'où :

$P = P_0$ pour $-(h - H) \leq z \leq 0$.

$P = P_0 + \rho_e g(H - h - z)$ pour $-h \leq z \leq -(h - H)$.



L'intégrale devient ici :

$$F_P = -2\pi \tan^2\alpha \left\{ \int_{-h}^{-(h-H)} [P_0 + \rho_e g(H - h - z) z dz] + \int_{-(h-H)}^{0} P_0 z dz \right\}$$

$$F_P = -2\pi \tan^2\alpha \left\{ [P_0 + \rho_e g(H - h)]\left[\frac{(h-H)^2}{2} - \frac{h^2}{2}\right] \ldots \right.$$

$$\left. + \rho_e g\left[\frac{(h-H)^3}{3} - \frac{h^3}{3}\right] - P_0\left(\frac{(h-H)^2}{2}\right)\right\}.$$

Soit encore :

$$F_P = -2\pi \tan^2\alpha \left\{ -P_0\frac{h^2}{2} - \rho_e g(h-H)^3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \rho_e g\left[\frac{h^3}{3} + \frac{h^2}{3}(H - h)\right]\right\}$$

$$F_P = \pi R^2 \left\{ P_0 + \rho_e g \frac{h}{3}\left(1 - \frac{H}{h}\right)^3 + \rho_e g\left[H - h + \frac{2}{3}h\right]\right\}.$$

Finalement $\boxed{F_P = \pi R^2 P_0 + \rho_e g V\left\{\left(1 - \frac{H}{h}\right)^3 - 1 + \frac{3H}{h}\right\}}$

Ces résultats, établis par un calcul direct sous forme d'intégrale, sont bien sûr identiques à ceux obtenus à partir d'un bilan de forces utilisant le théorème d'Archimède.

POINT MÉTHODE

La première méthode semble donc préférable à la seconde.
Encore faut-il s'assurer que l'on peut utiliser la notion de poussée d'Archimède (l'état de référence devant correspondre à un état d'équilibre hydrostatique…).

603 Ballons ascensionnels

1. Montgolfière : on considère une enveloppe de volume constant V_0, remplie d'air (supposé gaz parfait) à la température T'. Ce ballon est ouvert à sa partie inférieure, de façon à rester constamment en équilibre uniquement de pression avec l'air extérieur (dont la température est T). On note M_0 la masse totale de l'enveloppe, du dispositif de chauffage, de la nacelle et des passagers.

a. Exprimer la relation liant T' notamment à T et P pour que le ballon soit en équilibre du point de vue mécanique, à la pression ambiante P.

b. *Application numérique* : $V_0 = 1\,200\ \text{m}^3$; $M_0 = 400$ kg ; $g = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $P_1 = P_0 = 10^5$ Pa ; $T_1 = 290$ K (valeurs de T et P au sol). Masse volumique de l'air dans les conditions normales (P_0 et $T_0 = 273$ K) : $\rho_0 = 1{,}3\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Montrer que le ballon décolle si T' est supérieure à une température limite T'_1 que l'on calculera.

c. Pour quelle valeur T'_2 de T' le ballon serait-il en équilibre à l'altitude de 200 m ? On posera $T'_2 = T'_1 + \Delta T'$ et on cherchera à déterminer $\Delta T'$ sachant qu'à cette altitude, la température est $T_2 = 289$ K. Commenter.

2. Ballon-sonde : dans ce cas, l'enveloppe du ballon (souple et ouverte à la partie inférieure) a un volume maximal $V_m = 1\,200$ m^3, et ne contient initialement, au moment du décollage, qu'un volume V_0 d'hélium, aux conditions de température et de pression de l'air environnant (valeurs $T_1 = 290$ K et $P_1 = P_0 = 10^5$ Pa au niveau du sol), la masse de l'enveloppe et du matériel employé est $M_0 = 250$ kg.

On donne : $R = 8{,}31$ J · mol^{-1} · K^{-1} ; $g = 9{,}81$ m · s^{-2} ; masses molaires de l'air et de l'hélium : 29 et 4 g · mol^{-1}.

a. Quelle masse minimale d'hélium faut-il introduire dans l'enveloppe pour que le ballon décolle ? Quel est le volume V_0 correspondant ?

b. Le ballon a été rempli, au sol, avec un volume d'hélium $V_0 = 300$ m^3.
Quelle est la force ascensionnelle au départ ?
Comment évolue cette force avec l'altitude ?
Quelle peut être la loi du mouvement ascendant du ballon ?

c. Déterminer la relation liant les valeurs T et P de la température et de la pression de l'air à l'altitude où le ballon est en équilibre. Donner la valeur du plafond H atteint par le ballon dans l'hypothèse d'une atmosphère isotherme. Commenter.

1. Ce qu'il faut savoir

- Poussée d'Archimède.
- Loi des gaz parfaits.
- Loi de l'hydrostatique.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. a. Le ballon est soumis à son poids et à la poussée d'Archimède : il est important de bien préciser le système, et le volume qu'il occupe ; le poids sera donc celui du « matériel » (masse M_0), et celui de l'air chaud contenu dans le ballon (masse m').

b. Pour de petites variations d'altitude, température et pression de l'air atmosphérique varient peu : on pourra utiliser une relation approchée pour calculer la variation de pression.

2. Dans le cas du ballon-sonde, les forces en présence sont les mêmes, mais on a alors intérêt à limiter le système au matériel et à l'hélium emporté, de volume total pratiquement égal à celui de l'hélium. Enfin, lorsque l'altitude varie :

- de nouvelles forces peuvent apparaître ;
- les conditions de température et de pression changent, et le volume occupé par l'hélium change : si ce volume atteint la valeur V_m, de l'hélium s'échappe du ballon…

3. Solution

1. a. Prenons comme système le ballon, ses accessoires et son contenu : il est soumis aux forces de pesanteur et à la poussée d'Archimède $\overrightarrow{P_A}$, soit une force ascensionnelle :

$$f = P_A - (M_0 + m')g \quad (1)$$

en notant m' la masse de l'air – à la température T – contenu dans le ballon.

La poussée d'Archimède $\overrightarrow{P_A}$ est égale au poids du volume V d'air – à la température T – dont le ballon occupe la place : on peut raisonnablement prendre $V = V_0$ (ce qui revient à négliger devant V_0 le volume occupé par le matériel et les passagers...).

Exprimons P_A : $P_A = \rho_{air} V_0 g$.

Et d'après la loi des gaz parfaits, $PV = nRT = \frac{nM}{M}RT$ (M = masse molaire de l'air).

Or $\quad \rho_{air} = \frac{nM}{V} \Rightarrow \rho_{air} = \frac{MP}{RT} \quad$ avec $\quad \rho_0 = \frac{MP_0}{RT_0}$ (*cf.* énoncé).

D'où $\quad \rho_{air} = \rho_0 \frac{P}{P_0} \cdot \frac{T_0}{T} \quad (2) \quad$ et $\quad P_A = \rho_0 V_0 g \frac{P}{P_0} \cdot \frac{T_0}{T}$.

Pour déterminer la masse m' d'air contenue dans le ballon, il suffit d'utiliser (2) en y remplaçant T par T′ (air chauffé). D'où :

$$m' = \rho' V_0 \Rightarrow m' = \rho_0 V_0 \frac{P}{P_0} \cdot \frac{T_0}{T'}.$$

La force de propulsion (1) s'écrit alors :

$$f = \rho_0 g V_0 \frac{PT_0}{P_0}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T'}\right) - M_0 g \quad (3)$$

Le ballon est en équilibre à l'altitude considérée (air ambiant à la pression P et à la température T) pour une température T′ de l'air du ballon telle que $f(T') = 0$.

Commentaire

Cela suppose l'existence de frottements fluides (du type $\vec{f'} = -\alpha\vec{V}$) de telle sorte que la vitesse de montée s'annule en même temps que la force...

Soit : $\quad \frac{1}{T'} = \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0\rho_0 V_0} \frac{M_0}{} \cdot \frac{P_0}{P} \quad (4)$

1. b. Le ballon décollera si l'on a $f > 0$ pour $P = P_0$ et $T = T_1 = 290$ K. Cela suppose donc, d'après (3) :

$T' > T'_1$ avec d'après (4) : $\frac{1}{T'_1} = \frac{1}{T_1} - \frac{M_0}{T_0\rho_0 V_0} \quad (5)$

D'où $\quad \boxed{T'_1 = \frac{T_1}{1 - \frac{T_1}{T_0\rho_0 V_0} M_0}} \quad T'_1 = $ **399 K** (398,6 K).

1. c. Le ballon est en équilibre à l'altitude de $z = 200$ m pour une température T'_2 telle que (*cf.* (4)) :

$$\frac{1}{T'_2} = \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_0}\frac{M_0}{\rho_0 V_0}\frac{P_0}{P_2} \quad (6)$$

Il reste à déterminer la pression P_2 de l'air ambiant. Écrivons la loi de l'hydrostatique :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \quad \text{où} \quad \rho = \rho_0 \frac{P}{P_0}\frac{T_0}{T}.$$

T variant peu (T (au sol) = $T_1 = 290$ K ; $T(z = 200\text{ m}) = T_2 = 289$ K), on négligera les variations de ρ sur une différence d'altitude de 200 m, d'où :

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dz} = -\rho_0 g\frac{T_0}{P_0 T} \sim -\frac{1{,}3 \times 273 \times 9{,}81}{10^5 \times 290} \sim -10^{-4}\ \text{m}^{-1}.$$

La pression varie donc également très peu sur le même intervalle.

Posons $P_2 = P_0 + \Delta P$. Nous ferons l'approximation : $\frac{dP}{dz} = -\rho_0 g\frac{T_0}{T_1}\cdot\frac{P_2}{P_0} \approx -\rho_0 g\frac{T_0}{T_1}$.

Soit $\Delta P \# -\rho_0 g z\frac{T_0}{T_1}$. Soustrayons alors les relations (5) et (6). Il vient :

$$\frac{1}{T'_1} - \frac{1}{T'_2} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_0}\frac{M_0}{\rho_0 V_0}\left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\Delta P}{P_0}}\right)$$

soit avec $T'_2 = T'_1 + \Delta T'$ et $\Delta T' \ll T'_1 \Rightarrow \frac{1}{T'_1} - \frac{1}{T'_2} \approx \frac{\Delta T'}{T'^2_1}$.

De même $T_2 = T_1 + \Delta T$ et $|\Delta T| \ll T_1 \Rightarrow \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} = \frac{\Delta T}{T_1^2}$.

Et $1 - \frac{1}{1 + \frac{\Delta P}{P_0}} \approx \frac{\Delta P}{P_0}$ d'où : $\Delta T' \approx T'^2_1\left[\frac{\Delta T}{T_1^2} + \frac{M_0}{T_0\rho_0 V_0}\rho_0 g z\frac{T_0}{T_1 P_0}\right]$

soit

$$\boxed{\Delta T' = \frac{T'^2_1}{T_1}\left[\frac{\Delta T}{T_1} + \frac{M_0 g z}{V_0 P_0}\right]}$$

L'application numérique donne $\Delta T' = $ **1,7 K** avec ($\Delta T = -1$ K).

Commentaire

La température T' d'équilibre est une fonction lentement variable de z. Un faible échauffement de l'air emprisonné dans le ballon suffira à faire varier notablement l'altitude du ballon.

2. a. Comme précédemment, le bilan des forces s'exerçant sur le système (enveloppe + hélium + matériel) fait apparaître une force « motrice » résultante :

$$f = P_A - m_{He}g - M_0 g.$$

La poussée d'Archimède correspond ici à :

$$P_A = \rho_{1(air)} g V_0 \quad \text{avec} \quad \rho_{1(air)} = \frac{M_{air}P_0}{RT_1}.$$

Or l'hélium contenu dans le ballon est dans les mêmes conditions de température (T_1) et de pression ($P_1 = P_0$) que l'air extérieur, soit :

$$m_{He} = \rho_{He} g \quad \text{et} \quad \rho_{He} = \frac{M_{He}P_0}{RT_1}.$$

Finalement :
$$f = \rho_{He}\frac{M_{air}}{M_{He}}V_0 g - m_{He}g - M_0 g.$$

$$\boxed{f = \left[\left(\frac{M_{air}}{M_{He}} - 1\right)m_{He} - M_0\right]g}$$

Commentaire

Le rapport $\frac{M_{He}}{M_{air}} = d$ représente la densité du gaz Hélium par rapport à l'air.

Le décollage n'est possible que pour $f > 0$, c'est-à-dire :

$$\boxed{m_{He} > \frac{M_0}{\frac{1}{d} - 1}} \quad \text{soit} \quad \boldsymbol{m_{He} > 40\ \text{kg}.}$$

Ce qui correspond à un volume V_0 tel que :

$$V_0 = \frac{m_{He}}{\rho_{He}} = \frac{m_{He}RT_1}{M_{He}P_0} \quad \text{soit} \quad \mathbf{V_0 = 241\ m^3}.$$

2. b. Il suffit d'exprimer f en fonction du volume d'hélium introduit dans l'enveloppe.

$$f = \left[\left(\frac{M_{air}}{M_{He}} - 1\right)\frac{M_{He}P_0}{RT_1}V_0 - M_0\right]g \quad (7)$$

L'application numérique donne **f = 601 N.**

Sous l'effet de cette force, le ballon va monter, ce qui entraine une diminution de la pression (et de la température...). Mais f ne dépend que de la masse d'hélium introduite au départ : tant que celle-ci reste constante, **la force reste constante.**

Cependant, il serait tout à fait abusif d'en déduire que le ballon va avoir un mouvement uniformément accéléré ! En effet, lorsqu'il y a mouvement, apparait une force supplémentaire, due au frottement de l'air sur l'enveloppe, force qui croît avec la vitesse. En pratique, le ballon va s'élever à la **vitesse limite** pour laquelle la force de frottement est égale à f...

2. c. Le mouvement précédent – pratiquement uniforme – va durer tant que m_{He} reste constante, c'est-à-dire tant que $V_{He} < V_m$ (l'hélium n'occupe pas tout le volume du ballon).

À partir du moment où V_{He} atteint la valeur V_m, la masse d'hélium peut diminuer (de l'hélium s'échappe par l'ouverture à la partie inférieure) et la force f également : le mouvement ascendant se ralentit, et le ballon atteint son altitude d'équilibre pour $f = 0$, avec $V = V_m$:

$$f = \left[(M_{air} - M_{He})\frac{P}{RT}V_m - M_0\right]g = 0$$

on a remplacé dans (7) P_0 par P, T_1 par T et V_0 par V_m.

Soit $$\boxed{\frac{P}{T} = \frac{M_0 R}{(M_{air} - M_{He})V_m}} \quad (8)$$

Application numérique : $\frac{P}{T}$ = **69,25 Pa** · K^{-1}.

On peut comparer cette valeur à la valeur au sol : $\frac{P_0}{T_1}$ # 345 Pa · K^{-1}

et remarquer que $\frac{P}{T}$ diminue régulièrement avec l'altitude (les variations de pression l'emportent largement sur les variations de température...).

Si l'on fait l'hypothèse d'une atmosphère isotherme entre le sol et l'altitude atteinte par le ballon sonde, soit $T(z) = T_1$, on peut alors déterminer la pression $P(z)$ en fonction de l'altitude z et en déduire le plafond H.

Revenant à la loi locale de l'hydrostatique, nous avons :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho_{air} g = -\rho_0 g \frac{P}{P_0} \cdot \frac{T_0}{T_1}$$

d'où $\frac{1}{P} dP = -\frac{\rho_0 g T_0}{P_0 T_1} dz$.

Et après une simple intégration : $\ln \frac{P}{P_0} = -\frac{\rho_0 g T_0}{P_0 T_1} z = -\frac{z}{a}$ où $a = \frac{P_0 T_1}{\rho_0 g T_0}$ = 8,33 km.

Le plafond (*cf.* commentaire du 1. a.) (z = H) est obtenu pour $\frac{P}{T}$ = 69,25 soit :

$$H = -a \ln\left(69{,}25 \cdot \frac{T_1}{P_0}\right) \Rightarrow \mathbf{H = 13{,}4\ km.}$$

Commentaire

L'hypothèse de l'atmosphère isotherme n'est certainement pas très réaliste dans le cas envisagé...

604 Effusion par un trou

1. De l'hélium est enfermé dans un récipient de volume V = 1 L maintenu à 0 °C. La pression initiale est P_0 = 1 mmHg.

À l'extérieur du récipient, c'est le vide absolu. Sachant que la paroi est percée d'un petit trou d'aire s = 1 $(\mu m)^2$, établir l'expression de la pression P dans le récipent en fonction du temps. Au bout de combien de temps, la pression aura-t-elle diminué de moitié ?

2. Au lieu de sortir dans le vide, les atomes passent du récipient (1) à un récipient (2) de volume V identique au précédent. Les deux récipients sont séparés par une paroi diatherme percée d'un petit trou de même surface que précédemment.

À la date $t = 0$, le récipient (1) contient de l'hélium sous pression P_0 ; l'autre est vide. L'ensemble est maintenu à 0 °C.

Établir la loi donnant la pression P_2 dans le deuxième récipient en fonction du temps. Calculer la date à laquelle $P_2 = \frac{P_0}{4}$.

L'hélium est un gaz monoatomique de masse molaire $M = 4\ g \cdot mol^{-1}$. Le trou est assez petit pour considérer que le gaz reste au repos. On considère que tous les atomes ont une vitesse égale à la vitesse quadratique $u = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$. Ces vitesses ne sont orientées que selon $\pm\vec{u}_x$, $\pm\vec{u}_y$, $\pm\vec{u}_z$. La répartition dans ces six directions est isotrope.

On donne la constante des gaz parfaits $R = 8{,}31\ J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$.

1. Ce qu'il faut savoir

- Vitesse quadratique moyenne d'un gaz parfait monoatomique.
- Loi des gaz parfaits.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. Il faut déterminer le nombre d'atomes qui s'échappent par unité de temps, puis relier ce nombre à la variation de pression.

2. Il y a à la fois passage des atomes de $1 \to 2$ et de $2 \to 1$.

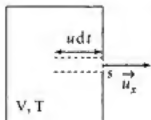
Solution

1. • Soit u la vitesse quadratique moyenne des atomes d'hélium.

L'hélium étant un gaz monoatomique :

$$u = \sqrt{\frac{3RT}{M}}.$$

• La répartition des vitesses étant isotrope, $\frac{1}{6}$ des atomes a une vitesse orientée selon $\vec{u}_x$.



• Les atomes sortant par le trou d'aire s pendant la durée élémentaire dt sont contenus dans le cylindre de volume $dv = su\,dt$.

• La densité atomique étant $\frac{N}{V}$, le nombre V d'atomes présents dans le récipient diminue pendant le temps dt de

$$dN = -\frac{su\,dt\,N}{6V} = -\frac{s}{6V}\sqrt{\frac{3RT}{M}}\,dt \cdot N.$$

Soit en notant $\tau = \frac{6V}{s}\sqrt{\frac{M}{3RT}}$ (1) :

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{N}{\tau}$$

et en tenant compte des conditions initiales ($N = N_0$ à $t = 0$) :

$$N = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Par ailleurs, d'après la loi des gaz parfaits :

$$P = \frac{NRT}{\mathcal{N}_a},\ \mathcal{N}_a \text{ étant le nombre d'Avogadro.}$$

Il vient donc $\boxed{P = P_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}$

$P = \frac{P_0}{2}$ pour $\boxed{t_{\frac{1}{2}} = \tau \ln 2}$ soit $t_{\frac{1}{2}} = \frac{6V}{s}\sqrt{\frac{M}{3RT}}\ln 2$ (2).

Application numérique :

$$t_{\frac{1}{2}} \approx 37 \text{ jours.}$$

2. Il faut maintenant tenir compte du passage des atomes de 1 vers 2 et de leur passage de 2 → 1 tout en conservant le nombre d'atomes :

$$N_0 = N_1 + N_2 \quad (3)$$

on a $\frac{dN_1}{dt} = -\frac{N_1}{\tau} + \frac{N_2}{\tau'}$ (4) comme précédemment avec $\tau' = \tau$ car V et T sont identiques pour les 2 récipients.

Soit, en éliminant $\frac{dN_1}{dt}$ et N_1 dans (4), à l'aide de (3) :

$$\frac{dN_2}{dt} + \frac{2N_2}{\tau} = \frac{N_0}{\tau}$$

d'où $N_2 = \frac{N_0}{2}\left(1 - e^{-\frac{2t}{\tau}}\right)$ en tenant compte des conditions initiales

et $P_2 = \frac{N_2}{\mathcal{N}_a}\frac{RT}{V} = \frac{N_0}{2\mathcal{N}_a}\frac{RT}{V}\left(1 - e^{-\frac{2t}{\tau}}\right)$.

$$\boxed{P_2 = \frac{P_0}{2}\left(1 - e^{-\frac{2t}{\tau}}\right)}$$

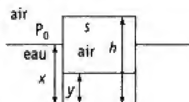
$P_2 = \frac{P_0}{4}$ pour $t' = \frac{\tau}{2}\ln 2$.

Application numérique : $t' = \frac{1}{2}t_{1/2} = 18{,}5$ jours.

605 Cloche renversée

On renverse une cloche cylindrique de section s, de hauteur h et de masse m, et on la laisse descendre verticalement dans une cuve à eau. La cloche s'enfonce dans l'eau en emprisonnant l'air qu'elle contenait et occupant initialement son volume intérieur.

À l'équilibre, la cloche flotte, la pression atmosphérique vaut P_0 et la masse volumique de l'eau est ρ. L'épaisseur des parois de la cloche est supposée négligeable.



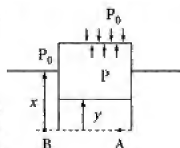
1. Déterminer les hauteurs x et y repérant les surfaces libres de l'eau par rapport aux bords de la cloche.

2. a. À quelle condition – sur le volume $V_0 = hs$ de la cloche – celle-ci peut-elle effectivement flotter ?

b. Retrouver le résultat précédent en utilisant le théorème d'Archimède.

Solution

1. L'air emprisonné dans la cloche est comprimé par l'eau qui y pénètre. Notons P sa pression.



L'équilibre mécanique de la cloche s'écrit alors :

$$Ps = P_0 s + mg \quad (1)$$

Pour déterminer la pression P, on supposera l'équilibre thermique atteint, et on assimilera l'air à un gaz parfait, soit en notant n_0 le nombre de moles d'air emprisonnées.

$$P_0 V_0 = P \cdot (V_0 - sy) = n_0 RT \quad (2)$$

Éliminons P entre les relations (1) et (2) :

$$P_0 s + mg = \frac{P_0 V_0 s}{V_0 - sy}.$$

Soit avec $V_0 = sh$:

$$h - y = \frac{P_0 sh}{P_0 s + mg} \Rightarrow y = h\left[1 - \frac{1}{1 + \frac{mg}{P_0 s}}\right].$$

Finalement

$$\boxed{y = h \cdot \frac{1}{1 + \frac{P_0 s}{mg}}} \quad (3)$$

La valeur de x s'en déduit en évaluant de deux façons différentes la pression en A :

on a d'une part : $P_A = P + \rho g y$

et d'autre part : $P_A = P_B = P_0 + \rho g x$.

On a donc $$\boxed{P' = P\frac{V_0}{V_0+V_2} + P_e\frac{V_1}{V_0+V_2}} \quad (1)$$

La masse d'air δm_p pompée après un aller et retour correspond à :

$$\delta m_p = m(P) - m(P') = \frac{MV_0}{RT}(P - P').$$

Soit $$\boxed{\delta m_p = \frac{MV_0}{RT}\frac{PV_2 - P_eV_1}{V_0+V_2}} \quad (2)$$

On atteint la pression limite pour $P' = P = P_\ell$, d'où :

$$P_\ell = P_\ell\frac{V_0}{V_0+V_2} + P_e\frac{V_1}{V_0+V_2} \Rightarrow \boxed{P_\ell = P_e\frac{V_1}{V_2}} \quad (3)$$

Commentaire

On aurait également pu écrire que la limite étant atteinte, on a nécessairement $\delta m_p = 0$ pour $P = P_\ell$ ce qui redonne bien le même résultat.

Application numérique : si l'on tient compte de $V_0 \gg V_2$ et $V_2 \gg V_1$

$$\delta P = P' - P \# \frac{1}{V_0}(P_eV_1 - PV_2) = P_e\left(\frac{V_1 - V_2}{V_0}\right) = -P_e\frac{V_2}{V_0} \Rightarrow \mathbf{\delta P = -100\ Pa}$$

$$\delta m_p = \frac{MV_0}{RT}(-\delta P) \Rightarrow \mathbf{\delta m_p = 1{,}15\ g}$$

$$P_\ell = P_e\frac{V_1}{V_2} \Rightarrow \mathbf{P_\ell = 10^3\ Pa.}$$

2. a. Avant le nième aller et retour, la pression dans le réservoir est P_{n-1}.
Après, elle devient P_n. La relation définissant P_n à partir de P_{n-1} est la même que celle établie au 1. entre P' et P (faire $P \to P_{n-1}$ et $P' \to P_n$), soit :

$$P_n = P_{n-1}\frac{V_0}{V_0+V_2} + P_e\frac{V_1}{V_0+V_2}.$$

Il suffit de noter $P_0 = P_e$ (pression de l'air dans le réservoir avant le début du pompage). Les différentes pressions successives dans le réservoir forment une suite $\{P_n\}$. Sachant que cette pression doit tendre vers P_ℓ, posons : $P'_n = P_n - P_\ell$.

D'où : $$P_\ell + P'_n = \frac{V_0}{V_0+V_2}(P_\ell + P'_{n-1}) + P_e\frac{V_1}{V_0+V_2}$$

soit encore : $$P'_n = \frac{V_0}{V_0+V_2}P'_{n-1} + \underbrace{\frac{P_eV_1}{V_0+V_2} - \frac{P_\ell V_2}{V_0+V_2}}_{0} \quad \left(P_\ell = P_e\frac{V_1}{V_2}\right).$$

La suite $\{P'_n\}$ constitue donc une suite géométrique et :

$$P'_n = P'_0\left(\frac{V_0}{V_0+V_2}\right)^n \text{ avec } P'_0 = P_0 - P_\ell = P_e - P_\ell.$$

Finalement, nous obtenons : $$\boxed{P_n = P_\ell + \left(\frac{V_0}{V_0+V_2}\right)^n \cdot [P_e - P_\ell]} \quad (3)$$

2. b. La pression dans le réservoir vaut :

$$\begin{cases} P = P_e & \text{à } t_0 = 0 \\ P = P_1 & \text{à } t_1 = \Delta t \\ P = P_n & \text{à } t_n = n\Delta t \text{ etc.} \end{cases}$$

où $\Delta t = \frac{1}{N}$ est la durée d'un aller et retour du piston.

On a donc $P_n = P(t_n) = P_\ell + (P_e - P_\ell)\left(\frac{V_0}{V_0 + V_2}\right)^{Nt_n}$.

Soit encore : $P(t_n) = P_\ell + (P_e - P_\ell)\exp\left\{-Nt_n \ln\left(\frac{V_0 + V_2}{V_0}\right)\right\}$

or $\frac{V_2}{V_0} \ll 1 \Rightarrow \ln\left(1 + \frac{V_2}{V_0}\right) \approx \frac{V_2}{V_0}$, ce qui donne : $P(t_n) \# P_\ell + (P_e - P_\ell)\exp\left(-\frac{NV_2}{V_0}t_n\right)$.

Il apparait un temps caractéristique τ d'évolution de la pression :

$$\boxed{\tau = \frac{V_0}{NV_2}} \qquad \tau = 100 \text{ s.}$$

Le temps est très grand devant la durée Δt de chaque « cycle » puisque :

$$\frac{\Delta t}{\tau} = \frac{V_2}{V_0} = 10^{-3}.$$

On peut alors considérer que la pression P dans le réservoir évolue de façon quasi continue selon la loi :

$$\boxed{P(t) = P_\ell + (P_e - P_\ell)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$

2. c. On a établi au 1. que :

$$\delta P = P_{n+1} - P_n = P_n\left(\frac{V_0}{V_0 + V_2} - 1\right) + P_e\frac{V_1}{V_0 + V_2} = \frac{P_eV_1 - P_nV_2}{V_0 + V_2}$$

et $\frac{\delta P}{P_n} = \frac{1}{V_0 + V_2}\left[V_1\frac{P_e}{P_n} - V_2\right] \Rightarrow \left(-\frac{\delta P}{P_n}\right) = \frac{1}{V_0 + V_2}\left[V_2 - V_1\frac{P_e}{P_n}\right]$.

Ainsi, on a $\left(-\frac{\delta P}{P}\right)_n \leqslant \frac{1}{V_0 + V_2}(V_2 - V_1) \sim \frac{V_2}{V_0} \sim 10^{-3}$.

La quantité δP étant très faible devant P, on peut confondre la dérivée de P(t) avec le taux d'accroissement $\frac{\delta P}{\Delta t}$, ce qui donne :

$$\frac{dP}{dt} \# \frac{\delta P}{\Delta t} = \frac{N}{V_0 + V_2}(P_eV_1 - PV_2) \qquad \Delta t = \frac{1}{N}.$$

D'où l'équation différentielle : $\frac{dP}{dt} + \frac{NV_2}{V_0 + V_2}P = \frac{N}{V_0 + V_2}P_eV_1$.

Soit avec $\tau = \frac{1}{N}\frac{V_0 + V_2}{V_2} \approx \frac{V_0}{NV_2}$ et $P_\ell = P_e\frac{V_1}{V_2}$: $\tau\frac{dP}{dt} + P = P_\ell$.

d'où : $W_3 = -P_{n+1}V_2\int_{V_2}^{V''}\frac{dV}{V}$, et $W_3 = -P_{n+1}V_2\ln\frac{V''}{V_2}$.

Soit $$\boxed{W_3 = -P_{n+1}V_2\ln\left(\frac{P_{n+1}}{P_e}\right)}$$

• 4e phase :

L'air est refoulé à pression constante P_e,

d'où : $W_4 = -P_e(V_1 - V'')$

soit $W_4 = -P_eV_1 + P_0V''$

avec $P_eV'' = P_{n+1}V_2$

et : $$\boxed{W_4 = -P_eV_1 + P_{n+1}V_2}$$

Le travail total qu'il aura fallu fournir est :

$$W_T(n \to n+1) = W_1 + W_2 + W_3 + W_4$$

$$W_T(n \to n+1) = P_eV_1\ln\left(\frac{P_n}{P_e}\right) + (P_nV_0 + P_eV_1)\ln\left(\frac{P_{n+1}}{P_n}\right) - P_{n+1}V_2\ln\left(\frac{P_{n+1}}{P_e}\right) + P_{n+1}V_2 - P_eV_1$$

avec, de plus : $P_{n+1}(V_0 + V_2) = P_nV_0 + P_eV_1$ (4)

Ce qui peut encore s'écrire sous la forme suivante :

$$W_T(n \to n+1) = [P_eV_1 - (P_nV_0 + P_eV_1)]\ln\left(\frac{P_n}{P_e}\right) + [(P_nV_0 + P_eV_1) - P_{n+1}V_2]\ln\left(\frac{P_{n+1}}{P_e}\right) + [P_{n+1}V_2 - P_eV_1]$$

or d'après (4) : $P_nV_0 + P_eV_1 - P_{n+1}V_2 = P_{n+1}V_0$

et $P_{n+1}V_2 - P_eV_1 = V_0(P_n - P_{n+1})$.

D'où : $$\boxed{W_T(n \to n+1) = -P_nV_0\ln\left(\frac{P_n}{P_e}\right) + P_{n+1}V_0\ln\left(\frac{P_{n+1}}{P_e}\right) - V_0(P_{n+1} - P_n)}$$

Calculons maintenant le travail nécessaire pour atteindre la pression limite P_ℓ dans le réservoir :

$$W'_T = -V_0\sum_0^\infty(P_{n+1} - P_n) + \sum_0^\infty\left[V_0P_{n+1}\ln\left(\frac{P_{n+1}}{P_e}\right) - V_0P_n\ln\left(\frac{P_n}{P_e}\right)\right]$$

soit avec $P_0 = P_e$: $W'_T = -V_0(P_\ell - P_e) + V_0\left\{P_\ell\ln\left(\frac{P_\ell}{P_e}\right) - P_e\ln\left(\frac{P_e}{P_e}\right)\right\}$.

Finalement $$\boxed{W'_T = -V_0(P_\ell - P_e) + V_0P_\ell\ln\left(\frac{P_\ell}{P_e}\right)}$$

Application numérique : $W'_T = -1\cdot(10^3 - 10^5) + 1\cdot10^3\ln\left(\frac{10^3}{10^5}\right) \Rightarrow$ $\mathbf{W'_t = 94}$ **kJ.**

B. Bilans d'énergie

611 Équilibre mécanique – Équilibre thermique

Un cylindre, à parois thermiquement isolantes, est séparé en deux compartiments par un piston initialement bloqué. Ce piston est faiblement conducteur de l'énergie thermique et de capacité thermique négligeable. Dans l'état initial, le compartiment de gauche contient n_1 moles d'un gaz parfait dans les conditions P_1, V_1, T_1 et le compartiment de droite contient n_2 moles du même gaz parfait dans les conditions P_2, V_2, T_2.

1. On libère le piston, et l'équilibre mécanique s'établit rapidement entre les deux compartiments, avant réalisation de l'équilibre thermique. Calculer la pression P.

2. Montrer qu'ensuite l'équilibre thermique s'établit à pression constante. Calculer la température T d'équilibre. Quelle température d'équilibre aurait-on obtenu si le piston était resté bloqué dans sa position initiale ?

3. Comment sont modifiés les résultats précédents lorsque les deux gaz parfaits ne sont plus de même atomicité ?

1. Ce qu'il faut savoir

- Premier principe.
- Énergie interne d'un gaz parfait.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. Le système constitué des deux gaz et du piston est isolé de l'extérieur. L'état de départ est un état hors équilibre et le système finira par tendre vers un état d'équilibre correspondant nécessairement à :

– l'égalité des pressions (piston mobile) : $P'_1 = P'_2 = P$;

– l'égalité des températures (piston conducteur de l'énergie thermique) : $T'_1 = T'_2 = T$.

La conduction thermique du piston étant faible, on peut considérer que l'équilibre mécanique se fera avant l'équilibre thermique. On supposera donc qu'après une 1re phase, les pressions s'égalisent dans les deux compartiments sans pour autant que les températures des gaz soient identiques. Dans une 2e phase, le système évoluera pour atteindre également l'équilibre thermique tout en maintenant des pressions égales de part et d'autre du piston.

2. À la fin de la 1re phase, on a $P'_1 = P'_2 = P$ (pression calculée au **1.**).

Le système maintient ensuite $P'_1 = P'_2$. Cette valeur commune reste en fait constante car on s'est placé dans un cas particulier : même gaz parfait dans chaque compartiment (c'est-à-dire même capacité thermique à volume constant...).

3. La nouvelle pression commune P obtenue à la fin de la 1re phase évoluera en fonction des volumes V'_1 et V'_2 et donc des températures T'_1 et T'_2 jusqu'à une valeur finale P_f correspondant à la température T_f associée à l'équilibre thermique final.

3. Solution

1. Considérons le système correspondant au contenu du cylindre (gaz dans les deux compartiments plus piston). Appliquons-lui le premier principe entre l'état initial et un état intermédiaire pour lequel les températures sont T_1' et T_2' et l'équilibre mécanique réalisé (soit $P_1' = P_2' = P$). On supposera que l'on peut négliger l'énergie cinétique du piston ainsi que les variations éventuelles de son énergie interne (piston de capacité thermique négligeable...).

On a donc : $\Delta U = \Delta U(\text{gaz } ①) + \Delta U(\text{gaz } ②) = W + Q.$

Or le système évolue à volume total constant et $W = 0$.

D'autre part, les parois du cylindre sont adiabatiques : $Q = 0$.

On a donc : $\Delta U(\text{gaz } ①) + \Delta U(\text{gaz } ②) = 0 + 0 = 0 \quad (1)$

La variation d'énergie interne de n moles d'un gaz parfait s'écrit en introduisant la capacité thermique C_v à volume constant : $dU = nC_v dT$.

Et en prenant C_v = constante : $\Delta U = nC_v(T' - T) \quad (2)$

Soit ici d'après (1) et (2) : $n_1 C_{v_1}(T_1' - T_1) + n_2 C_{v_2}(T_2' - T_2) = 0 \quad (3)$

On a le même gaz parfait dans les deux compartiments, d'où avec $C_{v_1} = C_{v_2}$:

$$\boxed{n_1(T_1' - T_1) + n_2(T_2' - T_2) = 0} \quad (4)$$

Cette relation entre T_1' et T_2' reste valable, dans le cadre des hypothèses précisées plus haut, même si l'équilibre mécanique n'est pas atteint.

L'énoncé suppose maintenant que l'équilibre mécanique s'est établi ($P_1' = P_2' = P$) avec des températures des gaz différentes ($T_1' \neq T_2'$). La loi des gaz parfaits donne alors pour les deux compartiments :

$$PV_1' = n_1 RT_1' \quad (\text{avec } P_1V_1 = n_1RT_1)$$
$$PV_2' = n_2 RT_2' \quad (\text{avec } P_2V_2 = n_2RT_2).$$

De plus, la conservation du volume total s'écrit : $V_1' + V_2' = V_1 + V_2$.

Soit $\dfrac{R}{P}[n_1T_1' + n_2T_2'] = V_1 + V_2 \quad (5)$

Et avec (4) qui s'écrit $n_1T_1' + n_2T_2' = n_1T_1 + n_2T_2 = \dfrac{P_1V_1 + P_2V_2}{R}$.

(5) devient $\dfrac{R}{P} \cdot \dfrac{P_1V_1 + P_2V_2}{R} = V_1 + V_2$.

Finalement $$\boxed{P = \frac{P_1V_1 + P_2V_2}{V_1 + V_2}} \quad (6)$$

2. À partir du moment où il y a égalité des pressions de part et d'autre, le système ayant atteint l'équilibre mécanique (égalité des pressions) va également tendre vers l'équilibre thermique (égalité des températures). La relation définissant P est indépendante de T_1' et T_2'. Il en résulte que l'évolution vers l'équilibre thermique s'effectuera à pression constante (égale à P calculée au **1.**), les volumes évoluant en même temps que les températures :

$$\frac{V_1'}{T_1'} = n_1\frac{R}{P} = \text{constante} \qquad \frac{V_2'}{T_2'} = n_2\frac{R}{P} = \text{constante}.$$

ce qui donne, pour le travail W cherché :

$$W = -\int_{V_1}^{V_2} P_1 V_1^{\alpha} \cdot \frac{dV}{V^{\alpha}} = -P_1 V_1^{\alpha} \cdot \left[\frac{V^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_{V_1}^{V_2} = \frac{P_1 V_1^{\alpha}}{\alpha - 1}[V_2^{1-\alpha} - V_1^{1-\alpha}]$$

et en tenant compte de $P_1 V_1^{\alpha} = P_2 V_2^{\alpha}$:

$$\boxed{W = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{\alpha - 1}} \quad (1)$$

• D'autre part, d'après le premier principe appliqué au gaz : $\Delta U = Q + W$.

D'où $$Q = \Delta U - W \quad (2)$$

• Pour un gaz parfait $\Delta U = nC_v \Delta T = \frac{nR}{\gamma - 1}\Delta T$ et $\Delta(PV) = nR\Delta T$.

Donc $\Delta U = \frac{\Delta(PV)}{\gamma - 1}$.

On a donc pour la transformation considérée :

$$\Delta U = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{\gamma - 1} \quad (4)$$

Puis d'après (2) et avec (1) :

$$Q = (P_2 V_2 - P_1 V_1)\left(\frac{1}{\gamma - 1} - \frac{1}{\alpha - 1}\right)$$

et $$\boxed{Q = \frac{\alpha - \gamma}{(\gamma - 1)(\alpha - 1)} \cdot (P_2 V_2 - P_1 V_1)} \quad (5)$$

Soit le rapport $\frac{Q}{W}$:

$$\boxed{\frac{Q}{W} = \frac{\alpha - \gamma}{\gamma - 1}}$$

2. a. La transformation est adiabatique si $Q = 0$, c'est-à-dire pour :

$$\boxed{\alpha = \gamma}$$

Dans ce cas, on a PV^{γ} = constante, une relation connue sous le nom de loi de Laplace.

Commentaires

• Cette transformation est aussi une isentropique, puisque la fonction entropie du gaz parfait peut s'écrire :

$$S(P, V) = S_0 + nC_v \ln\left[\frac{P \cdot V^{\gamma}}{P_0 \cdot V_0^{\gamma}}\right].$$

Ce résultat est logique, car ici, le caractère quasi statique ($P_{ext} = P_{fluide}$) garantit la réversibilité mécanique pour le fluide (ici le gaz parfait) et la question de la réversibilité thermique ne se pose pas, puisqu'il n'y a pas de transfert d'énergie thermique.

• Ces transformations polytropiques sont souvent prises comme « modèle » pour représenter des transformations quasi statiques « pas tout à fait adiabatiques ».

613 Évolution d'un gaz réel

1. On considère un gaz non parfait d'équation d'état, pour une mole :

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

équation de Van der Waals dans laquelle $R = 8{,}31\ \text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ est la constante des gaz parfaits, et a et b deux constantes caractéristiques du gaz.

La fonction énergie interne est donnée, pour une mole, par :

$$U(T, V) = -\frac{a}{V} + f(T).$$

On donne :

gaz	$a(\text{J} \cdot \text{mol}^{-2} \cdot \text{m}^{-3})$	$b(\text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-1})$
CO_2	0,36	$4{,}3 \cdot 10^{-5}$
N_2	0,13	$3{,}8 \cdot 10^{-5}$
H_2	0,025	$2{,}7 \cdot 10^{-5}$

a. À quelle(s) condition(s) sur a et b le comportement d'un tel gaz se rapproche-t-il de celui d'un gaz parfait ? Commenter dans le cas où le gaz est le dioxyde de carbone avec les conditions $V = V_1 = 25 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3$ (pour une mole) et $P = P_1 = 10^5$ Pa.

b. Montrer que la capacité calorifique à volume constant C_v ne dépend que de la température T.

c. Donner la relation liant C_v et C_p (capacité calorifique molaire à pression constante) en fonction de $\frac{b}{V}$, R, T et $T_i = \frac{2a}{Rb}\left(1 - \frac{b}{V}\right)^2$.

Faire l'application numérique pour N_2 et H_2 avec $T = 290$ K et $V = 22{,}4 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$.

2. On fait subir à une mole de CO_2 une compression isotherme réversible depuis l'état (P_1, V_1) jusqu'à un volume final $V_2 = \frac{V_1}{10}$. Calculer les transferts de travail W et d'énergie thermique occasionnés par cette transformation.

Comparer aux valeurs obtenues dans l'hypothèse d'un gaz parfait. Commenter.

3. Le gaz (ici N_2 ou H_2) s'écoule très lentement dans une canalisation horizontale calorifugée. Il y subit une détente de Joule-Kelvin (présence d'un étranglement ... en un « point » de la canalisation). Rappeler les caractéristiques d'une telle détente.

On définit le coefficient $\eta = \left.\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H$ où H désigne l'enthalpie. Les calculs donnent :

$$\eta = -\frac{b}{C_p} \frac{T - T_i}{T - \frac{b}{V}T_i}.$$

Préciser le rôle de la température T_i appelée température d'inversion.

Calculer T_i pour le diazote N_2 et le dihydrogène H_2. $V = 22{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$.

Commenter les résultats obtenus.

soit
$$\boxed{W = RT\ln\left[\frac{V_1 - b}{V_2 - b}\right] - a\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right)}$$

expression dans laquelle RT s'exprime à partir de l'équation d'état…

Pour calculer le transfert thermique Q, exprimons le premier principe :

$$\Delta U = U(T, V_2) - U(T, V_1) = W + Q$$

soit
$$Q = \Delta U - W = -\frac{a}{V_2} + \frac{a}{V_1} - W$$

et
$$\boxed{Q = -RT\ln\left[\frac{V_1 - b}{V_2 - b}\right]}$$

Commentaire

On a $\Delta U = a\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right) < 0$ ce qui correspond à une diminution de l'énergie potentielle des forces d'interaction de Van der Waals (la compression a eu pour effet de diminuer les distances moyennes interparticules…), l'énergie cinétique moyenne étant invariable (la température étant fixée).

Application numérique : on a : $T = \frac{1}{R}\left(P_1 + \frac{a}{V_1^2}\right)(V_1 - b) \Rightarrow$ **$T = 302$ K.**

$$Q = -5{,}82 \text{ kJ} \quad \text{et} \quad W = 5{,}69 \text{ kJ}.$$

Pour un gaz parfait, les résultats sont ceux que l'on obtient en faisant $a = b = 0$ dans les expressions précédentes :

$$\Delta U_{GP} = 0 \quad \text{(prévisible !)}$$

$$Q_{GP} = -W_{GP} = -RT'\ln\frac{V_1}{V_2} = -P_1V_1\ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$$

car la température a une valeur différente à P_1 et V_1 fixés.

Numériquement $\begin{cases} T' = 301 \text{ K} \# T \\ Q_{GP} = -W_{GP} = -5{,}76 \text{ kJ}, \end{cases}$

résultats du même ordre de grandeur pour les valeurs de W et Q (écart de l'ordre de 1 %…).

Par contre, l'écart sur les pressions finales n'est pas nécessairement négligeable !

On peut le vérifier facilement, en comparant P_2 et P'_2.

$$P_2 = \frac{RT}{V_2 - b} - \frac{a}{V_2^2} = 9{,}64 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$P'_2 = \frac{RT'}{V_2} = P_1\frac{V_1}{V_2} = 10^6 \text{ Pa}$$

l'écart est notable (~ 4 %), mais a peu d'effet sur le résultat de l'intégrale donnant W…

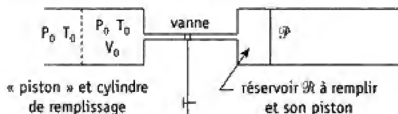
614 Remplissage d'un réservoir

On considère l'atmosphère comme un réservoir infini d'air à la pression $P_0 = 1{,}0$ atm et à la température $T_0 = 300$ K, supposées constantes. L'air est assimilé à un gaz parfait de masse molaire $M = 29\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$ et de coefficient $\gamma = 1{,}4$.

On désire étudier différentes opérations de remplissage d'un réservoir $\mathcal{R}$. Ce dernier a un volume V fixe, une section S et une longueur l.

Il est muni d'un piston $\mathcal{P}$, mobile sans frottement, de masse négligeable. Une vanne permet de mettre ce réservoir en communication avec l'atmosphère ; elle possède une ouverture assez petite pour que l'air pénètre très lentement dans $\mathcal{R}$. Le remplissage se termine lorsque l'air est à la pression P_0 dans $\mathcal{R}$.

De façon à modéliser simplement l'opération de remplissage, on propose le schéma suivant :



Le système (P_0, V_0, T_0) représente l'air qui aura pénétré dans $\mathcal{R}$ à la fin de l'opération, où il se trouvera dans tous les cas à la pression finale P_0.

$V = 10$ L ; $S = 100\ \text{cm}^2$; $l = 1$ m.

1. On étudie trois opérations partant de conditions initiales différentes. Dans cette question, le cylindre $\mathcal{R}$ et son piston sont adiabatiques.

a.



Déterminer T.

b.



Déterminer T_1 et T_2.

c.



Le ressort a une longueur à vide l et une raideur k telle que $P_0 \cdot S = \dfrac{kl}{2}$.

Déterminer T", le ressort étant comprimé à mi-longueur dans l'état final.

2. Dans la réalité, l'hypothèse adiabatique pour le cylindre et le piston n'est réaliste que peu de temps après la fin de l'opération.

On considère donc qu'après avoir atteint les états précédents, le gaz qui a pénétré dans $\mathcal{R}$ se retrouve au bout d'un certain temps à la température T_0 de l'atmosphère.

Exprimer et calculer les quantités de chaleur Q_1, Q_2 et Q_3 que le gaz échangera au cours de cette phase, dans les trois cas étudiés précédemment, la vanne étant restée ouverte.

3. Dans cette question, on ne suppose plus que l'ouverture de la vanne est petite. De ce fait, l'air pénètre de façon brutale dans $\mathcal{R}$ au cours du remplissage.

Indiquer dans quel(s) cas il y a modification de la valeur (ou des valeurs) de la température atteinte en fin de remplissage.

1. Ce qu'il faut savoir

- Premier principe.
- Loi de Laplace.

2. Ce qu'il faut comprendre

- Dans les questions **1.** et **2.**, l'air rentre lentement dans le réservoir. Les transformations du gaz sont quasi statiques. Ce n'est plus le cas dans la question **3.**
- On définira soigneusement le système étudié : les n moles d'air qui pénètrent dans le réservoir et les transformations subies.

3. Solution

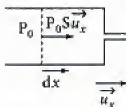
1. a. Les n moles de gaz qui rentrent dans le réservoir subissent une transformation quasi statique adiabatique.

Avant d'entrer dans $\mathcal{R}$, elles occupent un volume V_0 à la pression P_0 et la température T_0.

La loi des gaz parfaits s'écrit $P_0V_0 = nRT_0$. Une fois dans $\mathcal{R}$, elles occupent un volume V toujours à la pression P_0 et à la température T. On a de même $P_0V = nRT$.

Écrivons le 1[er] principe : $\Delta U = W + Q$.

La transformation est adiabatique $Q = 0$. Calculons W.



Le gaz est soumis à la force pressante $P_0S\vec{u}_x$ qui lui fournit dans le déplacement $dx\vec{u}_x$ le travail élémentaire :

$\delta W = P_0Sdx = P_0dV$.

Le travail fourni au gaz s'obtient en intégrant dV sur le volume V_0 « bloqué par le piston » $W = P_0V_0$.

> **POINT MÉTHODE**
>
> Dans le premier principe, W représente le travail reçu par le gaz au niveau des surfaces mobiles. Une étude mécanique du problème remplace avantageusement des formules toutes faites.

D'après la 1[re] loi de Joule, $\Delta U = nC_v(T - T_0)$.

On a donc : $nC_v(T - T_0) = P_0V_0 = nRT_0$

$$T = \frac{T_0(C_v + R)}{C_v} = T_0\frac{C_p}{C_v} \qquad \boxed{T = T_0\gamma}$$

Application numérique : T = 420 K.

1. b. Soit n_2 le nombre de moles de gaz contenues dans le compartiment de droite, n_1 le nombre de moles de gaz qui vont entrer dans le compartiment de gauche. On a :

• avant le remplissage : $\frac{P_0}{2}V = n_2RT_0$ et $P_0V_0 = n_1RT_0$;

• après le remplissage (même pression P_0) :

$$P_0V_2 = n_2RT_2 \quad \text{et} \quad P_0V_1 = n_1RT_1$$

avec $V_1 + V_2 = V$.

Le 1er principe nous donne toujours : $\Delta U = W + Q = W = P_0V_0$ (1)

> POINT COURS
>
> **L'énergie interne est une fonction extensive pour les systèmes usuels.**
>
> **L'énergie interne d'un système composé de deux sous-systèmes est égale à la somme des énergies internes respectives des deux sous-systèmes.**

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = n_1C_v(T_1 - T_0) + n_2C_v(T_2 - T_0)$$

$$\Delta U = \frac{1}{\gamma - 1}(P_0V_1 - P_0V_0) + \frac{1}{\gamma - 1}\left(P_0V_2 - \frac{P_0V}{2}\right) \quad (2)$$

de (1) et (2), on tire $V_0 = \frac{V}{2\gamma}$ (3)

Appliquons la loi de Laplace aux n_2 moles de gaz dans le compartiment de droite.

$$\frac{P_0}{2}V^\gamma = P_0V_2^\gamma \quad \text{d'où} \quad V_2 = V\left(\frac{1}{2}\right)^{1/\gamma} = 0{,}61V$$

$$\text{et} \quad V_1 = 0{,}39V$$

$$\text{donc} \quad T_2 = \frac{P_0V_2}{n_2R} = \frac{P_0V_2}{\frac{P_0}{2}\frac{V}{T_0}} = \frac{2V_2}{V}T_0 \qquad \boxed{T_2 = T_0 2^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

Application numérique : T_2 = 365,7 K.

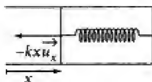
$$\text{De même} \quad T_1 = \frac{P_0V_1}{n_1R} = \frac{P_0V_1}{P_0V_0}T_0 = T_0\left(\frac{V_1}{V_0}\right) = 2\gamma T_0\frac{V_1}{V}$$

$$\boxed{T_1 = 2\gamma T_0\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{1/\gamma}\right)}$$

Application numérique : T_1 = 328 K.

1. c. Appliquons à nouveau le premier principe aux n moles de gaz entrant dans $\mathcal{R}$:

$$\Delta U = W + Q = W \quad \text{(transformation adiabatique)}.$$



Au travail précédent, s'ajoute le travail de la force élastique exercée par le ressort qui fournit un travail élémentaire $\delta W' = -kx\mathrm{d}x$.

Le ressort étant comprimé à mi-longueur, $W' = -\frac{1}{2}k\frac{l^2}{4}$.

Commentaire

Le gaz est poussé à gauche par l'atmosphère et reçoit donc le travail P_0V_0. À droite, il comprime le ressort, le travail W' est donc donné à l'extérieur ($W' < 0$).

On a ainsi $$\Delta U = P_0V_0 - \frac{1}{2}k\frac{l^2}{4}$$

avec $P_0S = k\frac{l}{2}$ et $V = lS$.

$$\Delta U = P_0V_0 - \frac{P_0V}{4} \quad (4)$$

Et d'après la 1re loi de Joule :

$$\Delta U = nC_v(T'' - T_0) \quad (5)$$

Avant le remplissage, on a toujours $P_0V_0 = nRT_0$.

Après le remplissage, $P_0\frac{V}{2} = nRT''$

en reportant dans (4), il vient :

$$\Delta U = nR\left(T_0 - \frac{T''}{2}\right).$$

D'où d'après (5) :

$$nR\left(T_0 - \frac{T''}{2}\right) = \frac{nR}{\gamma - 1}(T'' - T_0)$$

et donc $$\boxed{T'' = \frac{2\gamma}{\gamma + 1}T_0}$$

Application numérique : $T'' = 350$ K.

2. a. Les transformations ne sont plus adiabatiques. Par contre, tous les refroidissements se font à pression extérieure constante P_0.

POINT COURS

Pour un système en équilibre mécanique avec l'extérieur dans l'état initial et l'état final, subissant une transformation à pression extérieure constante (transformation dite monobare) $Q = \Delta H$.

$$Q_1 = \Delta H_1 = nC_p(T_0 - T) = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{P_0V}{T}(T_0 - T)$$

$$Q_1 = \frac{\gamma}{\gamma-1}P_0V\left(\frac{T_0}{T}-1\right) = \frac{\gamma}{\gamma-1}P_0V\left(\frac{1}{\gamma}-1\right) \quad \left(\frac{T_0}{T}=\frac{1}{\gamma}\right)$$

$$\boxed{Q_1 = -P_0V}$$

Application numérique : $Q_1 = -10^3$ J.

2. b. $Q_2 = \Delta H_1 + \Delta H_2 = n_1C_p(T_0 - T_1) + n_2C_p(T_0 - T_2)$

$$= C_p[(n_1 + n_2)T_0 - n_1T_1 - n_2T_2].$$

D'après l'expression (2) $(n_1 + n_2)T_0 - n_1T_1 - n_2T_0 = -\dfrac{\Delta U}{C_v}$

$$Q_2 = -\frac{C_p}{C_v}\Delta U = -\gamma\Delta U = -\gamma P_0V_0 \text{ d'après (1)}$$

$$\boxed{Q_2 = -\frac{P_0V}{2}} \text{ d'après (3)}$$

Application numérique : $Q_2 = -500$ J.

2. c. L'état mécanique du système n'est pas modifié.

$$Q_3 = \Delta H_3 = nC_p(T_0 - T'') = \frac{P_0V}{2RT''}C_p(T_0 - T'')$$

$$Q_3 = \frac{P_0V}{2}\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{T_0}{T''}-1\right) = \frac{P_0V}{2}\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{\gamma+1}{2\gamma}-1\right)$$

$$\boxed{Q_3 = -\frac{P_0V}{4}}$$

Application numérique : $Q_3 = -250$ J.

Commentaire

- Dans la réalité, l'équilibre mécanique s'établit beaucoup plus rapidement que l'équilibre thermique, ce qui justifie les modèles proposés en 1. puis en 2.
- Le système considéré reste, dans chaque cas, l'air présent au début du refroidissement dans le réservoir. Du fait de ce refroidissement, un peu de gaz pénètre alors dans le réservoir, mais il se retrouve à la fin dans les conditions (T_0, P_0), il n'intervient donc pas dans le bilan énergétique…

3. Le caractère quasi statique de l'opération de remplissage n'a été utilisé que dans le cas b. : sans cette hypothèse, la fin du calcul n'est pas possible et on ne peut pas calculer T_1 et T_2. On sait seulement que :

$$W = P_0V_0 = \Delta U = n_1C_v(T_1 - T_0) + n_2C_v(T_2 - T_0).$$

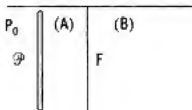
On a toujours $V_0 = \dfrac{V}{2\gamma}$ (3). Il vient finalement

$$\boxed{\gamma T_2 + T_1 = 2\gamma T_0}$$

relation vérifiée bien sûr par les valeurs T_1 et T_2 trouvées au 1.b.

615 Détente irréversible d'un gaz parfait

Un cylindre horizontal est fermé par un piston $\mathcal{P}$ mobile sans frottements. L'intérieur du cylindre est séparé en deux compartiments A et B par une paroi fixe F. Sur la face extérieure du piston, s'exerce la pression atmosphérique constante $P_0 = 10^5$ Pa. Les parois du cylindre et le piston sont adiabatiques, mais la cloison F est diathermane.



Toutes ces parois sont de capacité thermique négligeable.

À l'état initial, le compartiment A contient une mole de gaz parfait caractérisé par la valeur $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1{,}4$, occupant un volume $V_A = 25$ L. Le compartiment B est vide.

Constante des gaz parfaits : $R = 8{,}31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

1. Préciser la température T_A du gaz dans A.

2. On perce un orifice dans la paroi fixe F.

a. Par une analyse qualitative du problème, montrer que selon la valeur du volume V_B de B, deux types de solution existent.

b. En supposant que V_B est inférieur à la valeur-seuil V_s (inconnue pour l'instant...), déterminer les caractéristiques P_1, V_1, T_1 du gaz contenu dans A + B quand le nouvel état d'équilibre est atteint. Application numérique : $V_B = 25$ L.

c. Déterminer la valeur-seuil V_s en fonction de V_A et γ.

d. Pour $V_B > V_s$, déterminer P_2, V_2, T_2 du gaz enfermé dans le cylindre lorsque l'état d'équilibre est atteint. Application numérique : $V_B = 50$ L.

3. Quels commentaires peut-on faire sur la nature de la transformation ?

Solution

1. L'équation du gaz parfait s'écrit, pour la mole de gaz initialement contenue dans A :

$$PV = RT \quad \text{soit} \quad T_A = \frac{P_0 V_A}{R} = 301 \text{ K}.$$

2. a. Le gaz va passer du compartiment A vers le compartiment B ce qui va provoquer le déplacement du piston. La fin de cette transformation sera atteinte :

- soit parce que la pression dans B atteint la valeur P_0, ce qui réalise l'équilibre mécanique ;
- soit parce que le piston $\mathcal{P}$ vient buter sur la cloison fixe F, tout le gaz de A étant passé dans B.

Il est évident que la seconde possibilité ne peut se réaliser que pour un volume du compartiment B suffisamment grand, soit $V_B > V_s$, valeur-seuil qui reste à déterminer...

2. b. Dans ce cas, d'après ce qui précède, à l'équilibre, on a :

$$P_A = P_B = P_0 \quad \text{soit} \quad \boxed{P_1 = P_0}$$

et $V_1 = V_B + V'_A$ (V'_A volume du gaz restant en A) avec $P_1 V_1 = RT_1$.

D'autre part, considérons le système constitué par les compartiments A et B et leur contenu, et appliquons-lui le premier principe :

$$\Delta U_{syst} = W + Q \quad (1)$$

avec $\Delta U_{syst} = \Delta U_{gaz} + \Delta U_{parois} = \Delta U_{gaz}$,

car les parois – par hypothèse – n'absorbent pas d'énergie (parois adiabatiques, et cloison F de capacité thermique négligeable).

D'où $\Delta U_{gaz} = C_v(T_1 - T_A)$.

D'autre part $Q = 0$ (parois adiabatiques) (2)

Et $W = -\int P_{ext}dV = -P_0\Delta V$ (puisque $P_{ext} = P_0$).

ΔV représentant le volume balayé par le piston mobile :

$$\Delta V = V_A' - V_A = (V_1 - V_B) - V_A = V_1 - (V_A + V_B),$$

soit $W = -P_0[V_1 - V_A - V_B]$ (3)

(1) donne alors avec (2) et (3) : $C_v(T_1 - T_A) = -P_0V_1 + P_0(V_A + V_B)$.

Or $P_1V_1 = RT_1$ et $P_0V_A = RT_A$, soit :

$$\frac{C_v}{R}(P_1V_1 - P_0V_A) = -P_0V_1 + P_0(V_A + V_B).$$

Soit en tenant compte de $P_1 = P_0$ et $\frac{C_v}{R} = \frac{1}{\gamma - 1}$

$$V_1 - V_A = (\gamma - 1)\cdot[-V_1 + V_A + V_B] \Rightarrow \gamma V_1 = \gamma V_A + (\gamma - 1)V_B.$$

D'où : $\boxed{V_1 = V_A + \frac{\gamma - 1}{\gamma}V_B}$

Il lui correspond une température T_1 définie par $P_1V_1 = RT_1$ avec $P_1 = P_0$.

$$\boxed{T_1 = \frac{P_0}{R}\left[V_A + \frac{\gamma - 1}{\gamma}V_B\right]}$$

Application numérique : $V_1 = 25 + \frac{0{,}4}{1{,}4}\cdot 25 \Rightarrow V_1 \doteq 32{,}1$ L

$$T_1 = 387 \text{ K}.$$

2. c. La solution ci-dessus reste valable tant qu'il reste du gaz dans le compartiment A.

C'est-à-dire tant que : $V_A' > 0$, soit $V_1 > V_B$,

et, en remplaçant V_1 par son expression : $V_B < V_A + \frac{\gamma - 1}{\gamma}V_B$

$$V_B < \gamma V_A$$

la valeur-seuil de V_B est donc $\boxed{V_s = \gamma V_A}$

2. d. Dans ce cas, tout le gaz passe de A dans B, et $\boxed{V_2 = V_B}$

avec $P_2 \leqslant P_0$ et $P_2V_2 = RT_2$,

et le travail W reçu par le gaz a pour expression :

$$W = -P_0\Delta V = -P_0(-V_A) = +P_0V_A.$$

d'où :

$$\boxed{V_2 = \frac{RT_0}{P_0} \cdot \left(\frac{P_0}{P}\right)^{\frac{1}{\gamma}}}$$

numériquement :

$$V_2 = 24{,}1 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1,4}}$$

$$\mathbf{V_2 \# 14{,}7 \cdot 10^{-3}\ m^3.}$$

On en déduit la température T_2 de ce gaz :

$$T_2 = \frac{PV_2}{R} = \frac{P}{P_0} \cdot T_0 \cdot \left(\frac{P_0}{P}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$T_2 = T_0 \cdot \left(\frac{P}{P_0}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}$$

soit $\mathbf{T_2 \# 353\ K}$

et le volume V_1 du gaz ①: $V_1 = 2V_0 - V_2$

$$V_1 = \frac{RT_0}{P_0}\left[2 - \left(\frac{P_0}{P}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right]$$

$$\mathbf{V_1 \# 33{,}5 \cdot 10^{-3}\ m^3.}$$

On en déduit la température T_1 de ce gaz :

$$T_1 = \frac{PV_1}{R}$$

$$T_1 = T_0 \cdot \frac{P}{P_0}\left[2 - \left(\frac{P_0}{P}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right]$$

soit $\mathbf{T_1 \# 806\ K.}$

1. b. • Appliquons d'abord le premier principe à **l'ensemble des deux gaz** : le volume est constant, donc $W = 0$, et le système reçoit par l'intermédiaire de la résistance chauffante une énergie thermique Q.

D'où $\Delta U_{syst} = \Delta U_1 + \Delta U_2 = 0 + Q$

soit $Q = C_v(T_1 - T_0) + C_v(T_2 - T_0)$

or $PV_1 = RT_1$, $PV_2 = RT_2$ et $P_0V_0 = RT_0$, d'où :

$$Q = \frac{C_v}{R}[P(V_1 + V_2) - 2P_0V_0]$$

et avec $C_v = \frac{R}{\gamma - 1}$ et $V_1 + V_2 = 2V_0$:

$$Q = \frac{2V_0}{\gamma - 1}(P - P_0) \Rightarrow \boxed{Q = \frac{2RT_0}{\gamma - 1}\left(\frac{P}{P_0} - 1\right)}$$

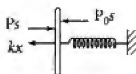
Application numérique : $P = 2P_0$ donne $Q = \frac{2RT_0}{\gamma - 1} \Rightarrow Q \# 12{,}0$ **kJ.**

• Calculons maintenant le travail W reçu par le gaz ②. Le premier principe appliqué au seul gaz ② qui subit une compression adiabatique donne :

$$\Delta U_2 = W \Rightarrow W = C_v(T_2 - T_0) = \frac{R}{\gamma - 1}(T_2 - T_0).$$

D'où
$$W = \frac{RT_0}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{P}{P_0}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} - 1\right].$$

Application numérique : $P = 2P_0$ et $W = 1{,}32$ kJ.

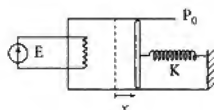


ressort contracté de $x > 0$

2. a. Le chauffage du gaz est quasi statique : le piston, sans frottement, est donc constamment en quasi-équilibre, ce qui se traduit par un bilan nul des forces qu'il subit :

$$Ps - P_0s - kx = 0$$

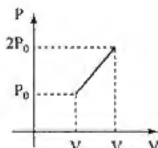
en notant x le déplacement du piston depuis sa position initiale (le ressort a au départ sa longueur au repos puisque $P_1 = P_0$). D'autre part, le volume est devenu :



$$V = V_0 + sx,$$

soit $P = P_0 + \frac{k}{s}x = P_0 + \frac{k}{s} \cdot \frac{V - V_0}{s}.$

La pression varie selon une fonction affine de V, ce qui se traduit par un trajet rectiligne en diagramme P(V).



La valeur de la raideur k du ressort « fixe » la pente de la droite représentative de la transformation : plus la raideur k est élevée et plus on se rapproche d'un chauffage à volume constant.

À l'état final, $P = 2P_0$ soit $x = x_F = \frac{s}{k}(P - P_0) = \frac{s}{k}P_0$.

D'où le volume final $\boxed{V_F = V_0 + \frac{s^2P_0}{k}}$

Et une température finale T_F telle que, loi des gaz parfaits :

$$(2P_0)V_F = RT_F \Rightarrow T_F = \frac{2P_0}{R}\left(V_0 + \frac{s^2P_0}{k}\right),$$

or $P_0V_0 = RT_0$, d'où :

$$\boxed{T_F = 2T_0 + \frac{2s^2P_0^2}{Rk}}$$

Application numérique : $x_F = 0{,}2$ m ; $V_F = 34{,}1 \cdot 10^{-3}$ m^3 et $T_F = 821$ K.

2. b. Le travail mécanique W_1, algébriquement reçu par le gaz au cours du chauffage (transformation quasi statique) est donné par :

$$W_1 = -\int_{V_0}^{V_F} PdV$$

$$W_1 = -\int_0^{x_F}\left(P_0 + \frac{k}{s}x\right)sdx$$

$$W_1 = -\int_0^{x_F} P_0 s dx - \int_0^{x_F} kx dx$$

soit

$$W_1 = -P_0 s x_F - k\frac{x_F^2}{2}.$$

Le premier terme correspond au travail dépensé contre l'air atmosphérique, et le second au travail de compression du ressort.

En remplaçant x_F par sa valeur $x_F = \frac{sP_0}{k}$

$$W_1 = -\frac{s^2P_0^2}{k} - \frac{s^2P_0^2}{2k}$$

$$\boxed{W_1 = -\frac{3}{2}\cdot\frac{s^2P_0^2}{k}}$$

et l'énergie absorbée par le ressort :

$$\boxed{W_{ressort} = \frac{s^2P_0^2}{2k}}$$

$$W_{ressort} = 500 \text{ J}.$$

Le premier principe appliqué au gaz donne alors :

$$Q_1 = \Delta U_{gaz} - W_1$$

soit
$$Q_1 = \frac{1}{\gamma - 1}(PV - P_0V_0) - W_1$$

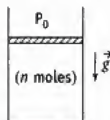
$$Q_1 = \frac{1}{\gamma - 1}\left[2P_0\left(V_0 + \frac{s^2P_0}{k}\right) - P_0V_0\right] + \frac{3}{2}\cdot\frac{s^2P_0^2}{k}$$

et finalement

$$\boxed{Q_1 = \frac{RT_0}{\gamma - 1} + \frac{s^2P_0^2}{k}\left(\frac{2}{\gamma - 1} + \frac{3}{2}\right)}$$

$$Q_1 = 12{,}5 \text{ kJ}.$$

621 Compression d'un gaz parfait



Un cylindre vertical à parois diathermanes est fermé par un piston de masse m et de surface s (section du cylindre). Il renferme n moles d'un gaz parfait diatomique dont on donne le coefficient $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ (γ est une constante).

Initialement, le piston est bloqué et le gaz est en équilibre dans l'état (P_0, V_0, T_0). Le système est thermostaté à T_0.

Pour les applications numériques, on prendra : $n = 0{,}5$ mol ; $T_0 = 290$ K ; $P_0 = 10^5$ Pa ; $\gamma = \frac{7}{5}$; $R = 8{,}31 \cdot J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$ (constante des gaz parfaits) ; $\frac{mg}{s} = xP_0$ avec $x = 0{,}5$.

1. On libère brutalement le piston qui devient mobile sans aucun frottement, déterminer :

a. l'état final ; **b.** les échanges énergétiques ; **c.** la création d'entropie.

2. On libère le piston tout en assurant une descente infiniment lente.

a. Reprendre les questions précédentes.

b. Quelle relation existe-t-il entre les travaux reçus par le gaz dans les deux cas et la création d'entropie calculée au **1.a.** ?

1. Ce qu'il faut savoir

- Premier principe – second principe.
- Réversibilité – irréversibilité.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. Cette première transformation est irréversible. Le système va tendre vers un état d'équilibre (on peut supposer par exemple que des phénomènes tels que la viscosité du gaz sont à l'origine de l'amortissement nécessaire pour atteindre cet équilibre). Cet équilibre thermodynamique se traduira par un équilibre thermique (système en relation avec un thermostat) et un équilibre mécanique.

La création d'entropie s'obtient à l'aide du second principe appliqué au gaz : il faudra vérifier que la quantité obtenue est bien positive.

2. Cette fois-ci, à chaque instant, la pression du gaz est égale à la « pression extérieure » et sa température reste égale à T_0 (la transformation devient réversible). L'état final est évidemment le même (l'opérateur n'exerce aucune action dans l'état final).

De plus, la transformation étant réversible il n'y a pas de création d'entropie.

3. Solution

1. a. Supposons que le système ait atteint sa position d'équilibre. Dans cet état, la température est imposée par le thermostat ; elle vaut donc T_0.

La condition d'équilibre mécanique (absence de frottements solides au niveau du piston) implique :

$$P_F = P_0 + \frac{mg}{s} \quad \text{soit} \quad \boxed{P_F = P_0(1+x)}$$

Soit un volume V_F tel que (loi des gaz parfaits) :

$$P_F V_F = nRT_F \Rightarrow V_F = \frac{nRT_0}{P_F} \qquad (T_F = T_0).$$

D'où : $\boxed{V_F = \frac{nRT_0}{P_0(1+x)}}$ (ou encore $V_F = \frac{V_0}{1+x}$).

Application numérique : $P_F = 10^5(1+0{,}5)$ soit : $\mathbf{P_F = 1{,}5 \cdot 10^5}$ **Pa.**

$V_F = \frac{0{,}5 \times 8{,}31 \times 290}{10^5 \times 1{,}5}$ soit : $\mathbf{V_F = 8{,}0}$ **dm³.**

1. b. Dans une transformation irréversible, le travail élémentaire fourni par l'extérieur s'exprime sous la forme : $\delta W = -P_{ext}\,dV$.

Soit au total : $W = -\int_{V_0}^{V_F} P_{ext} \cdot dV$.

Ici, $P_{ext} = P_0 + \frac{mg}{s}$.

Le travail reçu par le gaz seul est tel que :

$$W = -\left(P_0 + \frac{mg}{s}\right)(V_F - V_0) = -P_0(1+x)\left[\frac{V_0}{1+x} - V_0\right]$$

$$W = +P_0V_0x \Rightarrow \boxed{W = nRT_0x}$$

Application numérique : **W = 602 J.**

Le thermostat lui fournit une énergie thermique Q. Le premier principe appliqué au gaz s'écrit : $\Delta U = W + Q$.

Le gaz étant parfait, son énergie interne ne dépend que de sa température ce qui implique ici $\Delta U = 0 (T_F = T_1 = T_0)$.

D'où : $Q = -W$ et $\boxed{Q = -nRT_0x}$ **Q = −601 J.**

1. c. Pour déterminer la création d'entropie, on est amené à faire un bilan d'entropie.

$$\Delta S_{gaz} = S_e + \sigma,$$

avec S_e l'entropie échangée avec le thermostat à la température T_0.

Or $\quad \Delta S_{gaz} = nC_v \ln\left(\frac{P_F V_F^\gamma}{P_1 V_1^\gamma}\right)$. Soit ici : $\Delta S_{gaz} = nC_v \ln\left[(1+x)\left(\frac{1}{1+x}\right)^\gamma\right]$.

D'où $\quad \Delta S_{gaz} = \frac{nR}{\gamma - 1}\ln((1+x)^{1-\gamma}) \Rightarrow \Delta S_{gaz} = -nR\ln(1+x)$.

On passe du même état initial (P_0, V_0, T_0) au même état final $\left[P_0(1+x), \frac{V_0}{1+x}, T_0\right]$ par deux transformations différentes :

– la première est irréversible et monotherme : il faut fournir un travail irréversible $W = W_{irr}$;

– la seconde est réversible et isotherme, le travail nécessaire est $W' = W_{rev}$.

La relation (1) se réécrit :

$$\boxed{W_{irr}(I \to F) - W_{rev}(I \to F) = T_0\sigma(I \to F/irr)} \quad T_I = T_F = T_0.$$

Commentaires

Pour la transformation du 1. on a :

$\Delta U = 0$ (transformation monotherme + gaz parfait)

d'où $W_{irr} + Q_{irr} = 0$ avec $\Delta S_{gaz} = \frac{Q_{irr}}{T_0} + \sigma$ soit $W_{irr} = -T_0\Delta S_{gaz} + T_0\sigma$ (2)

Pour la transformation du 2. :

$\Delta U = 0$ et $W_{rev} + Q_{rev} = 0$ avec $\Delta S'_{gaz} = \frac{Q_{rev}}{T_0} + 0$

d'où $W_{rev} = -T_0\Delta S'_{gaz}$ (3)

Les équations (2) et (3) donnent alors : $W_{irr} - W_{rev} = T_0[\Delta S'_{gaz} - \Delta S_{gaz}] + T_0\sigma$.

Dans les deux cas, les états initial et final sont identiques donc le gaz subit la même variation d'entropie : $\Delta S'_{gaz} = \Delta S_{gaz}$. Ce qui conduit à la relation cherchée :

$$\boxed{W_{irr} - W_{rev} = T_0\sigma}$$

622 Solides en contact thermique

1. Deux corps $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, de températures initiales T_{1_0} et T_{2_0} et de capacités thermiques constantes C_1 et C_2, sont mis en contact.

Ils forment un système isolé et leurs volumes sont invariables.

On note $T_0 = \frac{C_1T_{1_0} + C_2T_{2_0}}{C_1 + C_2}$ (prendre $T_{2_0} > T_{1_0}$).

Déterminer la température finale T_f du système et sa variation d'entropie ΔS. Commenter ce dernier résultat.

2. Partant du même état initial, on suppose désormais que les échanges thermiques s'effectuent par l'intermédiaire d'un solide de capacité thermique négligeable et de conductivité thermique suffisamment faible.

a. Les résultats précédents sont-ils modifiés ? Commenter.

Déterminer l'évolution des températures $T_1(t)$ et $T_2(t)$ dans l'hypothèse où la puissance thermique échangée de $\mathscr{C}_2$ vers $\mathscr{C}_1$ est donnée par l'expression :

$P_{th}(2 \to 1) = h(T_2 - T_1)$. On mettra en évidence une constante de temps τ que l'on exprimera en fonction de h, C_1 et C_2.

b. Déterminer, en fonction de h, T_1, T_2 le taux de création d'entropie $\frac{\delta\sigma}{dt}$. Commenter.

1. Ce qu'il faut savoir

- Premier principe.
- Second principe ; création d'entropie.
- Transformation quasi statique ; transformation réversible.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. L'ensemble $\{\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2\}$ étant isolé, les échanges thermiques sont internes à ce système. Les températures vont évoluer jusqu'à l'équilibre thermique ($T_{1F} = T_{2F} = T_F$) à énergie interne constante. D'autre part, la variation d'entropie est la somme de celles des deux corps (extensivité) : elle doit être positive (transformation irréversible d'un système thermiquement isolé).

2. L'état final ne sera pas modifié (on a toujours $\Delta U = 0$) pas plus que ΔS (S fonction d'état : même état initial et même état final). La transformation « infiniment » lente est devenue quasi statique tout en restant irréversible.

3. Solution

1. Le système des deux corps $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ est isolé thermiquement et n'échange aucun travail avec l'extérieur (volumes supposés invariables).

Son énergie interne est donc invariable : $U_F = U_I$.

Soit encore $\Delta U(\mathscr{C}_1) + \Delta U(\mathscr{C}_2) = 0$.

Or l'équilibre thermique final est assuré dès que les températures de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont égales (T_F). D'où : $\Delta U(\mathscr{C}_1) = C_1(T_F - T_{1_0})$ et $\Delta U(\mathscr{C}_2) = C_2(T_F - T_{2_0})$

et $\quad C_1(T_F - T_{1_0}) + C_2(T_F - T_{2_0}) = 0 \Rightarrow \boxed{T_F = \dfrac{C_1 T_{1_0} + C_2 T_{2_0}}{C_1 + C_2} = T_0}$

La variation d'entropie du système est la somme des variations d'entropie des deux corps : $\Delta S = \Delta S(\mathscr{C}_1) + \Delta S(\mathscr{C}_2) = \Delta S_1 + \Delta S_2$

$$\text{or} \quad dS_1 = C_1\frac{dT_1}{T_1} \Rightarrow \Delta S_1 = C_1 \ln\left(\frac{T_F}{T_{1_0}}\right) \quad \text{et} \quad dS_2 = C_2\frac{dT_2}{T_2} \Rightarrow \Delta S_2 = C_2 \ln\left(\frac{T_F}{T_{2_0}}\right).$$

D'où au total :

$$\boxed{\Delta S = \ln\left[\frac{T_F^{(C_1 + C_2)}}{T_{1_0}^{C_1} \cdot T_{2_0}^{C_2}}\right]}$$

Cette quantité est bien positive conformément à l'expression du second principe :

$$\Delta S = S_e + \sigma > S_e \quad (\sigma > 0).$$

Le système étant thermiquement isolé, on a : $S_e = 0$, d'où $\Delta S > 0$. Cette valeur positive de ΔS traduit l'irréversibilité des échanges thermiques entre les deux corps.

2. a. Les conditions imposées réalisent une **transformation quasi statique.**

Le système des deux corps – toujours isolé de l'extérieur – garde une énergie interne constante de sorte que la température finale demeure T_0. La variation d'entropie du système est inchangée.

La transformation bien que quasi statique n'en est pas pour autant réversible.

L'irréversibilité trouve ici sa source au sein du matériau où s'effectue le transport de l'énergie thermique (phénomène de diffusion).

Par ailleurs, on peut remarquer que pour des températures $T_2(t)$ et $T_1(t)$ à l'instant t (avec $T_2(t) > T_1(t)$), une infime diminution de la température du corps chaud $\mathscr{C}_2$ ne modifie en rien le sens des échanges thermiques, ce qui traduit bien l'irréversibilité.

Pour un processus d'échange suffisamment lent, les températures des deux corps sont bien définies à chaque instant et évoluent selon les lois (volumes invariables) :

$$dU_1 = C_1 dT_1 = \delta Q_{2\to 1} = -h(T_1 - T_2)dt$$

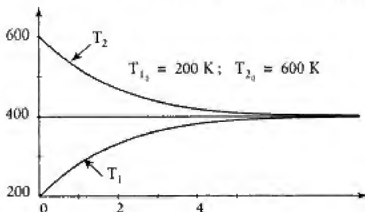
$$dU_2 = C_2 dT_2 = \delta Q_{1\to 2} = h(T_1 - T_2)dt.$$

D'où le système différentiel :

$$\begin{cases} C_1\dfrac{dT_1}{dt} = -h(T_1 - T_2) \\ C_2\dfrac{dT_2}{dt} = -h(T_2 - T_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{dt}(T_2 - T_1) + h\left(\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}\right)(T_2 - T_1) = 0 \quad (1) \\ C_1\dfrac{dT_1}{dt} + C_2\dfrac{dT_2}{dt} = 0 \quad (2) \end{cases}$$

(2) redonne bien évidemment $C_1T_1 + C_2T_2 = \text{constante} = (C_1 + C_2)T_F$.

(1) s'intègre aisément en : $T_2 - T_1 = (T_{2_0} - T_{1_0})e^{-\frac{t}{\tau}}$ où $\tau = \dfrac{C_1C_2}{(C_1 + C_2)h}$.



2. b. Appliquons le second principe à l'ensemble du système :

$$\frac{dS}{dt} = 0 + \frac{\delta\sigma}{dt} \quad (\delta\sigma = \text{création d'entropie pendant } dt)$$

or $S = S_1 + S_2 \Rightarrow \dfrac{\delta\sigma}{dt} = \dfrac{dS_1}{dt} + \dfrac{dS_2}{dt}$.

L'évolution thermodynamique de chaque corps est réversible, c'est au niveau du transfert thermique que se situe l'irréversibilité.

et $\Delta S_2 = S_{2\,\text{échangée}} + \sigma_2$.

D'où $\sigma_2 = \Delta S_2 - S_{2\,\text{échangée}} = \Delta S_2 + \Delta S_{2\text{atm}}$:

$$\boxed{\sigma_2 = \frac{P_1 V_1}{T_0}\ln\frac{P_1}{P_2} - \frac{P_1 V_1}{T_0}\left(1 - \frac{P_2}{P_1}\right)} \quad \text{où } P_2 = P_0.$$

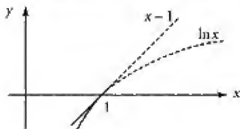
Application numérique : $\sigma_2 = 10{,}7\ \text{J}\cdot\text{K}^{-1}$.

On vérifie bien sûr que : $\sigma_2 > 0$.

Commentaire

Faisons varier P_1 et posons $x = \dfrac{P_2}{P_1}$ en supposant $P_1 \geqslant P_2$

$\sigma_2 = \dfrac{P_1 V_1}{T_0}[x - 1 - \ln x]$. Traçons les courbes $x - 1$ et $\ln x$



σ_2 diminue lorsque $x \to 1$ $(P_1 \to P_2)$. On se rapproche alors de la réversibilité.

2. a. La transformation est maintenant adiabatique réversible.

$\boxed{\Delta S_3 = 0}$ (pas d'entropie d'échange et pas de création d'entropie)

$\boxed{\Delta S_{3\,\text{atm}} = -S_{3\,\text{échangée}} = 0}$

$\boxed{\sigma_3 = 0}$

2. b.

POINT COURS

Si un système passe de l'état E_1 à l'état E_2 par une transformation adiabatique réversible $\Delta S = S(E_2) - S(E_1) = 0$.

Il est alors impossible de faire passer le système de l'état E_1 à l'état E_2 par une transformation adiabatique irréversible pour laquelle on aurait $\Delta S > 0$.

Pour ne pas violer le second principe, il faut que l'état final obtenu au 2. b. soit différent de l'état final obtenu au 2. a. Déterminons cet état final : $Q_4 = 0$.

La transformation a lieu à pression extérieure constante

$$W_4 = -P_e(V_2' - V_1) = \Delta U = nC_v(T_2' - T_1).$$

En utilisant la loi des gaz parfaits avec $P_e = P_2 = P_0$

$P_e V_2' = P_2 V_2' = nRT_2'$ et $P_1 V_1 = nRT_1$

d'où $\quad -P_2(V_2' - V_1) = \dfrac{1}{\gamma - 1}(P_2V_2' - P_1V_1)$

et $\quad P_2V_2'[\gamma - 1 + 1] = (\gamma - 1)P_2V_1 + P_1V_1$

soit $$V_2' = V_1\left[\frac{\gamma - 1}{\gamma} + \frac{P_1}{\gamma P_2}\right] \quad (1)$$

et une température T_2' telle que : $\dfrac{T_2'}{T_1} = \dfrac{P_2V_2'}{P_1V_1}$

d'où $$T_2' = T_1 \cdot \left[\frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{P_2}{P_1}\right].$$

On peut alors calculer ΔS_4 en imaginant une transformation réversible passant de l'état E_1 à l'état E_2' pour laquelle $dS = nC_v\dfrac{dT}{T} + nR\dfrac{dV}{V}$.

Ainsi $\quad \Delta S_4 = \dfrac{nR}{\gamma - 1}\ln\dfrac{T_2'}{T_1} + nR\ln\dfrac{V_2'}{V_1}$.

Soit $\quad \Delta S_4 = \dfrac{nR}{\gamma - 1}\ln\left(\dfrac{P_2V_2'}{P_1V_1}\right) + nR\ln\left(\dfrac{V_2'}{V_1}\right)$

d'où $\quad \Delta S_4 = \dfrac{P_1V_1}{(\gamma - 1)T_1}\left\{\ln\left(\dfrac{P_2}{P_1}\right) + \gamma\ln\left(\dfrac{V_2'}{V_1}\right)\right\}$.

Et avec (1) $$\boxed{\Delta S_4 = \frac{P_1V_1}{(\gamma - 1)T_1}\left\{\ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) + \gamma\ln\left[\frac{\gamma - 1}{\gamma} + \frac{P_1}{\gamma P_2}\right]\right\}} \quad \left(\frac{P_1}{P_2} = \frac{P_1}{P_0}\right)$$

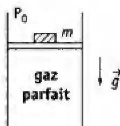
La transformation étant adiabatique, on a : $S_{\text{échangée}} = 0$ et donc $\Delta S_4\Big)_{\text{atm}} = 0$

soit $\sigma_4 = \Delta S_4$. On vérifie à nouveau que : $\sigma_4 > 0$.

Application numérique : $\sigma_4 = \Delta S_4 = 4{,}2\ \text{J} \cdot \text{K}^{-1}$.

624 Évolutions adiabatiques d'un gaz parfait

Un gaz parfait est contenu dans un récipient cylindrique vertical limité par un piston de masse négligeable. Les parois du récipient et le piston sont athermanes (c'est-à-dire adiabatiques).



Dans l'état d'équilibre initial E_1, on a placé une masse m sur le piston. La pression du milieu extérieur reste constante et égale à P_0. L'état E_1 est caractérisé pour le gaz par les grandeurs V_0, T_0 et $P_1 = P_0 + \dfrac{mg}{s}$ (s : surface du piston).

On supposera $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ = constante, et pour les applications numériques, on prendra :

$\gamma = \frac{7}{5}$; $T_0 = 290$ K ; $R = 8{,}31\ J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$ et n (nombre de mole de gaz) = 1.

1. On supprime brusquement la masse m. On considérera que le piston peut se déplacer sans frottements, et que le nouvel état d'équilibre E_2 (P_F, V_F, T_F) est atteint grâce à des phénomènes dissipatifs internes au gaz.

a. Déterminer les caractéristiques de ce nouvel état d'équilibre E_2. On posera $X = \frac{P_1}{P_0}$.

Application numérique :

Calculer les valeurs des rapports $\frac{V_F}{V_0}$ et $\frac{T_F}{T_0}$. On a $X = 1{,}5$.

b. En déduire le travail reçu W_{irr} ainsi que la variation d'entropie ΔS_{irr}. Commenter. Application numérique.

2. On revient au même état initial et on diminue la masse m très progressivement jusqu'à l'annuler. Reprendre les questions **1. a.** et **1. b.**

3. La masse m ayant été enlevée brusquement et le système ayant atteint son état d'équilibre E_2, on repose la masse m sur le piston.

a. Est-il possible que l'état d'équilibre final E_1' puisse se confondre avec l'état E_1 ?

b. Déterminer les caractéristiques de cet état E_1'.

Solution

1. a. L'état d'équilibre final E_2 doit se traduire (équilibre mécanique) par l'égalité des pressions du gaz et du milieu extérieur $P_F = P_0$ (piston sans masse). D'autre part, appliquons le premier principe au gaz contenu dans le cylindre :

$$U_2 - U_1 = W_{ext} + Q \quad \text{avec} \quad E_1(P_1, V_0, T_0) \Rightarrow E_2(P_0, V_F, T_F).$$

Il n'y a pas d'échange d'énergie thermique avec l'extérieur (parois et piston adiabatiques) $\Rightarrow Q = 0$; et le travail fourni au système s'exprime simplement à partir de la pression extérieure P_0 et de la variation du volume du gaz :

$$W_{ext} = -P_0(V_F - V_0).$$

On a donc : $$U_2 - U_1 = -P_0(V_F - V_0) \quad (1)$$

Avec $U_2 - U_1 = nC_v(T_F - T_0)$, le gaz étant supposé parfait et de coefficient $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ indépendant de la température (on a alors $C_v = \frac{R}{\gamma - 1}$ et $C_p = \gamma C_v = \frac{\gamma}{\gamma - 1}R$).

La relation (1) devient : $\frac{nR}{\gamma - 1}(T_F - T_0) = -P_0(V_F - V_0)$.

Soit encore : $$\frac{nRT_0}{\gamma-1}\left(\frac{T_F}{T_0}-1\right) = -P_0V_0\left(\frac{V_F}{V_0}-1\right) \quad (2)$$

La loi des gaz parfaits s'écrit : $\frac{P_0V_F}{T_F} = \frac{P_1V_0}{T_0} = nR \quad (3)$

D'où en remplaçant – dans (2) – nRT_0 par P_1V_0 :

$$\frac{1}{\gamma-1}\frac{P_1}{P_0}\left(\frac{T_F}{T_0}-1\right) = 1-\frac{V_F}{V_0}.$$

Enfin, en remarquant, d'après (3), que $\frac{T_F}{T_0} = \frac{P_0V_F}{P_1V_0} = \frac{V_F}{V_0}\cdot\frac{1}{X}$ (où $X = \frac{P_1}{P_0}$) :

$$\frac{X}{\gamma-1}\left(\frac{1}{X}\frac{V_F}{V_0}-1\right) = 1-\frac{V_F}{V_0}.$$

En regroupant les termes, il vient alors :

$$\frac{V_F}{V_0}(\gamma-1+1) = (\gamma-1)+X \Rightarrow \boxed{\frac{V_F}{V_0} = \frac{\gamma-1+X}{\gamma}} \quad (1)$$

D'où $$\boxed{\frac{T_F}{T_0} = \frac{\gamma-1+X}{\gamma X}} \quad (2)$$

Application numérique :

$\frac{V_F}{V_0} = 1{,}36$ et $\frac{T_F}{T_0} = 0{,}90$ (soit $T_F = 262$ K).

1. b. L'expression du travail reçu par le gaz s'identifie à W_{ext}.

$$W_{irr} = W_{ext} = -P_0(V_F-V_0) = -P_0V_0\left[\frac{V_F}{V_0}-1\right].$$

Soit $W_{irr} = -\frac{P_0}{P_1}\cdot(P_1V_0)\left[\frac{V_F}{V_0}-1\right].$

En remplaçant $\frac{P_1}{P_0}$ par X et $\frac{V_F}{V_0}$ par le résultat établi au 1. a., il vient :

$$W_{irr} = -\frac{P_1V_0}{X}\cdot\left[\frac{\gamma-1+X}{\gamma}-1\right] \Rightarrow \boxed{W_{irr} = -nRT_0\left(\frac{X-1}{\gamma X}\right)} \quad (3)$$

Application numérique :

$W_{irr} = -1\cdot 8{,}31\cdot 290\left(\frac{1{,}5-1}{\frac{7}{5}\times 1{,}5}\right)$ soit $W_{irr} = -574$ J.

• La variation d'entropie du gaz est obtenue par application de la formule classique (gaz parfait, γ = constante) :

$$\Delta S(1\to 2) = nC_v\ln\left[\frac{P_2V_2^\gamma}{P_1V_1^\gamma}\right] = \frac{nR}{\gamma-1}\ln\left[\frac{P_2V_2^\gamma}{P_1V_1^\gamma}\right].$$

Soit en fonction de $X = \dfrac{P_1}{P_0}$ et de γ :

$$\boxed{\Delta S(1 \to 2) = \frac{nR}{\gamma - 1}\ln\left[\frac{1}{X}\left\{\frac{\gamma - 1 + X}{\gamma}\right\}^{\gamma}\right]} \quad (4)$$

Commentaire

Conformément au second principe, cette expression de ΔS doit être positive puisque l'on a :

$$\Delta S = 0 + \sigma > 0$$

transformation adiabatique ↗ ↖ création d'entropie (positive)

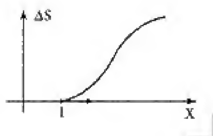
ce qui traduit l'irréversibilité de cette transformation, ce que confirme une étude rapide de $\Delta S(X)$.

On a en effet $\Delta S = \dfrac{nR}{\gamma - 1}[-\ln X + \gamma \ln[\gamma - 1 + X] - \gamma \ln \gamma]$

avec $\Delta S(X = 1) = 0$ et

$$\frac{d\Delta S}{dX} = \frac{nR}{\gamma - 1}\left[-\frac{1}{X} + \frac{\gamma}{\gamma - 1 + X}\right]$$

soit $\dfrac{d\Delta S}{dX} = \dfrac{nR}{\gamma - 1}\dfrac{(\gamma - 1)(X - 1)}{X(\gamma - 1 + X)} > 0$ pour $X > 1$.



Application numérique :

$X = 1{,}5$; $\gamma = \dfrac{7}{5}$ (gaz diatomique) et $R = 8{,}31$ donnent :

$$\Delta S(1 \to 2) = \frac{8{,}31}{\frac{7}{5} - 1}\ln\left[\frac{1}{1{,}5}\left\{\frac{\frac{7}{5} - 1 + 1{,}5}{\frac{7}{5}}\right\}^{\frac{7}{5}}\right] \Rightarrow \Delta S(1, 2) = \mathbf{0{,}46\ J \cdot K^{-1}}.$$

2. La transformation envisagée est désormais **adiabatique et réversible**, c'est-à-dire **isentropique**. Le système atteint un état d'équilibre E'_2 (P'_F, V'_F, T'_F) défini par :

- $P'_F = P_0$ (équilibre mécanique) ;
- $\Delta S(1 \to 2') = 0$, soit encore $P'_F V_F'^{\gamma} = P_1 V_0^{\gamma}$ (loi de Laplace) ;
- $\dfrac{P'_F V'_F}{T'_F} = \dfrac{P_1 V_0}{T_0} = nR$ (loi des gaz parfaits).

D'où $\quad \dfrac{V'_F}{V_0} = \left(\dfrac{P_1}{P'_F}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \left(\dfrac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \Rightarrow \boxed{\dfrac{V'_F}{V_0} = X^{\frac{1}{\gamma}}} \quad (5)$

Soit $\quad \dfrac{T'_F}{T_0} = \left(\dfrac{P'_F}{P_1}\right)\left(\dfrac{V'_F}{V_0}\right) = \dfrac{1}{X}\dfrac{V'_F}{V_0} \Rightarrow \boxed{\dfrac{T'_F}{T_0} = X^{\frac{1}{\gamma} - 1}} \quad (6)$

Application numérique :

$$\frac{V'_F}{V_0} = (1{,}5)^{\frac{7}{5}} \text{ et } \frac{T'_F}{T_0} = (1{,}5)^{-\frac{2}{7}} \Rightarrow \frac{V'_F}{V_0} = 1{,}34 \text{ et } \frac{T'_F}{T_0} = 0{,}89$$

$$(T'_F = 258 \text{ K}).$$

• Le travail reçu s'écrit : $W_{rev} = \Delta U = nC_V(T'_F - T_0)$

$$\text{or} \quad C_V = \frac{R}{\gamma - 1} \text{ et } \frac{T'_F}{T_0} = X^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \Rightarrow W_{rev} = \frac{nRT_0}{\gamma - 1}\left[X^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1\right]$$

$$\boxed{W_{rev} = \frac{nRT_0}{\gamma - 1} \cdot \left[X^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1\right]} \quad \text{avec} \quad P_1V_0 = nRT_0 \quad (7)$$

Application numérique : $W_{rev} = \dfrac{1 \times 8{,}31 \times 290}{(1{,}4 - 1)}[(1{,}5)^{-2/7} - 1] \Rightarrow W_{rev} = -659$ J.

On a, bien entendu, $\Delta S(1 \rightarrow 2') = 0$.

3. a. Le passage $E_1 \rightarrow E_2$ correspond à une transformation adiabatique irréversible s'accompagnant d'une variation positive de l'entropie du gaz $\Delta S(1 \rightarrow 2) > 0$.

Quand on repose la masse m sur le piston, le système tend vers un nouvel état d'équilibre E'_1 par une transformation également adiabatique et irréversible. On a alors $\Delta S(2 \rightarrow 1') > 0$. Ainsi, à la transformation globale $E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E'_1$, est associée une variation d'entropie strictement positive $\Delta S(E_1 \rightarrow E'_1) = \Delta S(1 \rightarrow 2) + \Delta S(2 \rightarrow 1')$.

Il est donc impossible que les états E_1 et E'_1, puissent se confondre (dans ce cas, on aurait $\Delta S(E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_1) = 0$).

3. b. Pour déterminer l'état d'équilibre E'_1, il suffit de remarquer que le passage $E_2(P_0, V_F, T_F) \rightarrow E'_1(P_1, V''_F, T''_F)$ s'obtient de la même façon que celui $E_1(P_1, V_0, T_0) \rightarrow E_2(P_0, V_F, T_F)$. Il suffit en fait de faire :

$$P_0 \rightarrow P_1 \quad \text{soit} \quad X \rightarrow \frac{1}{X}$$

$$(V_0, V_F) \rightarrow (V_F, V''_F) \quad \text{et} \quad (T_0, T_F) \rightarrow (T_F, T''_F).$$

D'où d'après les résultats du **1. a.** et **1. b.** :

$$\frac{V''_F}{V_F} = \frac{\gamma - 1 + \frac{1}{X}}{\gamma} \Rightarrow \boxed{\frac{V''_F}{V_F} = \frac{(\gamma - 1)X + 1}{\gamma X}} \quad (8)$$

$$\frac{T''_F}{T_F} = \frac{\gamma - 1 + \frac{1}{X}}{\gamma\frac{1}{X}} \Rightarrow \boxed{\frac{T''_F}{T_F} = \frac{(\gamma - 1)X + 1}{\gamma}} \quad (9)$$

De plus $\quad W_{irr}(2 \rightarrow 1') = -P_1V_F\left(\dfrac{V''_F}{V_F} - 1\right)$

avec $\quad P_1V_F = \dfrac{P_1}{P_0}P_0V_F = XnRT_F \Rightarrow W_{irr}(2 \rightarrow 1') = -XnRT_F\left(\dfrac{V''_F}{V_F} - 1\right).$

Ce qui donne en utilisant (2) et (8) : $W_{irr} = -XnRT_0\frac{(1-X)}{\gamma^2 X}(\gamma - 1 + X)$.

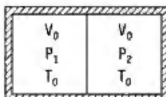
Application numérique :

$\frac{V''_F}{V_F} = 0{,}76$; $\frac{T''_F}{T_F} = 1{,}14$ (soit $T''_F = 300$ K)

et $W_{irr} = (2 \to 1') = 779$ J.

625 Évolution irréversible – Évolution réversible

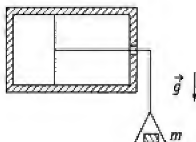
Un cylindre fermé, à parois adiabatiques, est divisé en deux parties d'égal volume V_0 par un piston diathermane, de capacité calorifique négligeable, initialement bloqué. Les deux compartiments contiennent le même gaz parfait (caractérisé par $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ = constante), à la température T_0 et aux pressions respectives P_1 et $P_2 = 3P_1$. Pour les applications numériques, on prend : $\gamma = 1{,}4$; $T_0 = 290$ K ; $P_1 = 10^5$ Pa ; $V_0 = 25 \cdot 10^{-3}$ m³. Constante des gaz parfaits : $R = 8{,}31$ J · mol⁻¹ · K⁻¹.



1. On libère le piston, qui devient parfaitement mobile, et on laisse l'équilibre se réaliser. Déterminer l'état final et la variation totale d'entropie.

2. On repart du même état initial, mais le piston est maintenu à chaque instant, en équilibre par la masse m, que l'on diminue progressivement jusqu'à $m = 0$.

Déterminer l'état final, ainsi que le travail W_{ext} de déplacement de « la » masse m.



Solution

1. Appliquons le premier principe au système constitué par l'ensemble des deux masses de gaz contenues dans le cylindre :

$$\Delta U_{sys} = W_{ext} + Q$$

ici, $Q = 0$ (enceinte adiabatique).

$W_{ext} = 0$ d'où $\Delta U_{sys} = 0$.

Soit T_f la température finale du gaz (c'est évidemment la même pour les deux compartiments : piston diathermane).

$\Delta U_{syst} = \Delta U_1 + \Delta U_2 = n_1 C_v(T_f - T_0) + n_2 C_v(T_f - T_0)$

où $C_v = \dfrac{R}{\gamma - 1}$ est la capacité thermique molaire à volume constant du gaz parfait, n_1 et n_2 les nombres de moles de gaz dans chaque compartiment.

On en déduit : $(n_1 C_v + n_2 C_v)(T_f - T_0) = 0 \Rightarrow \boxed{T_f = T_0}$

soient V_1' et V_2' les volumes à l'équilibre, et P_f la pression. D'après la loi des gaz parfaits :

$$\frac{P_1 V_0}{T_0} = n_1 R = \frac{P_f V_1'}{T_f}$$

$$\frac{P_2 V_0}{T_0} = n_2 R = \frac{P_f V_2'}{T_f}$$

par addition (et en tenant compte de $T_f = T_0$) : $P_1 V_0 + P_2 V_0 = P_f V_1' + P_f V_2'$
et, comme $V_1' + V_2' = 2V_0$:

$$P_f \cdot (2V_0) = (P_1 + P_2)V_0 \Rightarrow \boxed{P_f = \frac{P_1 + P_2}{2}}$$

on en déduit les volumes :

$$V_1' = V_0 \cdot \frac{P_1}{P_f} \cdot \frac{T_f}{T_0} \Rightarrow \boxed{V_1' = V_0 \cdot \frac{2P_1}{P_1 + P_2}} \qquad (1)$$

$$V_2' = V_0 \cdot \frac{P_2}{P_f} \cdot \frac{T_f}{T_0} \Rightarrow \boxed{V_2' = V_0 \cdot \frac{2P_2}{P_1 + P_2}}$$

Application numérique :

$P_f = 2 \cdot 10^5$ Pa ; $V_1' = 12{,}5 \cdot 10^{-3}$ m^3 et $V_2' = 37{,}5 \cdot 10^{-3}$ m^3.

Commentaire

On n'a pas fait intervenir le piston comme faisant partie du système ; le prendre en compte ne modifie pas les calculs, puisqu'il n'échange pas d'énergie avec ce qui l'entoure :

- sa capacité calorifique est supposée négligeable ;
- sa masse n'intervient pas : le poids ne travaille pas, le mouvement du piston étant implicitement supposé s'effectuer horizontalement (*cf.* les figures…).

Variation totale d'entropie :

L'entropie étant une fonction extensive, on en déduit : $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$.

Or pour un gaz parfait et γ = constante : $S(T, V) = S(T_0, V_0) + nC_v \ln\left(\dfrac{TV^{\gamma-1}}{T_0 V_0^{\gamma-1}}\right)$.

D'où $\Delta S = n_1 C_v \ln\left(\dfrac{V_1'}{V_0}\right)^{\gamma-1} + n_2 C_v \ln\left(\dfrac{V_2'}{V_0}\right)^{\gamma-1}$

et avec $C_v = \dfrac{R}{\gamma - 1}$: $\Delta S = n_1 R \ln\dfrac{V_1'}{V_0} + n_2 R \ln\dfrac{V_2'}{V_0}$.

Soit encore puisque $n_1 R = \dfrac{P_1 V_0}{T_0}$ et $n_2 R = \dfrac{P_2 V_0}{T_0}$:

$$\boxed{\Delta S = \frac{V_0}{T_0}\left\{P_1 \ln\left(\frac{2P_1}{P_1 + P_2}\right) + P_2 \ln\left(\frac{2P_2}{P_1 + P_2}\right)\right\}}$$

Application numérique : $\Delta S = 4{,}51\ \mathrm{J \cdot K^{-1}}$.

Commentaire

Cette variation d'entropie est positive, comme il se doit, car il s'agit de l'évolution spontanée d'un système thermiquement isolé. On a alors :

$$\Delta S = \underset{\substack{\| \\ 0\ \text{ici}}}{S_e} + \sigma = \sigma > 0.$$

2. Du fait du déplacement de la masse (variable) m, le système des deux gaz fournit du travail à l'extérieur (quand on diminue m, la masse remonte). Son énergie interne va donc diminuer et la nouvelle température finale T'_f sera inférieure à T_0.

$$\Delta U = n_1 C_v (T'_f - T_0) + n_2 C_v (T'_f - T_0) < 0 \Rightarrow T'_f < T_0.$$

D'autre part, l'évolution étant très progressive et adiabatique, on peut la considérer comme isentropique ce qui revient à admettre sa réversibilité.

L'état final est alors caractérisé par :

– une température finale $T'_f < T_0$;

– une pression finale $P''_1 = P''_2 = P'_f$ (puisque $m = 0$ en fin d'opération) ;

– des volumes finaux V''_1 et V''_2, avec :

$$\frac{P'_f V''_1}{T'_f} = n_1 R = \frac{P_f V'_1}{T_0} \quad \text{et} \quad \frac{P'_f V''_2}{T'_f} = n_2 R = \frac{P_f V'_2}{T_0}$$

soit en faisant le rapport $\dfrac{V''_1}{V''_2} = \dfrac{V'_1}{V'_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$

ou encore puisque $V''_1 + V''_2 = V'_1 + V'_2$

$$\boxed{V''_1 = V'_1 \quad \text{et} \quad V''_2 = V'_2}$$

Exprimons la variation d'entropie (nulle) du gaz contenu dans les deux compartiments :

$$\Delta S = n_1 C_v \ln\left(\frac{T'_f}{T_0}\frac{V''^{\gamma-1}_1}{V_0^{\gamma-1}}\right) + n_2 C_v \ln\left(\frac{T'_f}{T_0}\frac{V''^{\gamma-1}_2}{V_0^{\gamma-1}}\right) = 0$$

d'où puisque $\dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{V'_1}{V'_2} = \dfrac{P_1}{P_2} = \dfrac{1}{3}$ (*cf.* (1)) :

$$\ln\left(\frac{T'_f}{T_0}\frac{V''^{\gamma-1}_1}{V_0^{\gamma-1}}\right) + 3\ln\left(\frac{T'_f}{T_0}\frac{V''^{\gamma-1}_2}{V_0^{\gamma-1}}\right) = 0$$

et

$$\boxed{4\ln\left(\frac{T'_f}{T_0}\right) = -(\gamma - 1)\left[\ln\frac{V'_1}{V_0} + 3\ln\frac{V'_2}{V_0}\right]}$$

Application numérique :

D'après (1), on a $\frac{V'_1}{V_0} = \frac{2P_1}{P_1 + P_2} = \frac{1}{2}$ et $\frac{V'_2}{V_0} = \frac{3}{2}$.

D'où $$4\ln\left(\frac{T'_f}{T_0}\right) = -(\gamma - 1) \cdot \left[\ln\left(\frac{1}{2}\right) + 3\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right]$$

$$4\ln\left(\frac{T'_f}{T_0}\right) = -(\gamma - 1)\ln\left(\frac{27}{16}\right).$$

Finalement $T'_f = T_0\left(\frac{16}{27}\right)^{\frac{\gamma-1}{4}} = 0{,}949\ T_0 \Rightarrow T'_f \# 275$ K.

On déduit la pression finale P'_f : $\frac{P'_f}{T'_f} = \frac{P_f}{T_0} \Rightarrow P'_f = 1{,}9 \cdot 10^5$ Pa.

Le travail W_{ext} fourni, au système, par « la » masse variable m est :

$W_{ext} = \Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = (n_1 + n_2)C_v(T'_f - T_0)$.

Or $n_1 = \frac{P_1V_0}{RT_0}$, $n_2 = \frac{P_2V_0}{RT_0}$ et $C_v = \frac{R}{\gamma - 1}$, d'où :

$$\boxed{W_{ext} = \frac{(P_1 + P_2)V_0}{\gamma - 1}\left(\frac{T'_f}{T_0} - 1\right)}$$

Application numérique : **$W_{ext} = -1{,}27$ kJ.**

626 Optimisation d'un compresseur

On veut réaliser une installation de production d'air comprimé répondant au « cahier des charges » suivant :

– état initial de l'air : pression : $P_1 = 10^5$ Pa, température $T_1 = 290$ K (T_1 : température ambiante) ;

– état final de l'air : pression : $P_2 = 5 \cdot 10^5$ Pa, température T_1. L'air sera assimilé à un gaz parfait ($R = 8{,}31\ \text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$), de rapport $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1{,}40$.

Les échanges thermiques éventuels se font uniquement avec l'extérieur à la température uniforme T_1.

1. Déterminer – pour une mole de gaz – le travail minimal W_m nécessaire à cette transformation.

À quel type de transformation correspond cette valeur W_m ? Le vérifier.

2. La transformation précédente étant irréalisable en pratique, on propose les opérations suivantes :

– compression adiabatique réversible de l'état initial jusqu'à la pression P_2 ;

Dans ce cas ($\sigma = 0$) : $$W = W_m = RT_1 \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

Pour obtenir cette valeur de W, il faudrait donc une transformation réversible : la réversibilité des échanges thermiques avec l'extérieur, à T_1 impose une transformation isotherme (à la température T_1). Vérifions-le en calculant le travail reçu par le gaz dans une telle transformation :

$$W = -\int P_{ext} dV$$

avec $P_{ext} = P = \dfrac{RT_1}{V}$ ($P_{ext} = P$ du fait de la réversibilité mécanique...)

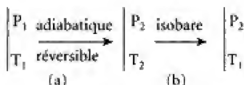
soit $W = -\int \dfrac{RT_1}{V} dV \Rightarrow W = -RT_1 \ln\left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)$

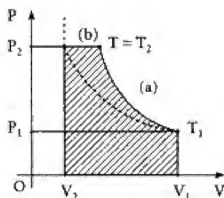
et puisque $P_1V_1 = P_2V_2 = RT_1$ alors

$$W = -RT_1 \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) \Rightarrow W = RT_1 \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

on retrouve bien $W = W_m$.

2. On peut schématiser la suite des transformations subies par le gaz, et les représenter en diagramme P(V) :





Pour la transformation isobare (b), on a $Q = \Delta H_b$ et pour l'adiabatique (a), $Q = 0$,

soit, pour l'ensemble des deux transformations {a + b} :

$$\Delta U = W_1 + Q = W_1 + \Delta H_b$$

avec $\Delta U = C_v \Delta T = 0$ (puisque le gaz revient à la température T_1).

D'où : $W_1 = -\Delta H_b = -C_p(T_1 - T_2) = C_p(T_2 - T_1)$.

Pour calculer T_2, utilisons le fait que la transformation (a) est isentropique (puisque adiabatique et réversible) ce qui, pour un gaz parfait, justifie l'application de la loi de Laplace, que l'on peut écrire :

$$P_1^{1-\gamma} \cdot T_1^{\gamma} = P_2^{1-\gamma} \cdot T_2^{\gamma} \Rightarrow T_2 = T_1\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

et $$W_1 = C_p T_1 \left[\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]$$

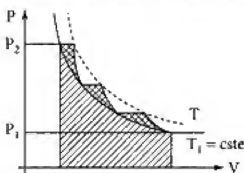
Commentaires

La compression en deux étapes conduit à la valeur optimale $P = \sqrt{P_1P_2}$; remarquons que cette valeur correspond à :

$$T = T_1\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} = T'.$$

On limite l'irréversibilité en limitant l'échauffement du gaz, et le meilleur résultat est obtenu avec des températures maximales égales lors de chaque compression.

Si l'on veut diminuer encore W_1 et se rapprocher davantage du cas optimal ($W = W_m$), on peut augmenter le nombre d'étapes, c'est-à-dire le nombre « d'étages » du dispositif compresseur, chaque « étage » correspondant à une compression isentropique, suivie d'un retour isobare à la température ambiante. Graphiquement, cela correspond à :



En augmentant les étapes de compression, on diminue l'échauffement à chaque étape, donc l'écart de température avec l'extérieur. On réduit de ce fait l'irréversibilité des échanges thermiques avec l'extérieur à T_1, ce qui rapproche du cas réversible (cas optimal $W = W_m$).

Commentaires

On pourrait confirmer, par le calcul, la généralisation au cas d'un compresseur à n étages.

Notons maintenant P_0 et P_n les pressions extrêmes, T_0 la température extérieure et (P_i, T_i) l'état atteint à la fin de la $i^{\text{ème}}$ compression.

Le lecteur vérifiera que l'on a :

- $W_m = C_p[T_1 + T_2 + \dots + T_i + \dots + T_n - nT_0] = T_0C_p\left[\sum_1^n\left(\frac{P_i}{P_{i-1}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - n\right]$;

- W_m est minimale pour $\frac{P_{i+1}}{P_i} = \text{cste} = \left(\frac{P_n}{P_0}\right)^{1/n}$, ce qui correspond à prendre les P_i en progression géométrique entre les valeurs extrêmes P_0 et P_n ;

- alors $W_m = nC_pT_0\left[\left(\frac{P_n}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{n\gamma}} - 1\right]$;

- $\lim_{n\to\infty} W_m = RT_0\ln\left(\frac{P_n}{P_0}\right)$: on retrouve bien, à la limite, le résultat de la transformation isotherme réversible.

D. Corps pur diphasé

31 Vaporisation dans le vide

Dans un réservoir initialement vide, de volume invariable $V_0 = 5 \cdot 10^{-3}$ m³, on introduit deux grammes d'eau liquide, pris à la pression atmosphérique $P_0 = 10^5$ Pa et à la température $T_0 = 290$ K.

1. Le réservoir et son contenu sont portés à la température $T_1 = 350$ K (par l'intermédiaire d'un thermostat).

a. Déterminer l'état d'équilibre de l'eau (la pression d'équilibre eau liquide-vapeur d'eau à la température T_1 vaut $P_s(T_1) = 0{,}46 \cdot 10^5$ Pa).

Quelle est l'énergie thermique absorbée par les 2 g d'eau ?

La vapeur d'eau sera assimilée à un gaz parfait de masse molaire M = 18 g.

On donne : $R = 8{,}31$ J · mol⁻¹ · K⁻¹ (constante des gaz parfaits) ;

$C_L = 4{,}19$ kJ · K⁻¹ · kg⁻¹ (capacité calorifique massique de l'eau liquide) ;

$l_{vap}(T_1) = 2\,300$ kJ · kg⁻¹ (chaleur latente de vaporisation de l'eau à T_1).

b. Faire le bilan entropique.

2. À partir de l'état d'équilibre précédent, on chauffe le réservoir et son contenu jusqu'à $T_2 = 373$ K ($P_s(T_2) = 10^5$ Pa). Calculer l'énergie thermique absorbée par l'eau.

On donne $l_{vap}(T_2) = 2\,240$ kJ · kg⁻¹ ;

capacité calorifique molaire à volume constant de la vapeur d'eau :

$C_V = 21$ J · mol⁻¹ · K⁻¹.

1. Ce qu'il faut savoir

- Premier principe ; second principe.
- Changement d'état : vaporisation de l'eau.
- Chaleur latente.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. L'eau introduite subit un chauffage et une vaporisation, partielle ou totale : il faut d'abord déterminer dans lequel de ces deux cas on se trouve.

La quantité d'énergie thermique absorbée par l'eau se déduira de la variation de son énergie interne.

On déterminera ensuite ΔU (et ΔS) en choisissant une suite de transformations réversibles menant à l'état final précédemment déterminé.

• $\Delta U = W + Q$

Sur la transformation (a), $W_a = 0$

et $\Delta U_a = Q_a = mC_L(T_1 - T_0)$.

Sur la transformation (b), $W_b = -P_s(T_1)(V_0 - mv_L) \approx -P_s(T_1)V_0$

(et $V_0 \approx m_g v_g$)

et $Q_b = m_g l_{vap}(T_1)$

d'où : $\Delta U_b = m_g l_{vap}(T_1) - P_s(T_1)V_0$.

D'où $\boxed{Q = mC_L(T_1 - T_0) + m_g l_{vap}(T_1) - P_s(T_1)V_0}$

Application numérique : **Q = 3,54 kJ.**

1. b. Bilan entropique

D'après le second principe : $\Delta S = S_e + \sigma$ ($\sigma \equiv$ création d'entropie)

où $S_e = \dfrac{Q}{T_1}$ puisque le système reçoit l'énergie thermique Q du thermostat de température T_1.

Calculons $\Delta S(E_0 \to E_F)$. Pour se faire, on utilisera le même chemin réversible que celui envisagé pour déterminer la valeur de ΔU, d'où : $\Delta S(E_0 \to E_F) = \Delta S_a + \Delta S_b$.

Avec $\Delta S_a = \displaystyle\int \frac{\delta Q_{rév}}{T} dT = \int_{T_0}^{T_1} \frac{mC_L dT}{T} = mC_L \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right)$

(l'état du liquide ne dépendant ici que de la température).

D'autre part (*cf.* point de cours) : $\Delta S_b = \dfrac{Q_{rév}}{T_1} = \dfrac{m_g l_{vap}(T_1)}{T_1}$

D'où $\Delta S(E_0 \to E_F) = mC_L \ln\left(\dfrac{T_1}{T_0}\right) + \dfrac{m_g l_{vap}(T_1)}{T_1}$

et $$\sigma = \Delta S(E_0 \to E_F) - \frac{Q}{T_1}$$

D'où $\sigma = mC_L \ln\left(\dfrac{T_1}{T_0}\right) + \dfrac{m_g l_{vap}(T_1)}{T_1} - \dfrac{mC_L(T_1 - T_0) + m_g l_{vap}(T_1) - P_s(T_1)V_0}{T_1}$

$$\boxed{\sigma = \left\{ mC_L\left[\ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) - \frac{T_1 - T_0}{T_1}\right]\right\} + \frac{P_s(T_1)V_0}{T_1}}$$

Application numérique : $\sigma = 0{,}139 + 0{,}657 =$ **$0{,}80\ \mathrm{J \cdot K^{-1}}$.**

Si on compare à la transformation réelle, on peut remarquer que le premier terme correspond au chauffage irréversible de l'eau liquide, et le second à l'irréversibilité de la vaporisation : $\dfrac{P_s(T_1) \cdot V_0}{T_1} = m_g \dfrac{R}{M}$ ne concerne que la masse d'eau vaporisée…

2. Déterminons d'abord l'état d'équilibre atteint : la température augmente peu, et la pression maximale de vapeur est plus que doublée : la masse de vapeur d'eau peut augmenter très notablement, et il est probable que l'eau va se vaporiser totalement.

Vérifions-le en calculant la pression atteinte **dans l'hypothèse d'une vaporisation totale de l'eau :**

$$P = \frac{m}{M} \cdot \frac{RT_2}{V_0} = 0{,}69 \cdot 10^5 \text{ Pa} < P_s(T_2).$$

L'eau est donc totalement vaporisée à la pression $P_2 = P$.
De même que précédemment, le volume reste invariable, donc $W = 0$, et $Q = \Delta U$.
Calculons ΔU pour la suite de transformations suivantes :

(a′) : Vaporisation progressive de l'eau liquide restante à T_1 et $P_s(T_1)$ constantes, par augmentation du volume : transformation $N \rightarrow B'$.

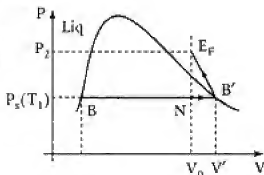
(b′) : Chauffage de la vapeur de $(T_1, P_s(T_1))$ à (T_2, V_0) : transformation $B' \rightarrow E_F$.

$$Q = \Delta U = \Delta U_{a'} + \Delta U_{b'}$$

avec $\quad \Delta U_{a'} = \Delta(H - PV) = \Delta H_{a'} - P_s(T_1) \cdot \Delta V$

où $\quad \Delta H_{a'} = (m - m_g) l_{vap}(T_1)$

(vaporisation du liquide restant) m_g masse de vapeur dans l'état d'équilibre précédent ($m_g = 1{,}42$ g)



$$\Delta V = V' - V_0$$

et (la vapeur est un gaz parfait) :

$$P_s(T_1)V' = \frac{m}{M}RT_1 \; ; \; P_s(T_1)V_0 = \frac{m_g}{M}RT_1$$

soit finalement : $P_s(T_1) \cdot \Delta V = \dfrac{m - m_g}{M}RT_1$.

D'autre part $\quad \Delta U_{b'} = m\dfrac{C_V}{M}(T_2 - T_1) \quad$ (C_V rapporté à 1 mole).

Ce qui donne $\quad \boxed{Q = \Delta U = (m - m_g)\left(l_{vap}(T_1) - \dfrac{RT_1}{M}\right) + m\dfrac{C_V}{M}(T_2 - T_1)}$

Application numérique : $Q = 1\,233 + 53{,}7 \Leftrightarrow Q \# 1{,}29$ kJ.

632 Détendeur

On fait subir à du fréon une détente de Joule-Thomson à partir d'un état correspondant au liquide de saturation (température $T_1 = 303$ K) et qui l'amène à un état de température $T_2 = 237$ K.

D'autre part, dans cet état final, $T = T_2 = 237$ K ; or $h_C = h_L(T_2) = 387$ kJ · kg^{-1} et $h_D = h_v(T_2) = 556$ kJ · kg^{-1}, soit :

$$h_C < h_f < h_D.$$

Le point figuratif B se situe donc entre C et D sur le palier de vaporisation. L'état final **sera celui d'un mélange liquide-vapeur à la température T_2 et à la pression $P_2 = 8 \cdot 10^4$ Pa.** On a donc :

$$h_f = H_{vap} + H_{liq}$$

avec $H_{vap} = m_{vap} h_v(T_2)$ et $H_{liq} = (m - m_{vap}) h_L(T_2)$.

Soit en introduisant le titre x en vapeur :

$m_{vap} = xm = x \cdot 1$ ($m = 1$ kg), d'où : $h_f = x h_v(T_2) + (1 - x) h_L(T_2)$

et $\boxed{x = \dfrac{h_f - h_L(T_2)}{h_V(T_2) - h_L(T_2)}}$

Application numérique : $x = \dfrac{448 - 387}{556 - 387} = \dfrac{61}{169}$; $\mathbf{x = 0{,}36}$.

■ **Variation d'entropie massique :**

Il s'agit de calculer $\Delta s = s_f - s_i$ (s_f = entropie massique dans l'état final).

On a $s_i = s_L(T_1)$ et $s_f = x s_v(T_2) + (1 - x) s_L(T_2)$.

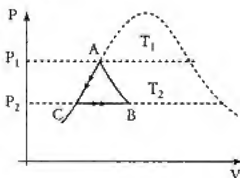
Application numérique :

$\Delta s = [0{,}36 \times 4{,}776 + (1 - 0{,}36) \times 4{,}061] - 4{,}286 \Rightarrow \mathbf{\Delta s = 33\ J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$.

Ce résultat traduit l'irréversibilité de la détente (*cf.* second principe).

2. La détente se caractérisant par $\Delta h = 0$ ($h_B = h_A$), calculons Δh en suivant le chemin réversible $A \to C \to B$: $\Delta h = (h_C - h_A) + (h_B - h_C)$.

• Pour le liquide de saturation ($A \to C$) : $\Delta h(A \to C) = C'_L (T_2 - T_1)$ où C'_L est la capacité thermique du liquide juste saturant que l'on confondra avec C_L donné dans l'énoncé.



• La transformation $C \to B$ s'effectue sur le palier de changement d'état. Elle correspond à une vaporisation partielle et réversible d'une masse x kg de fluide pour une masse initiale de 1 kg de Fréon liquide, d'où :

$$\Delta h(C \to B) = x l_{vap}(T_2).$$

Au total, $\Delta h = 0 = C_L(T_2 - T_1) + x l_{vap}(T_2)$

soit $\boxed{x = \dfrac{C_L(T_1 - T_2)}{l_{vap}(T_2)}}$

Application numérique : $x = \dfrac{0{,}92 \cdot (303 - 237)}{168} \Leftrightarrow \mathbf{x = 0{,}36}$.

■ Pour calculer la variation d'entropie massique, reprenons le chemin réversible $A \to C \to B$: $\Delta s = \Delta s(A \to C) + \Delta s(C \to B)$, avec :

$$\Delta s(A \to C) = \int_A^C \frac{\delta Q_{rév}}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_L' \, dt}{T} = C_L \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

$$\Delta s(B \to C) = \frac{x l_{vap}(T_2)}{T_2} \quad \text{(changement d'état réversible).}$$

D'où $\boxed{\Delta s = C_L \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + \frac{x l_{vap}(T_2)}{T_2}}$

Application numérique : $\Delta s = 0{,}92 \ln\left(\frac{237}{303}\right) + \frac{0{,}36 \times 168}{237} \Leftrightarrow \Delta s = 30 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.

3. On constate que les résultats obtenus en 1. et 2. concernant le titre x en vapeur et la variation Δs d'entropie sont très proches. Ceci n'est guère étonnant puisqu'il est possible d'évaluer les grandeurs C_L et $l_{vap}(T_2)$ fournie au 2. à partir du tableau de valeurs thermodynamiques proposé au 1.

Ainsi on a : $l_{vap}(T_2) = h_v(T_2) - h_L(T_2) = 556 - 387 \Rightarrow l_{vap}(T_2) = 169 \text{ KJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

ou encore $l_{vap}(T_2) = T_2[s_v(T_2) - s_L(T_2)] = 237 \times [4{,}776 - 4{,}061]$

soit $l_{vap}(T_2) = 169{,}(5) \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

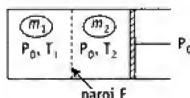
De même, on peut considérer que l'on a, en première approximation, pour le liquide de saturation : $h_L(T_2) - h_L(T_1) \# C_L(T_2 - T_1)$.

On a donc : $C_L \sim \frac{h_L(T_1) - h_L(T_2)}{T_1 - T_2} = \frac{448 - 387}{303 - 237}$; $C_L \sim 0{,}92 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Ces valeurs sont bien en accord avec celles données à la question 2.

Soulignons enfin que l'on rencontre des détendeurs de ce type dans des machines frigorifiques.

633 Évolution isenthalpique



Un récipient cylindrique horizontal est fermé par un piston pouvant coulisser sans frottements. La pression extérieure est maintenue constante et égale à $P_0 = 1$ atm.

Le récipient est initialement séparé en deux compartiments par une paroi adiabatique escamotable. Le compartiment de gauche contient de l'eau liquide saturée ($m_1 = 1$ kg ; $P_0 = 1$ atm ; $T_1 = 373$ K), celui de droite est rempli de vapeur d'eau ($m_2 = 2$ kg ; $P_0 = 1$ atm ; $T_2 = 478$ K). Le piston et les parois du récipient sont adiabatiques.

On supprime la paroi F (sans apport de travail).

On donne les valeurs numériques des enthalpies massiques (h) et entropies massiques (s) :

$$P_0 = 1 \text{ atm} \quad \text{et} \quad T = 373 \text{ K} \quad \begin{cases} h_L = 419 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} & ; \quad s_L = 1{,}306 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \\ h_v = 2\,675 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} & ; \quad s_v = 7{,}354 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \end{cases}$$

$P_0 = 1$ atm et $T = 478$ K ; $h_v = 2\,884 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$; $s_v = 7{,}847 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

1. Déterminer l'état d'équilibre final du système.

2. Calculer la variation d'entropie ΔS.

3. Exprimer également cette variation d'entropie ΔS en fonction notamment de $l_{vap}(T_1)$ et de C_P, capacité thermique à pression constante de la vapeur (on considérera que C_P est constante sur l'intervalle $[T_1, T_2]$).

Évaluer $l_{vap}(T_1)$, C_P, puis ΔS. Conclure.

1. Ce qu'il faut savoir

- Premier principe.
- Changement d'état liquide → vapeur : fonctions massiques $h(T, x)$ et $s(T, x)$.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. Le système va évoluer vers son état d'équilibre en échangeant uniquement du travail avec l'extérieur (pression P_0). Il suffira donc de traduire le bilan énergétique à l'aide du premier principe, lequel doit se réduire ici à la conservation de l'enthalpie (P_0 étant également la pression dans les deux compartiments avant la suppression de la paroi). Pour l'état final, il faudra faire une hypothèse : on pourra, par exemple, considérer qu'il correspond à un équilibre liquide-vapeur ($P_0 = 1$ atm et $T = 373$ K).

2. Les états initial et final étant connus, leurs entropies se calculent aisément (l'entropie est une grandeur extensive). On doit trouver une variation ΔS positive (*cf.* second principe en l'absence d'échanges thermiques).

3. On prendra un état de référence associé au liquide de saturation (P_0, T_1). On lui attribuera une entropie massique s_0. On calculera les entropies des états initial et final à partir de cet état de référence.

3. Solution

1. Le système est thermiquement isolé de l'extérieur (parois adiabatiques) et ne reçoit donc aucune énergie thermique ($Q = 0$).

D'autre part, les forces de pression extérieures (P_0) lui fournissent le travail mécanique W tel que : $W = -P_0 \Delta V = -P_0(V_2 - V_1)$

(V_1 volume total initial, V_2 volume final).

Le bilan d'énergie (premier principe) s'écrit ici :

$$\Delta U = U_2 - U_1 = -P_0(V_2 - V_1) \qquad (Q = 0).$$

Soit encore : $(U_2 + P_0V_2) = (U_1 + P_0V_1)$.

Or la pression d'équilibre en fin de transformation est nécessairement P_0 (équilibre mécanique) ; mais P_0 est aussi la pression dans chaque compartiment avant la suppression de la paroi. Les quantités $(U_1 + P_0V_1)$ et $(U_2 + P_0V_2)$ représentent donc les enthalpies dans les états initial et final. La transformation se caractérise alors par l'invariance de l'enthalpie du système.

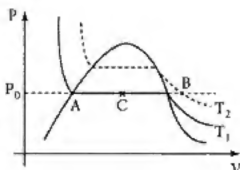
$$\boxed{\Delta H = 0}$$

L'enthalpie initiale est donnée par :

$$H_1 = H_1(\text{eau liquide saturée}) + H_1(\text{vapeur d'eau})$$

Soit $$H_1 = m_1 h_L(373) + m_2 h_v(478).$$

L'état du fluide dans les deux compartiments est représenté sur le diagramme (P, V) par les points A et B. Imaginons que l'état final puisse être associé au point C (titre x en vapeur), ce qui impose une température $T = T_1$ (et $P = P_0$). Dès lors, l'enthalpie finale correspond à celle d'un mélange liquide-vapeur, de masse totale $m_1 + m_2$, soit :



$$H_2 = [xh_v(373) + (1 - x)h_L(373)](m_1 + m_2).$$

La transformation étant isenthalpique, il vient ($H_1 = H_2$) :

$$xh_v(373) + (1 - x)h_L(373) = \frac{m_1 h_L(373) + m_2 h_v(478)}{m_1 + m_2}.$$

D'où :

$$x[h_v(373) - h_L(373)] = \frac{[m_1 h_L(373) + m_2 h_v(478)] - [(m_1 + m_2)h_L(373)]}{m_1 + m_2}$$

Finalement $$\boxed{x = \frac{m_2[h_v(478) - h_L(373)]}{(m_1 + m_2)[h_v(373) - h_L(373)]}} \quad (1)$$

Application numérique :

$$x = \frac{2[2\,884 - 419]}{3 \times [2\,675 - 419]} \Rightarrow x = \mathbf{0{,}73} \text{ (on a bien } 0 \leq x \leq 1\text{)}.$$

L'état final est donc celui d'un mélange liquide-vapeur :

$$P_0 = 1 \text{ atm} ; \quad T = 373 \text{ K} ;$$

$$x = 0{,}73 \Rightarrow m_v = 2{,}19 \text{ kg} ; \quad m_L = 0{,}81 \text{ kg}.$$

2. La variation d'entropie du système est $\Delta S = S_2 - S_1$ avec :

$S_1 = S_1$ (eau liquide saturée) + S_1 (vapeur d'eau)

soit $$S_1 = m_1 s_L(373) + m_2 s_v(478),$$

et $$S_2 = (m_1 + m_2)[xs_v(373) + (1 - x)s_L(373)].$$

D'où $$\boxed{\Delta S = (m_1 + m_2)[xs_v(373) + (1-x)s_L(373)] - m_1 s_L(373) - m_2 s_v(478)}$$

Application numérique :

En utilisant l'expression (1) définissant la valeur de x, nous obtenons :

$$\Delta S = 0{,}135 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}.$$

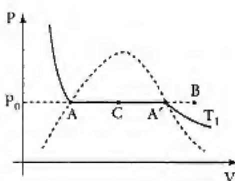
La transformation envisagée s'accompagne d'un accroissement de l'entropie du système conformément à l'expression du second principe :

$$\Delta S = S_e + \sigma \quad (\sigma = \text{création d'entropie} : \sigma > 0)$$

avec ici $S_e = 0$ (transformation adiabatique).

On doit bien avoir $\Delta S = \sigma > 0$.

3. Appelons s_0 l'entropie massique du liquide de saturation dans l'état (T_1, P_0) : point A.



Dans l'état initial, nous avons :

$$S_i = m_1 s_0 + m_2 s_B$$

où $s_B = (s_B - s_{A'}) + (s_{A'} - s_A) + s_A$

avec $s_A = s_0$ et $s_{A'} - s_A = \dfrac{l_{vap}(T_1)}{T_1}$ par définition de la chaleur latente de vaporisation.

Soit $$S_i = m_1 s_0 + m_2 \left\{ s_0 + \frac{l_{vap}(T_1)}{T_1} + (s_B - s_{A'}) \right\}$$

Or $s_B - s_{A'} = C_P \ln \dfrac{T_2}{T_1}$ (B et A' correspondent à la même pression P_0 et à des températures différentes T_1 et T_2 ; de plus on suppose C_P = cste).

D'où : $$S_i = (m_1 + m_2)s_0 + m_2 \left\{ \frac{l_{vap}(T_1)}{T_1} + C_P \ln \frac{T_2}{T_1} \right\}.$$

• L'état final est associé au point C, et à un titre x en vapeur et à une masse totale $m = m_1 + m_2$:

$$S_f = (m_1 + m_2) \left\{ s_0 + x \frac{l_{vap}(T_1)}{T_1} \right\}.$$

Et $$\boxed{\Delta S = S_f - S_i = (m_1 + m_2) x \frac{l_{vap}(T_1)}{T_1} - m_2 \left\{ \frac{l_{vap}(T_1)}{T_1} + C_P \ln \frac{T_2}{T_1} \right\}} \quad (1)$$

• Évaluons $l_{vap}(T_1)$ et C_P :

on a :

$$l_{vap}(T_1) = h_v(T_1) - h_L(T_1) = h_v(373) - h_L(373) \Rightarrow l_{vap}(T_1) = 2\,256 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

Il reste à calculer la masse de vapeur formée. Celle-ci est assimilée à un gaz parfait, d'où :

$$PV = nRT = \frac{m'}{M}RT \Rightarrow m' = \frac{MP_3}{RT_3}\cdot V.$$

La masse de vapeur $\delta m'$ correspond alors à un volume δV tel que : $\delta m' = \frac{MP_3}{RT_3}\delta V$.

Or la pompe aspire pendant dt un volume $\delta V = Ddt$ (D = débit volumique) soit encore une masse de vapeur :

$$\delta m' = \frac{MP_3}{RT_3}Ddt \text{ et } \delta m = \delta m' + \delta m'' = \delta m'\left(1 + \frac{l_{vap}}{l_f}\right) = \left(1 + \frac{l_{vap}}{l_f}\right)\cdot\frac{MP_3}{RT_3}D\cdot\delta t$$

d'où la loi d'évolution de la masse m d'eau liquide : $m = m_0 - \left(\frac{\delta m}{\delta t}\right)\cdot t$.

L'eau liquide aura donc complètement disparu au bout d'un temps t_1 :

$$m = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{m_0}{\left(\frac{\delta m}{\delta t}\right)} \qquad \boxed{t_1 = \frac{m_0 RT_3}{MP_3\cdot D\left(1 + \frac{l_{vap}}{l_f}\right)}}$$

Application numérique : $t_1 = \frac{50\times 8{,}31\times 273}{18\times 600\times 10^{-4}}\cdot\frac{335}{335 + 2\,540} = 3 \text{ h } 24 \text{ min.}$

635 Eau liquide en équilibre avec sa vapeur

On considère de l'eau liquide en équilibre avec sa vapeur à la température $T_0 = 394$ K et à la pression $P_0 = 2$ atm. La masse d'eau est $m = 9$ g, et le volume total occupé par l'eau est $V_0 = 4{,}7$ L.

1. Déterminer le titre en vapeur du mélange.

2. On place le système dans un thermostat à la température $T_F = 478$ K. Déterminer l'énergie thermique Q fournie par le thermostat dans les deux cas suivants :

a. si l'on maintient la pression constante (égale à P_0) ;

b. si le volume est invariable.

3. Commenter les résultats du **2. a.** et **2. b.**

On donne, pour l'eau, les valeurs des volumes massiques de la vapeur saturante (v_v) et du liquide de saturation (v_L), ainsi que les enthalpies massiques correspondantes (h_v et h_L) :

- $T = 394$ K $\begin{cases} v_v = 858 \text{ dm}^3\cdot\text{kg}^{-1} \ ; & h_v = 2\,710 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1} \ ; \\ v_L = 1{,}06 \text{ dm}^3\cdot\text{kg}^{-1} \ ; & h_L = 509 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1} \ ; \end{cases}$

- T = 412 K v_v = 522 dm³ · kg⁻¹ ;
- T = 478 K et pour un volume massique de 522 dm³ · kg⁻¹, on a :

$$h = h' = 2\,870 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1} \quad \text{et} \quad P = P' = 4{,}1 \text{ atm} ;$$

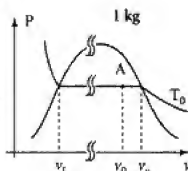
- T = 478 K et pour une pression P = 2 atm, on a :

$$h = h'' = 2\,890 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}.$$

Solution

1. Par définition, le titre en vapeur est donné par la relation :

$$\boxed{x = \frac{m_v}{m}}$$



D'autre part, en désignant par m_L la masse d'eau liquide, nous avons :

$$m = m_L + m_v$$

$$V_0 = v_L m_L + v_v m_v.$$

Soit encore : $v_0 = \dfrac{V_0}{m} = v_L(1-x) + v_v x$

(où v_0 représente le volume massique « global »).

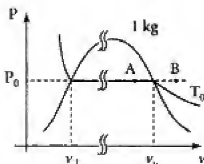
D'où
$$\boxed{x = \frac{v_0 - v_L}{v_v - v_L}}$$

Application numérique :

$v_L = 1{,}06 \text{ dm}^3\cdot\text{kg}^{-1}$; $v_v = 858 \text{ dm}^3\cdot\text{kg}^{-1}$; $v_0 = \dfrac{4{,}7}{9\cdot 10^{-3}} = 522 \text{ dm}^3\cdot\text{kg}^{-1}$.

D'où $x = \dfrac{522 - 1{,}06}{858 - 1{,}06} \Rightarrow x = 0{,}61.$

2. a. La pression est maintenue constante $P = P_0$, et la température finale $T_F = 478$ K est supérieure à la température T_0 de l'équilibre liquide vapeur (pour une pression P_0). L'état du système (ramené à l'unité de masse) passe d'un mélange liquide-vapeur (point A) à celui de la vapeur (point B).



Appliquons alors le premier principe au fluide :

$$\Delta U = W_{ext} + Q.$$

Le travail extérieur s'exprime simplement par $W_{ext} = -P_0\Delta V$, d'où :

$$W_{ext} = -P_0(V_F - V_0).$$

Soit une énergie thermique Q fournie par le thermostat :

$$Q = U_F - U_I + P_0(V_F - V_0) = (U_F + P_0V_F) - (U_I + P_0V_0).$$

Or $P_I = P_F = P_0$ $\begin{cases} H_F = U_F + P_F V_F = U_F + P_0 V_F \\ H_I = U_I + P_I V_I = U_I + P_0 V_I \end{cases}$

Finalement $Q = H_F - H_I$ (**transformation isobare**), et en désignant par h les enthalpies massiques :

$$\boxed{Q = m(h_F - h_I)}$$

h_I se calcule à partir des valeurs h_v et h_L des enthalpies massiques de la vapeur saturante et du liquide saturé, et du titre x en vapeur :

$$h_I = x h_v + (1 - x) h_L .$$

Quant à h_F il s'identifie à la quantité h'', d'où :

$$\boxed{Q = m[h'' - x h_v - (1 - x) h_L]}$$

Application numérique :

$$Q = 9 \cdot 10^{-3}[2\,890 - 0{,}61 \times 2\,710 - 0{,}39 \times 5\,09] \Rightarrow \mathbf{Q = 9{,}38\ kJ.}$$

2. b. Cette fois-ci, le volume reste égal à V_0 et le premier principe s'écrit :

$$\Delta U = Q \Rightarrow \boxed{Q = m(u_F - u_I)}$$

où u_F et u_I désignent les énergies internes massiques dans les états final et initial.

L'état initial est toujours associé au point A.

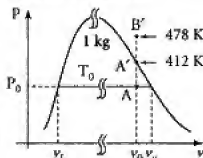
Pour l'état final, on a un volume massique v_0 et une température $T_F = 478$ K supérieure à celle du point A' ($T_{A'} = 412$ K d'après les données) : cet état correspond à un point tel que B' pour lequel l'enthalpie massique vaut h' et la pression $P' = 4{,}1$ atm.

Or $u_F = h_F - P_F v_F$ avec $h_F = h'$, $P_F = P'$ et $v_F = v_0$, soit : $u_F = h' - P' v_0$.

De même $u_I = h_I - P_I v_I$ avec $h_I = h_v x + h_L(1 - x)$, $P_I = P_0$ et $v_I = v_0$.

D'où

$$\boxed{Q = m[(h' - P' v_0) - (h_v x + h_L(1 - x) - P_0 v_0)].}$$



Application numérique : **Q = 8,2 kJ.**

3. Les résultats des questions 2. a. et 2. b. nous montrent que l'énergie thermique fournie par le thermostat est plus grande pour la transformation à pression constante que pour la transformation à volume constant :

– dans le deuxième cas, l'énergie thermique reçue s'identifie à la variation d'énergie interne (volume constant), soit $Q_2 = U'_F - U_I$;

– dans le premier cas ($P = P_0$), on a :

$Q_1 + W_{ext} = U''_F - U_I \Rightarrow Q_1 = (U''_F - U_I) - W_{ext}$.

La différence entre Q_1 et Q_2 provient donc pour l'essentiel de la quantité W_{ext} (en effet, pour la vapeur assimilable à un gaz parfait, on aurait $U''_F = U'_F$, puisque

$T_F'' = T_F' = 478$ K). Or dans cette dernière transformation, le volume augmente et W_{ext} est défini négatif, de sorte que $Q_1 > Q_2$, comme il se doit.

On a $\quad W_{ext} = -P_0[m(v_F - v_0)]$.

Les tables donnent $v_F = 1{,}19\ m^3 \cdot kg^{-1}$ (pour $P = P_0 = 2$ atm et $T = T_F$).

D'où $W_{ext} = -2 \cdot 10^5 \times 9 \cdot 10^{-3}(1{,}19 - 0{,}522) \Rightarrow W_{ext} = -1{,}20$ kJ.

Or $Q_1 - Q_2 = 9{,}35 - 8{,}18 = 1{,}17$ kJ.

Il y a bien accord $(Q_1 - Q_2 \sim -W_{ext})$.

636 Détente isentropique de vapeur saturante

1. On donne pour l'eau les valeurs des enthalpies massiques, associées aux états liquide et vapeur, à des températures différentes.

$T_1 = 418$ K ; $\quad h_L = 610\ kJ \cdot kg^{-1}$; $\quad h_v = 2\,739\ kJ \cdot kg^{-1}$;

$T_2 = 373$ K ; $\quad h_L = 419\ kJ \cdot kg^{-1}$; $\quad h_v = 2\,675\ kJ \cdot kg^{-1}$.

On admet que pour les températures considérées ($T \leqslant 470$ K), la chaleur latente de vaporisation de l'eau l_{vap} varie linéairement avec la température T. En déduire l'expression numérique donnant $l_{vap}(T)$ exprimée en $kJ \cdot kg^{-1}$.

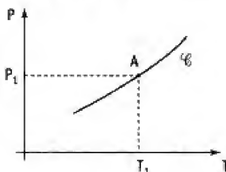
2. On considère de la vapeur d'eau saturante (température $T < 470$ K). On lui fait subir une détente isentropique. Montrer que cette détente s'accompagne d'une liquéfaction partielle : on notera y le titre en liquide du mélange.

Donner la valeur de y pour des températures finale et initiale égales à T_2 et T_1.

On supposera que la capacité thermique du liquide de saturation est une constante C. Pour les applications numériques, on prendra $C = 4{,}186\ kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$.

3. Sur le diagramme (P, T), l'état initial est associé au point $A(P_1, T_1)$. La pente $\left(\dfrac{dP}{dT}\right)_{éq}$ de la courbe d'équilibre $\mathscr{C}$ est liée à la chaleur latente de vaporisation l_{vap} par l'expression dite formule de Clapeyron :

$l_{vap} = T(v_v - v_L)\left.\dfrac{dP}{dT}\right)_{éq}$, où v_v et v_L = volumes massiques de la vapeur saturante et du liquide de saturation.



Déterminer la grandeur $\left.\dfrac{dP}{dT}\right)_{vap}$ caractérisant la pente en A de l'isentropique située dans le domaine de la vapeur et aboutissant en A.

Établir une condition sur ces pentes pour que la détente envisagée s'accompagne effectivement d'une liquéfaction partielle. Conclure.

Solution

1. À la température d'équilibre T, la chaleur latente de vaporisation, rapportée à l'unité de masse, est donnée par l'expression :

$$l_{vap}(T) = h_v(T) - h_L(T).$$

On admet des variations linéaires : $l_{vap} = \alpha - \beta T$ ($\Delta h = h_v - h_L$ doit diminuer quand la température augmente ; Δh tend vers une valeur nulle pour $T \to T_C^-$). On a donc :

$$h_v(T) - h_L(T) = \alpha - \beta T.$$

Appliquons cette relation aux deux températures T_1 et T_2 :

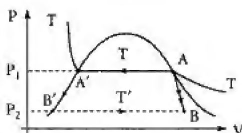
$$\begin{cases} \alpha - \beta T_1 = 2\,739 - 610 \Rightarrow \\ \alpha - \beta T_2 = 2\,675 - 419 \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} \alpha - 418\beta = 2\,129 = l_{vap}(T_1) \\ \alpha - 373\beta = 2\,256 = l_{vap}(T_2) \end{cases}$$

La résolution de ce système conduit à :

$$\beta = \frac{2\,256 - 2\,129}{418 - 373} \Rightarrow \beta = 2{,}82 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1} \quad \text{et} \quad \alpha = 3\,309 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}.$$

D'où $$\boxed{l_{vap}(T) \# (3\,309 - 2{,}82T) \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}}$$

2. La détente va s'accompagner d'une augmentation du volume et d'une diminution de la pression et de la température.



Supposons qu'elle s'accompagne effectivement d'une liquéfaction partielle (A → B) et écrivons que l'entropie dans les états « A » et « B » est la même (températures respectives T et T').

Or la variation d'entropie sur le chemin A → B associé à la détente est la même que sur le chemin A → A' → B' → B (S est une fonction d'état). On a donc :

$$\Delta S(A \to B) = \Delta S(A \to A') + \Delta S(A' \to B') + \Delta S(B' \to B).$$

Et d'après la définition de la chaleur latente :

$$\begin{cases} \Delta S(A' \to A) = \dfrac{l_{vap}(T)}{T} \quad \text{(pour l'unité de masse)} \\ \Delta S(B' \to B) = \dfrac{l_{vap}(T')}{T'}(1 - y). \end{cases}$$

D'autre part, l'état du liquide de saturation ne dépend que de la température d'équilibre T. La variation d'entropie sur le chemin A' → B' est alors donnée par (toujours pour l'unité de masse) :

$$\Delta S(A' \to B') = C\ln\left(\frac{T'}{T}\right) \quad \text{(C considéré comme constant).}$$

Soit au total :

$$\Delta S(A \to B) = -\frac{l_{vap}(T)}{T} + (1 - y)\frac{l_{vap}(T')}{T'} + C\ln\left(\frac{T'}{T}\right).$$

La valeur de y (si elle existe) est donc définie par la relation :

$$\boxed{y = \frac{C\ln\left(\frac{T'}{T}\right) + \frac{l_{vap}(T')}{T'} - \frac{l_{vap}(T)}{T}}{\frac{l_{vap}(T')}{T'}}}$$

Supposons alors T′ infiniment voisin de T : $T' = T - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ et $\varepsilon \ll T$).

La détente, à partir de l'état caractérisé par T, amorcera une liquéfaction partielle pour $y(\varepsilon) > 0$, soit pour :

$$C\ln\left(1 - \frac{\varepsilon}{T}\right) + \frac{l_{vap}(T-\varepsilon)}{T-\varepsilon} - \frac{l_{vap}(T)}{T} > 0 \quad (1)$$

Or $\ln\left(1 - \frac{\varepsilon}{T}\right) \sim -\frac{\varepsilon}{T}$ et :

$$\frac{l_{vap}(T-\varepsilon)}{T-\varepsilon} - \frac{l_{vap}(T)}{T} = \alpha\left(\frac{1}{T-\varepsilon} - \frac{1}{T}\right) \sim \frac{\alpha\varepsilon}{T^2}.$$

La condition (1) s'écrit alors : $\frac{\varepsilon}{T}\left(-C + \frac{\alpha}{T}\right) > 0$

c'est-à-dire $\boxed{T < \frac{\alpha}{C}}$

Application numérique : $T < \frac{3\,309}{4{,}186} \Rightarrow T < 790$ K.

L'hypothèse faite (de l'eau liquide apparait) est donc vérifiée. Il faut également noter que la température critique de l'eau est déjà inférieure à cette température limite ($T_C \approx 650$ K) !

Cependant, l'expression donnant l_{vap} n'est évidemment plus valable à ces températures, on aurait en effet :

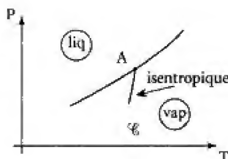
$$l_{vap}(650\text{ K}) = 3\,309 - 2{,}82 \times 650 = 1\,480\ \text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$$

alors qu'elle devrait être nulle !

Faisons maintenant $T = T_1 = 418$ K et $T' = T_2 = 373$ K.

$$y = \frac{4{,}186\ln\left(\frac{373}{418}\right) + \frac{2\,256}{373} - \frac{2\,129}{418}}{\frac{2\,256}{373}} \Rightarrow y = 7{,}9\cdot 10^{-2}.$$

3. Pour calculer la pente $\left.\frac{dP}{dT}\right)_{vap}$ de l'isentropique associée au gaz, on assimilera ce dernier à un gaz parfait de masse molaire M (il est alors nécessaire que la température T_1 soit suffisamment



On a (premier principe) :

$$\Delta U = Q + W \quad \text{avec} \quad W = -P_0 \Delta V.$$

Soit $\Delta U + P_0 \Delta V = Q \Rightarrow \Delta(U + P_0 V) = Q.$

Dans l'état initial et dans l'état final, la pression du fluide est P_0, et la quantité $U + P_0V$ représente l'enthalpie H de l'eau, soit :

$$\Delta H = Q.$$

Pour évaluer ΔH, considérons la transformation réversible $A \to A' \to B$:

$$\Delta H = \Delta H(A \to A') + \Delta H(A' \to B).$$

Or $\begin{cases} \Delta H(A, A') = -m\, l_{vap}(T_1) & \text{par définition de } l_{vap}(T_1) \\ \Delta H(A' \to B) = mC_L(T_0 - T_1). \end{cases}$

D'où $$\boxed{Q = mC_L\,(T_0 - T_1) - ml_{vap}(T_1)}$$

$\boxed{W = -P_0(v_0 - v_1)m}$ en fait $W \# P_0 v_1 m$

où v_1 et v_0 représentent les volumes massiques dans les états A [vapeur d'eau, $T_1 = 373$ K, $P = P_0 = 1$ atm] et B [eau liquide, $T_0 = 290$ K, $P = P_0 = 1$ atm].

Application numérique :

$Q = 0{,}5[4{,}18(290 - 373) - 2\,260] \Rightarrow$ **$Q = -1\,300$ kJ**

$W \# +0{,}5 \times 1{,}67 \times 1{,}013 \cdot 10^5 \Rightarrow$ **$W = 84{,}6$ kJ.**

1. b. Faisons maintenant un bilan entropique en prenant comme système le fluide. Désignons par S son entropie. Le second principe s'écrit :

$$\Delta S = S_e + \sigma \quad (\sigma = \text{création d'entropie}).$$

Le système « reçoit » l'énergie thermique Q du thermostat de température T_0, d'où :

$$S_e = \frac{Q}{T_0} = -\frac{m[l_{vap}(T_1) + C_L(T_1 - T_0)]}{T_0}.$$

D'autre part, le calcul de ΔS peut s'effectuer en reprenant le chemin réversible $A \to A' \to B$: $\Delta S = \Delta S(A \to A') + \Delta S(A' \to B)$, avec :

$$\Delta S(A \to A') = \frac{(-m\,l_{vap}(T_1))}{T_1}$$ (changement d'état vapeur → liquide à température T_1)

$$\Delta S(A' \to B) = \int_{T_1}^{T_0} \frac{mC_L\,dT}{T_1}$$ (transformation isobare et $dH = \delta Q$ avec $dH = mC_L dT$)

D'où : $$\Delta S = \frac{-m\,l_{vap}(T_1)}{T_1} + mC_L \ln\left(\frac{T_0}{T_1}\right).$$

Soit l'équation de bilan :

$$\frac{-m\,l_{vap}(T_1)}{T_1} + mC_L \ln\left(\frac{T_0}{T_1}\right) = -\frac{m[l_{vap}(T_1) + C_L(T_1 - T_0)]}{T_0} + \sigma$$

et : $$\boxed{\sigma = ml_{vap}(T_1)\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_1}\right) + mC_L\left[\left(\frac{T_1}{T_0} - 1\right) - \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right)\right]}$$

Ce qui peut s'écrire $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ avec :

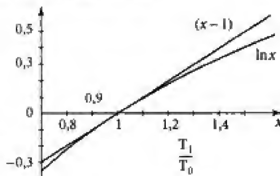
$$\sigma_1 = ml_{vap}(T_1)\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_1}\right) > 0 \text{ puisque } T_0 < T_1 \text{ et } l_{vap} > 0.$$

Cette création correspondrait au seul changement d'état de l'eau.

$$\sigma_2 = mC_L\left[\left(\frac{T_1}{T_0} - 1\right) - \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right)\right] > 0$$

(celle-ci est associée au passage de l'eau liquide de la température T_1 à la température T_0).

Dans les deux cas, l'énergie thermique est fournie par le thermostat (T_0).



Application numérique :

$$\sigma_1 = 0{,}5 \times 2\,260\left(\frac{1}{290} - \frac{1}{373}\right) \Rightarrow \sigma_1 = 0{,}867 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$\sigma_2 = 0{,}5 \times 4{,}18\left[\left(\frac{373}{290} - 1\right) - \ln\left(\frac{373}{290}\right)\right] \Rightarrow \sigma_2 = 0{,}072 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Soit au total $\sigma = 0{,}939$ kJ · K^{-1} $\Rightarrow$ $\sigma = \mathbf{0{,}94}$ **kJ · K^{-1}**.

2. a. Là aussi, la transformation est monobare mais contrairement au cas précédent, elle est adiabatique (et irréversible). Elle se caractérise donc par la relation $\Delta H = 0$.

Imaginons que l'état final soit associé à un équilibre liquide/solide à la pression imposée d'une atmosphère et à la température $T_0 = 273$ K comprenant une masse mx de glace et une masse $(1-x)m$ d'eau liquide. Pour déterminer ΔH, on peut prendre le chemin réversible suivant : chauffage du liquide jusqu'à T_0 puis solidification partielle :

$\Delta H = \Delta H(\text{eau liquide} : T_1 \to T_0) + \Delta H(\text{solidification partielle à } T_0)$.

$\Delta H(\text{liq} : T_1 \to T_0) = mC_L(T_0 - T_1)$.

$\Delta H(\text{solidification partielle à } T_0) = mx \cdot (-l_F(T_0))$.

Soit au total : $\Delta H = m[C_L(T_0 - T_1) - x\, l_F(T_0)]$.

Cette équation détermine x : $\boxed{x = \dfrac{C_L(T_0 - T_1)}{l_F(T_0)}}$ (1)

Application numérique : $x = \dfrac{4{,}18 \times (273 - 260)}{335}$; $x = 0{,}16$ et on est bien en présence d'un équilibre eau liquide-eau solide.

2. b. Faisons maintenant un bilan entropique, le système considéré étant la masse m d'eau.

Appliquons-lui le second principe : $\Delta S = S_e + \sigma$.

Le système est thermiquement isolé de telle sorte que $S_e = 0$.

Dans les deux cas, une particule chargée arrivant dans la chambre permet de faire cesser localement le retard au changement de phase : formation de gouttelettes (dans le cas de la chambre Wilson encore appelée chambre à brouillard), formation de bulles (pour la chambre à bulles) ⟶ matérialisation des trajectoires de ces particules chargées...

638 Vaporisation à T et P variables

Un cylindre (hauteur $h = 0{,}5$ m, section $s = 0{,}02\ \text{m}^2$) est séparé en deux parties par un piston de masse négligeable, mobile sans frottement. Le compartiment supérieur contient $n = 0{,}3$ mole d'air, et le compartiment inférieur une mole d'eau.

L'air et la vapeur d'eau seront considérés comme des gaz parfaits. La pression d'équilibre eau liquide-vapeur d'eau est donnée approximativement par $P_{éq}(T) = P_0 \cdot \left(\dfrac{T-273}{100}\right)^4$, avec $P_0 = 10^5$ Pa. Le cylindre et son contenu sont initialement à la température $T_1 = 300$ K, et on chauffe l'ensemble de manière progressive (quasi statique).

1. Décrire qualitativement l'évolution du système.

2. Tracer la courbe d'évolution de la pression de l'air dans le cylindre pour T variant de 300 K à 450 K.
On donnera les valeurs numériques des températures particulières permettant de décrire cette courbe.
Commenter.

Solution

1. Tant que l'eau demeure liquide, le piston mobile reste dans le « bas » du cylindre (volume de l'eau liquide négligeable devant le volume $V = sh$ du cylindre).

Ceci suppose que la pression de l'air est supérieure à la pression d'équilibre eau liquide-eau vapeur pour la température T. Montrons que c'est bien le cas pour $T = T_1$ ($P_{air}(T_1) > P_{éq}(T_1)$) :

• 1 mole d'eau liquide occupe un volume d'environ 18 cm³.

Or $V = hs = 0{,}5 \times 0{,}02 = 10^{-2}\ \text{m}^3 = 10$ L. On a bien $V \gg V_{eau\,liq}$, d'où :

• $P_{air}(T_1) = \dfrac{nRT_1}{V}$ $\quad (V_{air} = V - V_{eau\,liq} \approx V)$.

Soit $\quad P_{air}(T_1) = \dfrac{0{,}3 \cdot 8{,}31 \cdot 300}{0{,}5 \cdot 0{,}02} = 74{,}8\ \text{kPa} = 0{,}75\,P_0$

or $\quad P_{éq}(T_1) = P_0 \cdot \left(\dfrac{300-273}{100}\right)^4 \approx 0{,}005\,P_0$.

On a bien $P_{air}(T_1) \gg P_{éq}(T_1)$, et donc l'eau est à l'état liquide à cette température.

E. Machines thermiques

642 Machines dithermes : les trois cas intéressants

1. Peut-on réaliser un moteur thermique, une machine frigorifique, ou une pompe thermique à partir d'un fluide décrivant des cycles en échangeant de l'énergie thermique avec une seule source thermique de température T_s ?

2. On dispose désormais de deux réservoirs d'énergie thermique (thermostats de température T_F et T_C avec $T_C > T_F$). Reprendre la question précédente et définir dans chaque cas le rendement (ou l'efficacité) de la machine en fonction notamment de T_C, T_F et de la création d'entropie pour un cycle σ. Commenter.

Application numérique : pompe thermique réversible pour laquelle $T_F = 273$ K et $T_C = 292$ K. Donner la valeur du coefficient d'efficacité.

1. Ce qu'il faut savoir

- Premier principe – second principe.
- Définition d'un rendement ou d'une efficacité.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. Le fluide décrivant un cycle, ses fonctions d'état sont invariantes après chaque cycle. On a en particulier $\Delta U_{fluide}(\text{cycle}) = 0$ et $\Delta S_{fluide}(\text{cycle}) = 0$. D'autre part, la machine échange un travail W avec l'extérieur et une énergie thermique Q avec la seule source (de température T_s). Il suffit alors d'appliquer les deux principes de la thermodynamique, puis de prendre en compte les caractéristiques de chaque machine ($W < 0$ pour un moteur thermique, $W > 0$ dans les autres cas...).

2. Le principe d'étude est le même que celui décrit dans le cas précédent (mais il faut tenir compte des deux sources thermiques). Le rendement (ou l'efficacité) sera défini par le rapport de la grandeur énergétique utile – celle que l'on cherche à obtenir (en valeur absolue) – sur l'énergie prélevée (source non « gratuite » : énergie coûteuse à fournir).

3. Solution

1. Prenons comme système le fluide décrivant un cycle. Il est caractérisé par :

$$\Delta U_{fluide}(\text{cycle}) = 0 \quad \text{et} \quad \Delta S_{fluide}(\text{cycle}) = 0.$$

Le fluide reçoit un travail W et une énergie thermique Q (de la source à la température T_s), ce qui implique : $\Delta U_{fluide}(\text{cycle}) = W + Q$ (1[er] principe)

$$\Delta S_{fluide}(\text{cycle}) = \frac{Q}{T_s} + \sigma \quad \text{(2}^e\text{ principe)}$$

D'où les équations $\boxed{W + Q = 0 \quad \text{et} \quad Q = -T_s\sigma}$

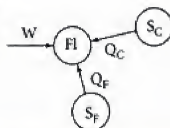
D'autre part, la création d'entropie σ est évidemment positive : $\sigma > 0$.

La transformation cyclique du fluide conduit alors à : $Q < 0$ et $W > 0$.

Ainsi, un moteur thermique fonctionnant sur ce type est impossible (on doit avoir $W < 0$ pour que du travail soit fourni à l'extérieur). Il en est de même d'une machine frigorifique, l'énergie thermique Q devant être prise à l'espace que l'on veut maintenir à basse température (ce qui imposerait $Q > 0$).

Par contre, une pompe thermique est envisageable ($W > 0$ et $Q < 0$: de l'énergie thermique est fournie à l'espace à « réchauffer »). Cependant, une telle machine aurait une efficacité égale à l'unité $e = \dfrac{|Q|}{W} = +1$ et ne présenterait guère d'intérêt du point de vue de notre étude : c'est en fait le cas du radiateur électrique.

2. Considérons maintenant une machine échangeant du travail W avec l'extérieur et de l'énergie thermique avec deux sources (source froide S_F et source chaude S_C).



Point méthode

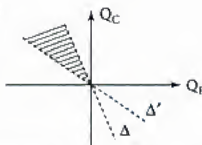
Les transferts énergétiques W, Q_C, Q_F sont des **grandeurs algébriques** « reçues » par le système fluide. Si elles sont positives, c'est qu'elles sont effectivement reçues par le système ; lorsqu'elles sont négatives, c'est que le transfert correspondant s'effectue dans le sens système fluide → extérieur. Ainsi, $W > 0$ implique que l'on doit fournir de l'énergie mécanique à la machine (c'est le cas d'une machine frigorifique), et $W < 0$ permet de concevoir des machines fournissant du travail à l'extérieur.

Le fluide décrivant toujours des cycles, il vient ici (pour un cycle) :

$$\begin{cases} \Delta U_{\text{fluide}}(\text{cycle}) = 0 = W + Q_C + Q_F \\ \Delta S_{\text{fluide}}(\text{cycle}) = 0 = S_e + \sigma = S_{e(\text{source froide})} + S_{e(\text{source chaude})} + \sigma \end{cases}$$

$$= \frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} + \sigma \quad \text{avec } \sigma > 0.$$

• **Moteur thermique** : dans ce cas, il faut que $W < 0$ ce qui impose $Q_C + Q_F > 0$ avec $\dfrac{Q_C}{T_C} + \dfrac{Q_F}{T_F} = -\sigma < 0$ le domaine de points figuratifs dans l'espace (Q_F, Q_C) correspond à la zone hachurée (*cf.* figure ci-contre).



Une telle machine fonctionnera donc avec $Q_C > 0$ et $Q_F < 0$, **c'est-à-dire en prélevant de l'énergie thermique à la source chaude et en la restituant à la source froide.**

$\Delta \equiv$ droite d'équation : $Q_C + \dfrac{T_C}{T_F}Q_F = 0$

$\Delta' \equiv$ droite d'équation : $Q_C + Q_F = 0$

l'efficacité est maximale lorsque le cycle est décrit de façon réversible ($\sigma = 0$).

$$e_{MF} \leq (e_{MF})_{rév} = \frac{1}{\left(\frac{T_C}{T_F} - 1\right)}$$

la valeur de $(e_{MF})_{rév}$ est d'autant plus grande que T_F est voisine de T_C (avec $T_F < T_C$).
Pour la pompe thermique, ce qui nous intéresse c'est l'énergie thermique fournie à la source chaude, d'où :

$$e_{PT} = \frac{-Q_C}{W} = \frac{Q_C}{Q_C + Q_F} = \frac{1}{1 + \frac{Q_F}{Q_C}}$$

or
$$\frac{Q_F}{T_F} + \frac{Q_C}{T_C} = -\sigma \quad \Rightarrow \quad \frac{Q_F}{Q_C} = -\frac{T_F}{T_C} - \frac{T_F\sigma}{Q_C}.$$

Finalement
$$e_{PT} = \frac{1}{\left(1 - \frac{T_F}{T_C}\right) + \frac{T_F\sigma}{(-Q_C)}}$$

la grandeur $\frac{T_F\sigma}{(-Q_C)}$ est positive, et l'efficacité est encore maximale dans le cadre de la réversibilité ($\sigma = 0$).

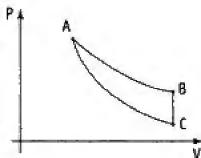
$$e_{PT} \leq (e_{PT})_{rév} = \frac{1}{1 - \frac{T_F}{T_C}}$$

De même, $(e_{PT})_{rév}$ est d'autant plus grand que T_F est proche de T_C.

Application numérique : $(e_{PT})_{rév} = \frac{1}{1 - \frac{273}{292}}$, soit $(e_{PT})_{rév} = 15{,}4$. Pour un même travail utilisé, l'énergie thermique est à peu près quinze fois plus importante que celle obtenue par conversion directe de travail en énergie thermique (radiateur électrique).

642 Cycle réversible – Cycle irréversible

Un gramme d'air, considéré comme un gaz parfait de masse molaire M = 29 g, décrit le cycle constitué de l'adiabatique CA, de l'isotherme AB et de l'isochore BC.



On prendra : $\gamma = 1{,}4$; $T_A = T_B = T_1 = 300$ K ; $T_C = T_0 = 155$ K ; $R = 8{,}31\ \text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

1. Le cycle est décrit dans le sens moteur et de façon réversible. Déterminer les échanges énergétiques avec l'extérieur pour chacune des transformations, ainsi que le travail W_T et l'énergie thermique Q_T reçus au cours d'un cycle.

Application numérique : donner la valeur de W_T.

2. Le cycle est maintenant décrit en sens inverse, les transformations BA et AC demeurant réversibles. Pendant l'isochore CB, l'air est en contact permanent avec la source à la température T_1.

a. Quelles sont les nouveaux échanges d'énergie ? Application numérique.

b. Déterminer la création d'entropie σ lorsque le fluide décrit un cycle de transformations. Application numérique.

1. Ce qu'il faut savoir

- Cycle moteur – cycle résistant.
- Loi de Laplace des gaz parfaits.
- Premier et second principes.

2. Ce qu'il faut comprendre

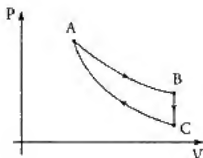
1. Un cycle moteur sera décrit dans le sens des aiguilles d'une montre ($W_T < 0$). Les échanges énergétique se calculeront en prenant en compte les caractéristiques de chacune des transformations (adiabatique → $Q = 0$; isochore → $W = 0$; isotherme → $\Delta U = 0$) et en utilisant le premier principe, la variation d'énergie interne s'exprimant simplement en fonction de la variation de température (pour un gaz parfait, $\Delta U = nC_v\Delta T$). Pour l'isotherme, la détermination de W s'effectuera par un calcul direct.

2. Le cycle est maintenant décrit en sens inverse, ce qui implique $W'_T = -W_T$ et $Q'_T = -Q_T$. Les échanges énergétiques pour les trois transformations sont simplement changés de signe (AB et AC transformations réversibles décrites en sens opposé). La création d'entropie (irréversibilité) est en fait associée à la transformation CB.

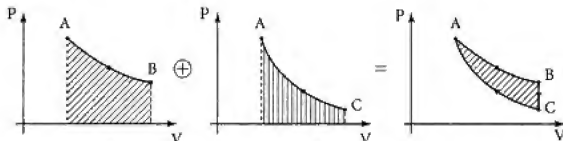
3. Solution

1. Le cycle proposé devant être moteur, il est décrit dans le sens rétrograde :

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A.$$



On a bien :



Échanges énergétiques associés à chaque transformation

α) *Isotherme* A → B :

On a $\Delta U = 0$ (gaz parfait), et $\Delta U = Q_{AB} + W_{AB}$ (premier principe).

Or $\delta W_{AB} = -PdV$ avec $P = \dfrac{nRT_1}{V} \Rightarrow \delta W_{AB} = -nRT_1 \dfrac{dV}{V}$

d'où : $W_{AB} = -nRT_1 \displaystyle\int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -nRT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$ $(V_B = V_2$ et $V_A = V_1)$.

Exprimons les volumes V_1 et V_2 en fonction des températures T_0 et T_1 des points C et A. À cet effet, il suffit de traduire que la transformation CA est isentropique, soit :

$$\left.\begin{array}{l} PV^\gamma = \text{constante} \\ \dfrac{PV}{T} = \text{constante} \end{array}\right\} \Rightarrow V^{\gamma-1} \cdot T = \text{constante}.$$

D'où $T_0 V_2^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1}$ et $\dfrac{V_2}{V_1} = \left(\dfrac{T_1}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$.

L'expression du travail W_{AB} devient :

$$W_{AB} = -nRT_1 \ln\left[\left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\right] \Rightarrow W_{AB} = -\frac{nR}{\gamma-1} T_1 \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) < 0.$$

D'où : $Q_{AB} = \dfrac{nR}{\gamma-1} T_1 \ln\left(\dfrac{T_1}{T_0}\right)$.

β) *Isochore* B → C :

Le volume est invariable, et aucun travail n'est échangé : $W_{BC} = 0$.

D'où, d'après le premier principe : $\Delta U = nC_v(T_0 - T_1) = Q_{BC} + 0$;

soit : $Q_{BC} = \dfrac{nR}{\gamma - 1}(T_0 - T_1)$ (avec $C_v = \dfrac{R}{\gamma - 1}$).

γ) *Isentropique* C → A :

Il n'y a pas d'échange thermique ce qui implique $Q_{CA} = 0$, le système reçoit alors le travail W défini par (premier principe) :

$W_{CA} = \Delta U = nC_v(T_1 - T_0)$ puisque $T_C = T_0$ et $T_A = T_1$.

Finalement $Q_{CA} = 0$ et $W_{CA} = \dfrac{nR}{\gamma - 1}(T_1 - T_0) > 0$.

Au total, l'énergie thermique Q_T et le travail W_T « reçus » s'expriment par :

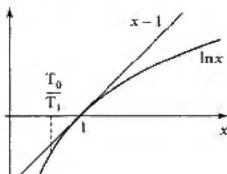
$$Q_T = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} \Rightarrow \boxed{Q_T = \frac{nR}{\gamma - 1}\left[(T_0 - T_1) + T_1 \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right)\right]}$$

$$W_T = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA} \Rightarrow \boxed{W_T = \frac{nR}{\gamma - 1}\left[(T_1 - T_0) - T_1 \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right)\right]}$$

On a bien $W_T + Q_T = 0$ (puisque sur un cycle, $\Delta U = 0 = W_T + Q_T$).

D'autre part, le cycle est effectivement moteur, W_T est négatif :

$$W_T = \frac{nRT_1}{\gamma - 1}\left[-\left(\frac{T_0}{T_1} - 1\right) + \ln\left(\frac{T_0}{T_1}\right)\right] < 0.$$



Application numérique :

$n = \dfrac{1}{M} = \dfrac{1}{29}$;

$W_T = \dfrac{8{,}31}{29 \times 0{,}4}\left[(300 - 155) - 300 \ln\left(\dfrac{300}{155}\right)\right]$: $W_T = -38$ J.

Commentaires

L'étude précédente doit être en accord avec le second principe. Le cycle étant décrit de façon réversible, nous avons : $\Delta S_{cycle}(\text{fluide}) = 0 = S_e + 0$ ($\sigma = 0$: réversibilité).

Les échanges thermiques ont lieu lors des transformations AB et BC.

La transformation AB étant isotherme :

$$(S_{\text{échange}})_{AB} = \frac{Q_{AB}}{T_1} = \frac{nR}{\gamma - 1}\ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right).$$

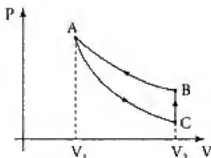
La transformation BC est isochore réversible, la température de l'air évoluant continûment des valeurs T_1 à T_0. Il suffit alors d'imaginer que cette évolution s'effectue en mettant le système en contact avec un nombre infini de sources dont les températures s'échelonnent entre T_1 et T_0. Ainsi :

$(\delta S_{échange}) = \frac{\delta Q}{T}$, avec $\delta Q = dU = nC_v dT$ $(\delta W = 0)$.

D'où : $(\delta S_{échange}) = nC_v \frac{dT}{T}$ et $(S_{échange})_{BC} = \frac{nR}{\gamma - 1}\int_{T_1}^{T_0} \frac{dT}{T} = \frac{nR}{\gamma - 1}\ln\left(\frac{T_0}{T_1}\right)$.

On a bien : $(S_{échange})_{AB} + (S_{échange})_{BC} = 0$.

2. a. Les échanges énergétiques s'effectuent maintenant en sens inverse. Les transformations AC et BA étant réversibles il vient :



$$\begin{cases} Q'_{AC} = -Q_{CA} = 0, \text{ et } W'_{AC} = -W_{CA} \\ Q'_{BA} = -Q_{AB} \quad \text{et } W'_{BA} = -W_{AB} \end{cases}$$

Pour la transformation isochore CB le travail reste nul puisque le volume est invariable, et les états C et B demeurant les mêmes nous avons :

$W'_{CB} = 0$ et $Q'_{CB} = \Delta U' = nC_v(T_1 - T_0) = -Q_{BC}$.

Pour le travail total et l'énergie thermique totale :

$W'_T = W'_{AC} + W'_{BA} + W'_{CB} = -W_T$ (même cycle décrit en sens inverse).

$Q'_T = Q'_{AC} + Q'_{BA} + Q'_{CB} = -Q_T$ (pour un cycle $W'_T + Q'_T = 0$).

Application numérique : $W'_T = 38$ J *et* $Q'_T = -38$ J.

2. b. Considérons un cycle. La variation d'entropie de l'air correspondant à un cycle est nulle (même état initial et même état final) :

$$\Delta S = 0.$$

Or d'après le second principe :

$$\Delta S = S_{échange} + \sigma \quad (\sigma : \text{création d'entropie}).$$

Les échanges thermiques se font avec la source thermique à la température T_1 (transformations CB et BA). D'où :

$$(\Delta S)_{échange} = \frac{Q'}{T_1} = \frac{Q'_{CB} + Q'_{BA}}{T_1} = \frac{Q'_T}{T_1} = \frac{-W'_T}{T_1} = \frac{W_T}{T_1}.$$

Dès lors : $\sigma = -\frac{W_T}{T_1}$.

Finalement
$$\boxed{\sigma = \frac{nR}{\gamma - 1}\left[-\left(1 - \frac{T_0}{T_1}\right) + \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right)\right]}$$

(Cette quantité est bien positive conformément à l'étude faite pour W_T à la question **1.**).

Application numérique : $\sigma = \frac{(-W_T)}{T_1} = \frac{38}{300} \Rightarrow \sigma = 0{,}13 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

L'irréversibilité se situe dans la transformation CB pour laquelle il y a un transfert thermique entre le système fluide dont la température n'est pas constamment égale à celle de la source thermique avec laquelle elle est en relation.

Or pour cette transformation, le second principe s'écrit :

$\Delta S_{CB} = (S_{échange})_{CB} + \sigma_{CB}$

avec $(S_{échange})_{CB} = \dfrac{Q'_{CB}}{T_1}$ (l'échange thermique se produit avec la source de température T_1). D'autre part d'après la formule donnant ΔS pour un gaz parfait :

$$\Delta S_{CB} = nC_v \ln\left(\frac{P_B V_B^\gamma}{P_C V_C^\gamma}\right) = nC_v \ln\left(\frac{P_B}{P_C}\right);\ (V_B = V_C)$$

et $\dfrac{P_B}{P_C} = \dfrac{T_B}{T_C} = \dfrac{T_1}{T_0}$ (gaz parfait avec $V_B = V_C$).

D'où : $\Delta S_{CB} = \dfrac{nR}{\gamma - 1}\ln\left(\dfrac{T_1}{T_0}\right)$.

Soit une création d'entropie :

$$\sigma_{CB} = \frac{nR}{\gamma-1}\ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) - \frac{Q'_{CB}}{T_1} \quad \text{avec} \quad Q'_{CB} = \frac{nR}{\gamma-1}(T_1 - T_0).$$

Nous obtenons donc comme il se doit : $\sigma_{cycle} = \dfrac{nR}{\gamma-1}\left[\left(\dfrac{T_0}{T_1} - 1\right) + \ln\left(\dfrac{T_1}{T_0}\right)\right]$.

643 Cycle de Joule

Un kilogramme d'air décrit le cycle thermodynamique suivant :

état A : $T_0 = 300$ K, $P_0 = 10^5$ Pa ; état B : T_1, $P_1 = kP_0$

état C : $T_2 = 1\ 000$ K, P_1 ; état D : T_3, P_0

transformations AB et CD : adiabatiques réversibles ;

transformations BC et DA : isobares.

L'air est assimilé à un gaz parfait, de capacité calorifique massique à pression constante C_p et de rapport $\gamma = 1{,}40$.

1. Calculer les valeurs des températures T_1 et T_3 pour $k = 10$.

Donner l'allure du cycle en diagramme de Clapeyron (P en fonction de V).

2. Faire le bilan énergétique du cycle :

- quantités d'énergie thermique échangées ;
- travail total : est-il reçu ou fourni ?

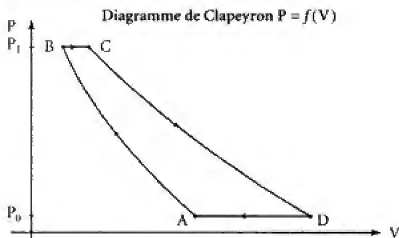
De quel type de machine s'agit-il ? Définir et calculer son rendement (ou efficacité).

3. Les échanges thermiques du fluide ont lieu uniquement avec deux sources :

- une source chaude à T_2 ;
- une source froide à T_0.

d'où $$T_3 = T_2 k^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

Application numérique : $T_3 = 518$ K.



2. Pour les transformations adiabatiques, $Q_{A \to B} = Q_{C \to D} = 0$.

Pour les transformations isobares $Q = \Delta H$

$$Q_{B \to C} = nC_p(T_2 - T_1) \quad \text{et} \quad Q_{D \to A} = nC_p(T_0 - T_3)$$

avec $n = \dfrac{m}{M}$ et $C_p = \dfrac{R\gamma}{\gamma - 1}$.

Déterminons le travail total ; le gaz décrit un cycle :

$$\Delta U = 0.$$

D'après le premier principe, $\Delta U = W + Q$.

On a donc : $W = -Q = -Q_{B \to C} - Q_{D \to A} = nC_p(T_1 + T_3 - T_2 - T_0)$.

> **POINT COURS**
>
> **Le cycle est décrit dans le sens rétrograde dans le diagramme de Clapeyron. Le travail total est donc fourni à l'extérieur ($W < 0$). D'autre part, l'aire du cycle correspond à $|W|$.**

Il s'agit donc d'un moteur dont le rendement ρ est défini par :

$$\rho = \frac{\text{quantité utile obtenue}}{\text{quantité « onéreuse » fournie}}$$

$$\rho = -\frac{W_{total}}{Q_{B \to C}}.$$

D'où $$\rho = 1 - \frac{T_3 - T_0}{T_2 - T_1}$$

Application numérique : $\rho = \rho_0 = 0{,}48$.

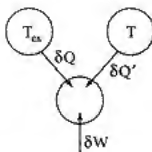
3. Le cycle étudié n'est pas réversible, les échanges d'énergie thermique avec les sources ne l'étant pas ($T_{syst} \neq T_{sources}$).

2. Le fonctionnement irréversible de la machine doit nécessiter un apport de travail électrique plus important pour faire passer la température de la pièce de $T_i = T_{ex}$ à T_F ($W_{irr} > W_r$).

3. Il faut, par rapport au **1.**, modifier le bilan d'énergie relatif à la pièce et tenir compte des échanges thermiques directs entre l'air extérieur et la pièce.

3. Solution

1. La température de la pièce va évoluer de la température initiale T_{ex} à la température finale T_F. Au cours d'un cycle donné, la machine reçoit le travail δW, l'énergie thermique δQ de la source chaude (air extérieur) et l'énergie thermique $\delta Q'$ de la source « froide » (la pièce à refroidir). Son fonctionnement est du type « **machine frigorifique** » de telle sorte que : $\delta W > 0$ $\delta Q' > 0$ et $\delta Q < 0$.



Sur un cycle, le premier principe s'écrit ($\Delta U = 0$)

$$\delta W + \delta Q + \delta Q' = 0 \quad (1)$$

En supposant de plus que la variation de température (sur un cycle) est suffisamment faible, le deuxième principe prend la forme (**cas de la réversibilité**) :

$$\underbrace{0}_{\delta S_{fluide}} = \underbrace{\left(\frac{\delta Q}{T_{ex}} + \frac{\delta Q'}{T}\right)}_{\delta S_{échange}} + \underbrace{0}_{\delta\sigma = 0} \quad (2)$$

Il reste à traduire que la pièce se refroidit sous l'effet du prélèvement d'énergie thermique $\delta Q'$. Appliquons-lui le premier principe.

$$dU(\text{pièce}) = CdT = -\delta Q' \quad (3)$$

Intégrons ces équations de l'état initial ($T = T_{ex}$) à l'état final $T = T_F$.

(1) donne : $W + Q + Q' = 0$

(3) devient : $Q' = -C(T_F - T_{ex})$

(2) se transforme en : $\delta Q = \frac{T_{ex}}{T}CdT \Rightarrow Q = CT_{ex}\int_{T_{ex}}^{T_F}\frac{dT}{T}$

d'où : $Q = -CT_{ex}\ln\left(\frac{T_{ex}}{T_F}\right)$.

Le travail électrique total à fournir à la machine a pour valeur :

$$W_r = C(T_F - T_{ex}) + CT_{ex}\,\text{Ln}\left(\frac{T_{ex}}{T_F}\right).$$

Soit encore

$$\boxed{W_r = CT_{ex}\left[\ln\left(\frac{T_{ex}}{T_F}\right) - \left(1 - \frac{T_F}{T_{ex}}\right)\right]}$$

Application numérique :

$$W_r = 5\cdot 10^5 \times 298\left[\ln\left(\frac{298}{293}\right) - \left(1 - \frac{293}{298}\right)\right] \Rightarrow \mathbf{W = 212\ kJ.}$$

• Le temps τ nécessaire pour faire passer la pièce de la température T_{ex} à la température T_F est alors : $\tau = \frac{W_r}{P} \Rightarrow \tau = 848 \text{ s} = 14 \text{ min}.$

2. La machine fonctionne maintenant de façon irréversible. Reprenons le second principe appliqué au fluide décrivant un cycle :

$$\delta S(\text{fluide}) \underset{\text{cycle}}{=} 0 = \delta S_e + \underbrace{\delta\sigma}_{\text{création d'entropie positive}}$$

Or $\delta S_e = \frac{\delta Q_{ex}}{T_{ex}} + \frac{\delta Q'}{T}$. Soit $0 = \frac{\delta Q_{ex}}{T_{ex}} + \frac{\delta Q'}{T} + \delta\sigma.$

Or $\delta Q' = -CdT$ (*cf.* (3)) $\Rightarrow Q' = -\int_{T_{ex}}^{T_F} CdT = C(T_{ex} - T_F)$

et $\delta Q_{ex} = T_{ex}C\frac{dT}{T} - T_{ex}\delta\sigma.$

D'où $Q_{ex} = CT_{ex}\ln\left(\frac{T_F}{T_{ex}}\right) - \sigma T_{ex}.$

σ est la création d'entropie totale traduisant l'irréversibilité de la machine. Il en résulte un travail électrique W_{irr} tel que :

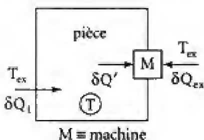
$$W_{irr} = -Q - Q' = -C(T_{ex} - T_F) + CT_{ex}\text{Ln}\left(\frac{T_{ex}}{T_F}\right) + \sigma T_{ex}.$$

Finalement $\boxed{W_{irr} - W_r = T_{ex}\sigma}$

Le travail à fournir est bien minimal ($W_r > 0$, $W_{irr} > 0$ et $\sigma > 0$) dans le cas d'une machine réversible : $W_{irr} > W_r$. Et pour une puissance d'alimentation constante (P = constante), il faudra plus de temps pour amener la pièce à température…

3. Le premier principe appliqué à la pièce s'écrit :

$$dU = CdT = -\delta Q' + \delta Q_1.$$



Ainsi, la nouvelle expression de $\delta Q'$ est :

$$\delta Q' = -CdT + h(T_{ex} - T)dt.$$

Soit, dans le cas d'un fonctionnement réversible de la machine :

$$0 = \frac{\delta Q_{ex}}{T_{ex}} + \frac{\delta Q'}{T} + 0 \quad \text{soit} \quad \delta Q_{ex} = -\frac{T_{ex}}{T}\delta Q'.$$

De plus (premier principe) : $\delta W + \delta Q_{ex} + \delta Q' = 0$ pour un cycle.

D'où $\mathcal{P} = \frac{\delta W}{dt} = -\frac{\delta Q_{ex}}{dt} - \frac{\delta Q'}{dt} = -\frac{\delta Q'}{dt}\cdot\left(1 - \frac{T_{ex}}{T}\right)$

et $\mathcal{P} = \left(1 - \frac{T_{ex}}{T}\right)\cdot\left\{C\frac{dT}{dt} - h(T_{ex} - T)\right\}.$

a. Déterminer l'efficacité η de la pompe à chaleur : on utilisera les valeurs numériques fournies dans le tableau de données présenté ci-après.

b. Faire un bilan d'énergie.

2. Afin d'améliorer l'efficacité de la machine, on modifie l'état final de la transformation $2 \to 3$. En 3, le fluide est désormais dans l'état liquide à la température $t' = 40$ °C et sous la pression $P = 15,2$ bars.
Donner la nouvelle valeur du coefficient η.
Tableau de valeurs :

t (°C)	P (bars)	h_L	h_v	s_v
5 °C	3,6	4,7	157	0,565
60 °C	15,2	61	178	0,552
40 °C	15,2	39	–	–

h_L et h_v (enthalpies massiques du liquide de saturation et de la vapeur saturante) en $kJ \cdot kg^{-1}$;
s_v (entropie massique de la vapeur saturante) en $kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$;
capacité thermique à pression constante du gaz fréon (au voisinage de $t = 60$ °C) $C_p = 0,879\ kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$; 1 bar $= 10^5$ Pa.

1. Ce qu'il faut savoir

- Machines thermiques.
- Détente isenthalpique.
- Transformation isobare.
- Premier principe et écoulements.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. La pompe à chaleur prélève une énergie thermique Q à la source froide (ici l'air extérieur), fournit l'énergie thermique Q′ à la source chaude (la maison) et absorbe un travail W au niveau du compresseur. L'efficacité de la machine est définie par $\eta = \frac{|Q'|}{W}$. La détermination des grandeurs énergétiques Q′ et W peut s'effectuer par la connaissance des enthalpies massiques h_1, h_2 et h_3. Les valeurs de h_1 et h_3 se lisent directement sur le tableau, il reste donc à calculer h_2 et par là-même la température t_2' du fluide dans cet état. L'évaluation de t_2' se fera en déterminant la variation d'entropie entre les états (t_2', P_2) et (t_2, P_2) et en se rappelant que la compression est isentropique.

2. Dans la deuxième question, le passage dans le condenseur s'effectue avec un refroidissement supplémentaire ($t_2 = 60$ °C $\to t' = 40$ °C) ce qui augmente la valeur de l'énergie thermique transférée à la maison. Le travail nécessaire restant inchangé (les états 1 et 2 sont les mêmes), l'efficacité de la machine s'en trouvera améliorée.

3. Solution

1. a. Nous avons représenté ci-contre sur un diagramme (P, V) le cycle décrit par le fluide (cycle rapporté par exemple à l'unité de masse de fréon).

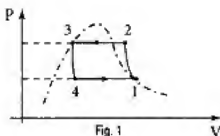


Fig. 1

• 1 → 2 correspond à la compression adiabatique réversible, le compresseur recevant un travail extérieur W (par kg de fréon).

• 2 → 3 est une transformation isobare s'effectuant dans le condenseur qui absorbe l'énergie thermique Q' prise au fluide (par kg de fréon).

• 3 → 4 est une détente isenthalpique où le fréon se vaporise en partie ; le titre en masse de fréon liquide passe de la valeur $x = 1$ à une valeur $0 < x < 1$. Cette transformation s'effectue sans échanges d'énergie thermique et de travail avec l'extérieur.

• 4 → 1 est une transformation isobare s'effectuant dans l'évaporateur. Un kg de fréon prélève une énergie thermique $Q > 0$ à l'air extérieur (source froide).

L'efficacité est définie par :

$$\eta = \frac{\text{énergie utile fournie}}{\text{énergie dépensée}}.$$

Soit encore $\eta = \dfrac{Q'}{W} = \dfrac{Q'(2 \to 3)}{W(1 \to 2)}$ (1)

■ **Travail W fourni à la machine (pour 1 kg de fréon) :**

Le premier principe appliqué au compresseur et dans le cadre des écoulements s'écrit :

$$\Delta H = W.$$

D'où $W = h_2 - h_1 = h_v(t_2', P_2) - h_v(t_1, P_1)$ (2)

où $h_v(t, P)$ représente l'enthalpie massique de la vapeur dans l'état t (température en degré Celsius) et P (pression en bar).

On a $h_v(5 ; 3{,}6) = 157\ \text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ (*cf.* tableau). La détermination de $h_v = (t_2', 15{,}2)$ passe par celle de t_2' ; à cet effet, il faut traduire que la compression est adiabatique et réversible, et donc isentropique :

$s(t_2', P_2) = s(t_1, P_1)$ (3)

les données nous permettent de connaître $s(t_1, P_1) = 0{,}565\ \text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

et $s(t_2, P_2) = 0{,}552\ \text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ avec $t_2 = 60\ °\text{C}$.

Faisons alors l'hypothèse que t_2' est suffisamment proche de t_2 pour que l'on puisse considérer que la capacité thermique C_p du gaz est constante (et égale à $C_p = 0{,}879\ \text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$) sur l'intervalle de températures $[t_2, t_2']$. Dès lors, en assimilant la vapeur à un gaz parfait :

$$\Delta s = C_p \ln\left(\frac{T_2'}{T_2}\right) = s(t_2', P_2) - s(t_2, P_2).$$

D'où d'après (3) : $T_2' = T_2 \exp\left\{\dfrac{s(t_1, P_1) - s(t_2, P_2)}{C_p}\right\}.$

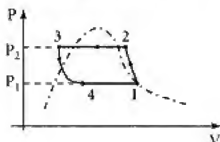
Ce qui était évident puisque $\Delta H(3 \to 4 \to 1) = \underbrace{\Delta H(3 \to 4)}_{0} + \Delta H(4\,;1)$.

Application numérique :

$Q = 157 - 61 = 96 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \quad x = 0{,}63.$

On a $W + Q + (-Q') = 0$ ce qui est bien entendu conforme à $\Delta H(\text{cycle}) = 0$.

2. Pour ce nouveau cycle, seuls les états 3 et 4 sont modifiés. Il en résulte que W garde la même valeur.



Quant à Q', il vaut désormais :

$Q' = -(h'_3 - h_2) = h_v(t'_2, P_2) - h_L(t', P_2)$.

D'où : $W = 25{,}4 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

$Q' = 182 - 39 \Rightarrow Q' = 143 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Soit une efficacité $\eta = \dfrac{Q'}{W} = \dfrac{143}{25{,}4} \Rightarrow \eta = 5{,}6$.

646 Moteur Diesel

Un moteur à combustion interne du type Diesel fonctionne selon le principe idéalisé suivant :

– 1er temps : soupape d'admission ouverte, soupape d'échappement fermée, de l'air est admis dans le cylindre dans les conditions de température et de pression T_1 et P_1. Le volume maximal du cylindre est V_1.

– 2e temps : soupapes fermées, l'air est comprimé isentropiquement de l'état (T_1, P_1, V_1) à l'état (T_2, P_2, V_2).

– 3e temps : soupapes fermées, le combustible est introduit, ce qui produit une combustion isobare jusqu'à un volume V'_2 (état T'_2, V'_2, P_2) suivie d'une détente isentropique jusqu'à l'état (T_3, V_1, P_3).

– 4e temps : soupape d'admission fermée, la soupape d'échappement s'ouvre, ce qui provoque une brusque chute de pression $(T_3, P_3) \to (T_1, P_1)$, le piston restant immobile. Puis les gaz sont évacués.

Pour plus de simplicité, on considérera un seul cylindre dont le volume offert varie entre les valeurs V_1 et V_2. On donne :

- la cylindrée : $V_1 - V_2 = 1\,769 \text{ cm}^3$;
- le rapport volumétrique : $\alpha = \dfrac{V_1}{V_2} = 23$;
- la consommation $c = 5{,}2$ litres aux 100 km à vitesse stabilisée $V_{st} = 120 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ (correspondant à 4 600 tours par minute) ;

• le carburant est du gazole de masse volumique $\mu = 800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et de pouvoir thermique $K = 45 \text{ kJ} \cdot \text{g}^{-1}$;

• on prendra $P_1 = 10^5$ Pa, et on négligera les variations de composition chimique du fluide que l'on assimile à un gaz parfait avec $\gamma = 1,4$.

1. On note $\beta = \frac{V_1}{V_2'}$ le rapport de détente. Exprimer le rendement théorique η du moteur Diesel en fonction des températures T_1, T_2, T_2' et T_3, puis en fonction des coefficients α, β et γ.

2. Donner l'expression définissant le rapport de détente β en fonction du rapport volumétrique α, du coefficient γ et de la quantité $\frac{Q}{P_1V_1}$, Q représentant l'énergie thermique dégagée par la combustion pour un cycle. En déduire les valeurs numériques de Q, β et η.

Déterminer la puissance du moteur dans les conditions précisées par cette étude.

1. Ce qu'il faut savoir

- Premier principe.
- Machines thermiques.
- Loi de Laplace.

2. Ce qu'il faut comprendre

Le rendement η du moteur est défini par le rapport du travail W produit à l'énergie thermique Q résultant de la combustion (W et Q sont calculés pour un cycle).

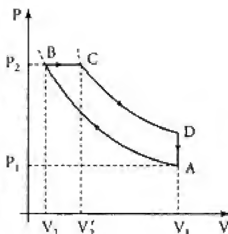
Q est associé à une transformation isobare et s'identifie donc à ΔH.

Pour déterminer β, il faut connaître V_2'.

3. Solution

1. Considérons le système formé par la masse de fluide décrivant le cycle ABCD :

- compression isentropique AB ;
- combustion isobare BC qui fournit l'énergie thermique Q (cette phase constitue l'équivalent de la source chaude) ;
- détente isentropique CD ;
- transformation isochore DA, le fluide libérant l'énergie thermique Q' (pendant cette phase, le piston reste immobile et ne développe donc aucun travail).



Nous avons $r = \frac{V_2'}{V_2} = \frac{V_2'}{V_1} \cdot \frac{V_1}{V_2} = \frac{\alpha}{\beta}$ soit :

$$\eta = 1 - \frac{\alpha^{-\gamma}(1 - r^{\gamma})}{\gamma\alpha^{-1}(1 - r)} \Rightarrow \boxed{\eta = 1 - \frac{(r^{\gamma} - 1)}{\gamma\alpha^{\gamma - 1}(r - 1)}}$$

2. $Q = nC_p(T_2' - T_2)$ avec $\frac{P_2V_2'}{T_2'} = \frac{P_2V_2}{T_2}$ soit $V_2' = V_2 \cdot \left(\frac{T_2'}{T_2}\right)$.

D'autre part, le nombre de moles de fluide (essentiellement de l'air…) est donné par la relation des gaz parfaits : $n = \frac{P_2V_2}{RT_2} = \frac{P_1V_1}{RT_1}$.

D'où $$\frac{V_2'}{V_1} = \frac{V_2}{V_1} \cdot \left(\frac{T_2'}{T_2}\right) = \frac{V_2}{V_1} \cdot \left\{1 + \frac{Q}{nC_pT_2}\right\}.$$

Or $$nC_pT_1 = n \cdot \left(\frac{\gamma R}{\gamma - 1}\right)T_1 = \frac{\gamma}{\gamma - 1}nRT_1 = \frac{\gamma}{\gamma - 1}P_1V_1.$$

Soit $$\beta = \frac{\alpha}{1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{T_1}{T_2}\frac{Q}{P_1V_1}} \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{\alpha}{1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma}\alpha^{1-\gamma}\frac{Q}{P_1V_1}}}$$

Calculons alors l'énergie thermique produite par la combustion. Une consommation de c litres d'essence pour 100 km associée à une vitesse stabilisée de V_{st} km par heure correspond à l'utilisation d'une masse m d'essence par seconde définie par :

$$m = \underset{\uparrow \text{ masse volumique}}{\mu} \times \left[\underbrace{\left(c \times \frac{V_{st}}{100}\right) \times \frac{10^{-3}}{3\,600}}_{\text{volume d'essence par seconde}}\right]; \quad (10^{-3} \text{ car } 1 \text{ L} = 10^{-3} \text{ m}^3).$$

Le moteur effectuant N′ tours par seconde (soit $N = 60N'$ tours par minute), la durée d'un cycle est de $\Delta t = \frac{2}{N'}$ (2 tours par cycle).

Soit une masse m_c d'essence pour un cycle telle que :

$$m_c = m \cdot \Delta t = \mu\frac{2}{N'}c\frac{V_{st}}{100} \cdot \frac{10^{-3}}{3\,600}.$$

L'énergie thermique dégagée par la combustion devient (K représentant le pouvoir thermique du carburant) : $Q = Km_c \Rightarrow Q = K\frac{2 \times 60}{N}\mu c V_{st}\frac{10^{-5}}{3\,600}$.

Application numérique : $K = 45 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

$$Q_{kJ} = 45 \cdot 10^3 \times \frac{2 \times 60}{4\,600} \times 800 \times 5{,}2 \times \frac{120}{100} \times \frac{10^{-3}}{3\,600} \Rightarrow Q = 1{,}63 \text{ kJ}.$$

$$\bullet\ P_1V_1 = 10^5V_1 \text{ avec } \left|\begin{array}{l} V_1 - V_2 = 1\,769 \text{ cm}^3 \\ \frac{V_1}{V_2} = 23 \end{array}\right| \Rightarrow V_1 = 1\,849 \text{ cm}^3$$

d'où $$P_1V_1 = 185 \text{ J}.$$

• $\beta = 23\left[1 + 23^{-0,4} \times \frac{0,4 \times 1\,630}{1,4 \times 185}\right]^{-1} \Rightarrow \beta = 13,4.$

• Rendement théorique : $\eta = 1 - \frac{(23)^{-1,4} - (13,4)^{-1,4}}{1,4((23)^{-1} - (13,4)^{-1})} \Rightarrow \eta = 0,68.$

• La puissance théorique est reliée à la consommation thermique par seconde $\left(\frac{\delta Q}{\delta t}\right)$ par la relation $\mathcal{P} = \eta \frac{\delta Q}{\delta t}$.

Or $$\frac{\delta Q}{\delta t} = Km = K\mu C \frac{V_{tat}}{100} \cdot \frac{10^{-3}}{3\,600}. \quad \text{Soit} \quad \mathcal{P} = \eta K m$$

$$\mathcal{P}(\text{kW}) = 0,68 \times 45 \cdot 10^3 \times 800 \times 5,2 \times 1,2 \times \frac{10^{-3}}{3\,600} \Rightarrow \mathcal{P} = 42 \text{ kW}.$$

Commentaires

• Comme le moteur à explosion du type « Beau de Rochas », le moteur Diesel est un moteur à combustion interne. Mais l'allumage est réalisé par une compression élevée de l'air seul. L'injection du carburant dans le cylindre débute donc à la fin de cette phase de compression et assure une combustion (température élevée de l'air) qui s'effectue à peu près à pression constante. Il permet l'utilisation de sous produits du raffinage du pétrole et le taux de compression $\alpha = \frac{V_1}{V_2}$ peut être plus élevé que dans un moteur à explosion (il n'y a pas de risque de pré-allumage...).

• Le rendement théorique associé au cycle diesel peut encore s'écrire :

$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma\alpha^{\gamma-1}} \cdot \left(\frac{r^\gamma - 1}{r - 1}\right) \quad \text{où} \quad r = \frac{V_2'}{V_2} > 1.$$

Le rendement – à γ donné et rapport volumétrique α fixé – augmente lorsque r diminue.

De plus, pour comparer ce rendement à celui $\eta' = 1 - \frac{1}{\alpha^{\gamma-1}}$ d'un moteur à explosion, on pourrait remarquer que $\eta = 1 - \frac{1}{\alpha^{\gamma-1}}F(r, \gamma)$, où $F(r, \gamma) = \frac{r^\gamma - 1}{\gamma(r-1)} > 1$. Ceci laisserait à penser que $\eta < \eta'$; cependant il faut noter que le rapport volumétrique pour un moteur Diesel est supérieur à celui du moteur à explosion (typiquement de l'ordre de 22 au lieu de 9), ce qui implique un rendement en général supérieur à celui du moteur à allumage commandé.

647 Moteur avec sources à températures variables

Un moteur thermique fonctionne à partir de deux « sources » d'énergie thermique, de même capacité thermique C et dont les températures initiales sont T_{10} et T_{20} (avec $T_{20} > T_{10}$). On notera W_f le travail fourni à l'extérieur.

1. Déterminer les valeurs minimale et maximale de W_f.

2. Donner l'expression reliant le travail fourni à la création totale d'entropie Σ. Quelle est la valeur maximale de Σ ?

3. a. Définir le rendement η d'un tel moteur. Montrer que l'on a $\eta_{min} \leq \eta \leq \eta_{max}$, et préciser les valeurs extrémales de η en fonction de T_{10} et T_{20}.

Calculer ses valeurs pour $T_{10} = 300$ K et $T_{20} = 400$ K.

b. On suppose que sur un cycle élémentaire, les variations des températures T_1 et T_2 des deux « sources » restent très faibles. On note $\eta_c(T_1, T_2)$ le rendement d'un cycle de Carnot moteur travaillant sur des sources thermiques de températures constantes égales à T_1 et T_2. Quel lien peut-on faire entre η_{max} et $\eta_c(T_2)$?

Solution

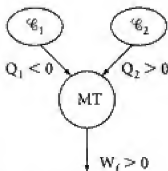
1. La machine doit fournir du travail à l'extérieur. On a donc $W_f \geq 0$, et la valeur la plus petite de W_f est évidemment zéro.

• La valeur maximale doit correspondre au cas de la **réversibilité** (pas de création d'entropie). Dans ces conditions, le premier et le second principe donnent (pour un cycle élémentaire) :

$$(-\delta W_f) + \delta Q_2 + \delta Q_1 = \delta U = 0 \quad (1)$$

$$\delta S = 0 = \frac{\delta Q_2}{T_2} + \frac{\delta Q_1}{T_1} + \underset{\delta\sigma = 0}{\underset{\uparrow}{0}} \quad (2)$$

$\delta U = 0$ et $\delta S = 0$ car le fluide décrit un cycle au sein de la machine ; d'autre part, la réversibilité implique $\delta\sigma = 0$.



Appliquons le premier principe aux deux corps dont l'état ne dépend que de la température :

$dU_1 = -\delta Q_1 = CdT_1$ et $dU_2 = CdT_2 = -\delta Q_2$.

La machine fonctionnant en moteur thermique, on doit avoir $\delta Q_2 > 0$ (de l'énergie thermique est prélevée à la « source » chaude) et $\delta Q_1 < 0$ (de l'énergie thermique est restituée à la « source » froide). $\mathscr{C}_2$ voit donc sa température diminuer ($\delta Q_2 > 0 \Rightarrow dT_2 < 0$) et $\mathscr{C}_1$ augmenter ($\delta Q_1 < 0 \Rightarrow dT_1 > 0$). Les processus d'échange énergétique cesseront dès que les températures de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ seront égales (soit T_f cette température). Dès lors :

$Q_1 = -C(T_f - T_{10})$ et $Q_2 = -C(T_f - T_{20})$.

Soit en intégrant la relation (1) :

$$W_f = Q_1 + Q_2 \Rightarrow W_f = C(T_{10} + T_{20}) - 2CT_f \quad (3)$$

Il reste à déterminer T_f ce qui peut se faire à l'aide de (2) qui s'écrit :

$$-C\frac{dT_2}{T_2} - C\frac{dT_1}{T_1} = 0 \Rightarrow \frac{dT_2}{T_2} + \frac{dT_1}{T_1} = 0 \quad (4)$$

Soit encore $\int_{T_{10}}^{T_f}\frac{dT_1}{T_1}+\int_{T_{20}}^{T_f}\frac{dT_2}{T_2} = 0.$

D'où $\ln\left(\frac{T_f}{T_{10}}\right)+\ln\left(\frac{T_f}{T_{20}}\right) = 0 \Rightarrow T_f = \sqrt{T_{10}T_{20}}.$

Reportant cette expression de la température finale dans l'expression (3) du travail, nous obtenons :

$$(W_f)_{max} = 2C\left[\left(\frac{T_{10}+T_{20}}{2}\right)-\sqrt{T_{10}T_{20}}\right].$$

D'où :

$$(W_f)_{max} = C\left[(\sqrt{T_{10}})^2+(\sqrt{T_{20}})^2-2\sqrt{T_{10}}\sqrt{T_{20}}\right] \Rightarrow (W_f)_{max} = C(\sqrt{T_{20}}-\sqrt{T_{10}})^2.$$

L'intervalle des valeurs possibles du travail fourni est alors :

$$0 \leq W_f \leq C\left[\sqrt{T_{20}}-\sqrt{T_{10}}\right]^2$$

2. On se place maintenant dans un cas où la machine ne fonctionne pas de façon réversible. L'expression du second principe prend alors la forme :

$0 = \frac{\delta Q_2}{T_2}+\frac{\delta Q_1}{T_1}+\delta\sigma$ ($\delta\sigma > 0$: création d'entropie pour un cycle).

Soit, avec $\delta Q_1 = -CdT_1$ et $\delta Q_2 = -CdT_2$:

$$C\frac{dT_1}{T_1}+C\frac{dT_2}{T_2} = \delta\sigma.$$

Intégrons cette équation entre l'état initial (T_{10}, T_{20}) et l'état final (T_f', T_f') :

$C\int_{T_{10}}^{T_f'}\frac{dT_1}{T_1}+C\int_{T_{20}}^{T_f'}\frac{dT_2}{T_2} = \int\delta\sigma = \Sigma$ (par définition).

D'où $\ln\left(\frac{T_f'}{T_{10}}\right)+\ln\left(\frac{T_f'}{T_{20}}\right) = \frac{\Sigma}{C} \Rightarrow$ $\boxed{T_f' = \sqrt{T_{10}T_{20}}\exp\left(\frac{\Sigma}{2C}\right)}$

Le travail fourni par le moteur thermique devient :

$W_f = C[(T_{10}+T_{20})-2T_f']$ (expression équivalente à (3)).

Soit $$W_f = C\left[(T_{10}+T_{20})-2\sqrt{T_{10}T_{20}}\exp\left(\frac{\Sigma}{2C}\right)\right]$$

La valeur maximale de la création d'entropie Σ doit correspondre au cas limite où aucun travail n'est fourni à l'extérieur ($W_f = 0$).

Soit $$\Sigma_{max} = 2C\ln\left[\frac{T_{10}+T_{20}}{2\sqrt{T_{10}T_{20}}}\right]$$

on retrouve bien que W_f est maximal pour $\Sigma = 0$ (puisque $\Sigma \geq 0$) ce qui correspond au cas de la réversibilité.

Application numérique :

$$\eta_{max} = 1 - \sqrt{\frac{300}{400}} = 0{,}13 \Rightarrow 0 \leq \eta \leq 0{,}13.$$

3. b. Revenons au cas d'une évolution réversible ($\eta = \eta_{max}$). Les températures des deux « sources » évoluent selon :
$T_1T_2 = T_{10}T_{20}$ (*cf.* équation (4). intégrée entre les états $[T_{10}, T_{20}]$ et $[T_1, T_2]$).
On suppose que sur un cycle élémentaire, les variations des températures T_1 et T_2 sont suffisamment faibles pour que l'on puisse assimiler le rendement du moteur thermique à celui d'une machine de Carnot. On a donc :

$$\boxed{\frac{\delta W_f}{\delta Q_2} = \eta_c(T_2) = 1 - \frac{T_1}{T_2}} = 1 - \frac{T_{10}T_{20}}{T_2^2}.$$

Pour définir le rendement global, nous écrivons :

$$W_f = \int \delta W_f = \int \eta_c(T_2)\delta Q_2, \text{ avec } \delta Q_2 = -C dT_2.$$

D'où $W_f = -C\int_{T_{20}}^{T_f} \eta_c(T_2)dT_2$ et $Q_2 = -C\int_{T_{20}}^{T_f} dT_2$ où $T_f = \sqrt{T_{10}T_{20}}$.

Finalement
$$\eta_{max} = \frac{W_f}{Q_f} = \frac{\int_{T_{20}}^{T_f} \eta_c(T_2)dT_2}{\int_{T_{20}}^{T_f} dT_2}.$$

Le rendement global s'identifie à la valeur moyenne du rendement de Carnot $\eta_c(T_2)$ sur l'intervalle $[T_{20}, T_f = \sqrt{T_{10}T_{20}}]$: $\boxed{\eta = \langle\eta_c(T_2)\rangle}$

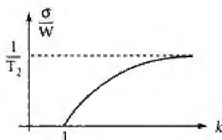
Il est donc « bien » inférieur à $\eta_c(T_{20}) = 1 - \frac{T_{10}}{T_{20}} = 0{,}25$.

648 Réfrigérateur et pompe à chaleur imparfaits

1. L'efficacité e d'un réfrigérateur non parfait prend la forme $e = \frac{T_1}{kT_2 - T_1}$ (source chaude T_2, source froide T_1).

- Donner, à l'aide d'arguments simples, le domaine des valeurs possibles du coefficient k. On pourra comparer cette efficacité à l'efficacité théorique d'un réfrigérateur parfait fonctionnant entre ces mêmes températures.
- Calculer en fonction de k, T_1 et T_2 la valeur de la création d'entropie pour une unité de travail électrique fourni.

Remarquons que W, Q et e sont définis positifs de telle sorte que $kT_2 > T_1$. Ceci implique par ailleurs $k \geqslant 1$, la création d'entropie σ étant elle-même positive.
La création d'entropie varie donc entre la valeur minimale $\sigma_{min} = 0$ (cas de la réversibilité) et la valeur maximale $\sigma_{max} = \frac{W}{T_2}$ (Q = 0).



• Comparons enfin les variations d'entropie des sources :

– l'entropie « enlevée » à la source froide est $\Delta S_1 = \frac{Q}{T_1}$ $(\Delta S_1 > 0)$;

– l'entropie « restituée » à la source chaude est $\Delta S_2 = \frac{Q'}{T_2}$ $(\Delta S_2 > 0)$.

$$\text{Or} \quad e = \frac{Q}{W} = \frac{Q}{Q'-Q} = \frac{1}{\frac{Q'}{Q}-1} = \frac{1}{k\frac{T_2}{T_1}-1}.$$

On a donc : $\frac{Q'}{Q} = k\frac{T_2}{T_1}$, soit encore $\frac{Q'}{T_2} = k\frac{Q}{T_1}$

le coefficient k représente le rapport entre l'entropie fournie à la source chaude et l'entropie prélevée à la source froide

$$\boxed{k = \frac{\Delta S_2}{\Delta S_1}}$$

Dans le cas de la réversibilité, il vient $\Delta S_1 = \Delta S_2$ $\left(\frac{Q}{T_1} - \frac{Q'}{T_2} = 0\right)$ et $k = 1$. Pour une transformation irréversible, nous aurions : $\Delta S_1 - \Delta S_2 + \sigma = 0$.

Soit $\Delta S_2 > \Delta S_1$ $(\sigma > 0)$, et $k > 1$.

Dans la configuration limite où $\Delta S_1 \to 0$, $k \to +\infty$ et $\sigma \to \Delta S_2$ avec $\Delta S_2 = \frac{Q'}{T_2} = \frac{W}{T_2}$ (puisque $Q = 0$ et $W + Q - Q' = 0$).

Commentaires

• Pour le réfrigérateur non parfait, l'expression $e = \frac{T_1}{kT_2 - T_1}$ peut s'interpréter comme l'efficacité d'une machine frigorifique parfaite qui fonctionnerait avec la même source froide (T_1) et une source chaude de température $T_2' = kT_2$ plus élevée $(k > 1)$, ce qui implique automatiquement une moins bonne efficacité.

• D'une autre manière, on peut s'intéresser, dans le cas de la machine frigorifique, aux énergies thermiques prises à la source froide – **pour un travail électrique donné W** – dans le cas de la réversibilité et de l'irréversibilité :

$$Q_{rév} = \frac{T_1}{T_2 - T_1}W \quad \text{et} \quad Q_{irr} = \frac{T_1}{kT_2 - T_1}W.$$

$$\text{Soit} \quad \frac{Q_{irr}}{Q_{rév}} = \frac{T_2 - T_1}{kT_2 - T_1} = 1 - \frac{(k-1)T_2}{kT_2 - T_1} = 1 - \frac{\sigma T_2}{W}.$$

D'où $$Q_{irr} = Q_{rév}\left(1 - \frac{\sigma T_2}{W}\right)$$

(L'efficacité minimale est bien associée à $Q_{irr} = 0$ soit à $\sigma = \sigma_{max} = \frac{W}{T_2}$ (à W fixé).)

2. La pompe à chaleur fonctionne sur le même principe que la machine frigorifique, la grandeur intéressante étant maintenant l'énergie thermique Q′ fournie à la source chaude. L'efficacité sera définie par $e = \frac{Q'}{W}$.

Elle sera maximale pour un fonctionnement réversible. Quant à la valeur minimale de e, elle doit correspondre à une conversion directe de l'énergie électrique W en énergie thermique Q′ ($Q = 0$; la pompe à chaleur devient un simple radiateur électrique !). Nous aurons donc :

- $e_{min} = 1 \quad (W = Q' \text{ et } Q = 0)$.
- e_{max} pour $\quad W + Q - Q' = 0 \quad$ (1[er] principe)

$$0 = \frac{Q}{T_1} - \frac{Q'}{T_2} + 0 \quad \text{(2}^e\text{ principe et réversibilité } \sigma = 0\text{)}.$$

Soit $$e_{max} = \frac{Q'}{W} = \frac{Q'}{Q' - Q} = \frac{1}{1 - \frac{Q}{Q'}} = \frac{1}{1 - \frac{T_1}{T_2}} \Rightarrow e_{max} = \frac{T_2}{T_2 - T_1}$$

ce qui donne $$1 \leqslant e \leqslant \frac{T_2}{T_2 - T_1}$$

D'une manière analogue à ce qui a été fait pour la machine frigorifique, on définira un cœfficient k' tel que :

$$k' = \frac{\text{entropie prélevée à la source froide}}{\text{entropie fournie à la source chaude}} = \frac{\Delta S_1}{\Delta S_2}.$$

De telle sorte que $k' = \left(\frac{Q}{T_1}\right) \cdot \left(\frac{T_2}{Q'}\right) = \frac{Q}{Q'}\frac{T_2}{T_1} \quad \left(\Delta S_1 = \frac{Q}{T_1} \text{ et } \Delta S_2 = \frac{Q'}{T_2}\right)$.

D'où l'expression de l'efficacité $\left(\text{puisque } e = \frac{1}{1 - \frac{Q}{Q'}}\right)$:

$$e = \frac{1}{1 - k'\frac{T_1}{T_2}} \Rightarrow \boxed{e = \frac{T_2}{T_2 - k'T_1}}$$

Dans le cas de la réversibilité, $\Delta S_1 = \Delta S_2$ et $k' = 1$ $\left(e = \frac{T_2}{T_2 - T_1}\right)$.

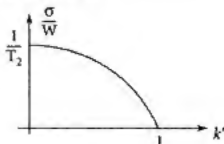
Et pour une transformation irréversible :

$$\Delta S_1 - \Delta S_2 + \sigma = 0 \quad \text{soit} \quad \Delta S_2 > \Delta S_1 \text{ et } k' < 1.$$

À la limite où $\Delta S_1 \to 0$ $(W = Q')$, $k' \to 0$ et $\sigma \to \dfrac{W}{T_2}$ ce qui donne ici :

$$\boxed{0 \leqslant k' \leqslant 1}$$

• Le lien entre la création d'entropie σ (pour une énergie électrique donnée W) k', T_1 et T_2 s'obtient de la même façon que pour la machine frigorifique.



$$\sigma = \Delta S_2 - \Delta S_1 = \Delta S_2(1-k') = \frac{Q'}{T_2}(1-k').$$

Or $\quad e = \dfrac{Q'}{W} \quad$ d'où : $\sigma = (1-k')e\dfrac{W}{T_2}$.

Soit en remplaçant e par sa valeur :

$$\frac{\sigma}{W} = \frac{1-k'}{T_2 - k'T_1}.$$

Commentaire

On peut également noter $e = \dfrac{T_2}{T_2 - T_1'}$ avec $T_1' = k'T_1$, ce qui correspondrait à l'efficacité d'une pompe à chaleur parfaite fonctionnant avec une source froide de température $T_1' < T_1$ occasionnant une efficacité plus faible $\left(e = \dfrac{T_2}{T_2 - T_1'} < \dfrac{T_2}{T_2 - T_1}\right)$.

2. b. • Pour un chauffage à l'aide des radiateurs électriques, la puissance électrique est convertie directement en puissance thermique laquelle doit compenser exactement les pertes. On a donc :

$$\mathcal{P}_{\text{radiateurs électriques}} = 10\ \text{kW}.$$

• Pour la pompe à chaleur :

$e = \dfrac{Q'}{W} = \dfrac{\mathcal{P}'_{th}}{\mathcal{P}}$, où $\mathcal{P}$ désigne la puissance électrique de la pompe et $\mathcal{P}'_{th} = 10$ kW (même raison que ci-dessus). D'où :

$$\mathcal{P} = \frac{\mathcal{P}'_{th}}{e} = \mathcal{P}'_{th} \cdot \frac{T_2 - k'T_1}{T_2}.$$

Nous avons $T_2 = 292$ K (la maison est la source chaude) et $T_1 = 275$ K (l'air extérieur constitue la source froide). De plus, l'imperfection de la pompe (irréversibilité partielle) impose $k' = 0{,}8$ (k' différent de 1), d'où :

$$\mathcal{P}_{kW} = 10 \cdot \frac{292 - 0{,}8 \times 275}{292} \Rightarrow \mathcal{P}_{\text{Pompe}} = 2{,}5\ \text{kW}$$

(ce qui correspond à une efficacité de 4,1 – l'efficacité maximale pour les mêmes températures T_1 et T_2 étant égale à 17,2…).

649 Moteur à explosion

Un moteur à explosion fonctionne selon le « cycle de Beau de Rochas », cycle idéalisé défini de la façon suivante :

– 1[er] temps : soupape d'admission ouverte, soupape d'échappement fermée, le mélange (air + essence) est admis dans le cylindre de volume maximal V_1 (conditions T_1 et P_1) ;

– 2[e] temps : soupapes fermées, le mélange est comprimé isentropiquement jusqu'à l'état (P_2, V_2, T_2) pour lequel se produit l'explosion (augmentation brusque de la pression jusqu'à P_2' à volume constant, le fluide passant dans l'état (P_2', V_2, T_2') ;

– 3[e] temps : soupapes fermées, les produits de combustion se détendent de façon isentropique, le volume du cylindre redevenant V_1 (état P_3, V_1, T_3) ;

– 4[e] temps : ouverture de la soupape d'échappement ce qui conduit à une variation brusque de la pression sans déplacement de piston $(P_3, T_3 \rightarrow P_1, T_1)$ suivie de l'évacuation des gaz brulés.

Pour simplifier, on prendra un seul cylindre dont le volume offert varie entre les valeurs extrémales V_1 et V_2. Le mélange sera considéré de composition « invariable » avec des capacités thermiques molaires C_p et C_v constantes (indépendantes de T et P). On donne :

- la cylindrée : $V_1 - V_2 = 1\,124 \text{ cm}^3$;
- le rapport volumétrique : $\alpha = \dfrac{V_1}{V_2} = 9{,}4$;
- le carburant a une masse volumique $\mu = 720 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et son pouvoir thermique est $K = 48 \text{ kJ} \cdot \text{g}^{-1}$;
- consommation $c = 5{,}9$ litres aux 100 km à vitesse stabilisée $V_{st} = 120 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ (correspondant à $N = 5\,600$ tours par minute).

On prendra $P_1 = 10^5$ Pa et $\gamma = 1{,}35$. Les gaz seront considérés comme parfaits.

1. a. Exprimer le rendement théorique η du moteur à explosion en fonction notamment des températures T_1, T_2, T_2' et T_3, puis en fonction des coefficients α et γ. Donner la valeur numérique de η.

b. Commenter l'expression de η en fonction des valeurs de γ et du rapport volumétrique α.

Que pensez-vous de la modélisation adoptée pour le cycle ?

2. Déterminer la puissance théorique $\mathcal{P}$ délivrée par le moteur. On exprimera cette puissance en fonction de c, V_{st}, K, μ et η.

Application numérique.

3. Définir complètement l'état du fluide en chaque point caractéristique du cycle en précisant les valeurs des températures T_2, T_2' et T_3 et des pressions P_2, P_2' et P_3 sachant que $T_1 = 350$ K.

1.b.

Commentaire

Le moteur à explosion est un moteur à combustion interne (comme le moteur Diesel) pour lequel l'allumage (provoqué par une étincelle : bougie électrique) engendre un fort accroissement de pression : dans le cycle théorique, la combustion est considérée comme instantanée s'effectuant à volume fixé (dans le moteur Diesel, le combustible s'enflamme à pression constante, la réaction étant provoquée par l'échauffement de l'air accompagnant une forte compression).

• Le rendement théorique du cycle associé ne dépend que de γ et du rapport volumétrique $\alpha = \frac{V_1}{V_2}$.

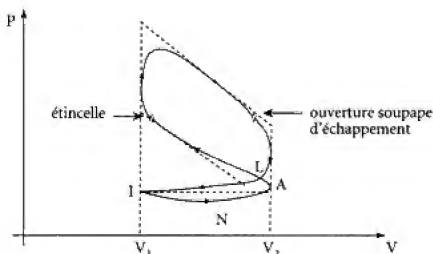
On peut considérer que pour le mélange, γ est compris entre les valeurs 1,3 et 1,4 (la valeur $\gamma = 1{,}40$ n'est valable que pour les gaz parfaits diatomiques). Donnons quelques valeurs de ce rendement (thermique) théorique pour différentes valeurs de α :

γ \ α	8	9	10
1,3	0,46	0,48	0,50
1,4	0,56	0,58	0,60

$$\eta = 1 - \frac{1}{\alpha^{\gamma-1}}$$

On constate qu'une valeur plus faible de γ abaisse celle du rendement thermique. D'autre part, ce rendement est une fonction croissante du rapport volumétrique α (à γ fixé). Cependant, un taux de compression trop élevé du mélange pourrait provoquer une détonation (phénomène de cliquetis associé à la désintégration de certains hydrocarbures), voire un allumage prématuré. On mesure la résistance à la détonation d'un carburant par son indice d'octane… On atteint les valeurs de α de l'ordre de 9 à 10 dans les moteurs actuels d'automobile avec un carburant d'indice d'octane 98.

• Soulignons que le diagramme proposé ne représente qu'une idéalisation du cycle du moteur à quatre temps.



– Les compression et détente ne sont pas isentropiques (les parois du cylindre cèdent de l'énergie thermique au mélange pendant la phase de compression et en reçoivent de la part des gaz de combustion pendant la phase de détente : ceci a pour effet de diminuer les performances du moteur).

– La combustion n'est pas instantanée et ne se fait pas exactement à volume constant (on réalise une avance à l'allumage, c'est-à-dire que l'étincelle est produite avant que le piston n'atteigne son point haut, afin d'obtenir une combustion complète et une élévation de pression aussi élevée que possible).

– Le fonctionnement théorique des soupapes impliquerait un travail récupéré pendant la phase d'admission compensant exactement celui utilisé pour évacuer les gaz brulés (trajets $I \rightarrow A$ et $A \rightarrow I$). En réalité, l'ouverture et la fermeture des soupapes n'ont pas lieu exactement lorsque le piston atteint ses niveaux haut et bas. De plus, il s'établit une dépression pendant l'admission et une suppression pendant l'échappement, la boucle correspondante [INALI] représentant alors une perte de travail utile.

2. La puissance théorique développée par le moteur, dans les conditions de l'énoncé, peut être calculée à partir du travail ΔW pendant une durée Δt. Il lui correspond une énergie thermique ΔQ produite par la combustion.

Nous avons : $\mathcal{P} = \dfrac{\Delta W}{\Delta t}$ avec $\eta = \dfrac{\Delta W}{\Delta Q}$.

Soit $\mathcal{P} = \eta \dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$.

Or, pendant Δt, le moteur absorbe une masse Δm de carburant telle que :

$$\Delta m = \mu \frac{\Delta v}{\Delta t} \Delta t \quad (\mu : \text{masse volumique} ; \quad \Delta v : \text{volume}).$$

Le moteur consomme $c \cdot 10^{-3}\ m^3$ tous les 100 km à vitesse stabilisée V_{st} ($km \cdot h^{-1}$). Pendant le temps Δt (en heures), le véhicule parcourt la distance $d = V_{st} \cdot \Delta t$ (d en km) et consomme donc un volume Δv (en m^3) de carburant tel que :

$$\Delta v(m^3) = c \cdot 10^{-3} \times \frac{V_{st} \cdot \Delta t}{100}.$$

D'où $\dfrac{\Delta v}{\Delta t}(m^3 \cdot h^{-1}) = c(L) \cdot 10^{-3} \dfrac{V_{st}\ (km \cdot h^{-1})}{100}$.

Soit encore $\dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{c V_{st} 10^{-5}}{3\,600}\ m^3 \cdot s^{-1}$

et $\Delta m = \dfrac{10^{-5}}{3\,600} c \cdot V_{st} \cdot \mu \cdot \Delta t$.

K désignant le pouvoir thermique du carburant, il vient : $\Delta Q = K \Delta m$.

D'où $$\mathcal{P} = \eta K \frac{\Delta m}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{\mathcal{P} = \frac{10^{-5}}{3\,600} c \cdot V_{st} \cdot \mu \cdot K \cdot \eta}$$

Dans cette relation, c est en litres/100 km, V_{st} en $km \cdot h^{-1}$, μ en $kg \cdot m^{-3}$ et K en $kJ \cdot kg^{-1}$: $\mathcal{P}$ s'exprime alors en kW.

Application numérique :

$$\mathcal{P} = \frac{10^{-3}}{3\,600} \times 5{,}9 \times 1{,}2\left(1 - \frac{1}{(9{,}4)^{0{,}35}}\right) \times 48 \times 720 \times 10^3$$

où $K\mu = 48 \times 720 \times 10^3$ kJ $\Rightarrow \mathcal{P} = 37$ **kW.**

3. • Pour l'isentropique A → B, nous avions $T_2 = T_1\alpha^{\gamma-1}$.

D'où $T_2 = 350 \times (9{,}4)^{+0{,}35} \Rightarrow T_2 = 767$ K.

D'autre part, $P_2V_2^\gamma = P_1V_1^\gamma$ et $P_2 = P_1\alpha^\gamma \Rightarrow P_2 = 20{,}6\ 10^5$ **Pa.**

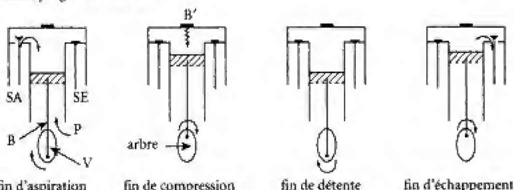
• Pour l'isochore B → C :

$$Q = nC_v(T_2' - T_2) \text{ avec } Q = \frac{\mathcal{P}}{\eta}(\Delta t)_{\text{cycle}} \text{ où } (\Delta t)_{\text{cycle}} = 2 \cdot \frac{60}{N}.$$

Un cycle correspond en effet à deux tours de l'arbre du moteur qui effectue N tours par minute.

Commentaire

Chaque tour du vilebrequin est associé à deux courses du piston (une dans chaque sens). Ainsi, pour un moteur à quatre temps, le cycle thermodynamique est décrit pendant deux tours du vilebrequin (et donc de l'arbre du moteur), ce qui correspond à quatre courses du piston (*cf.* figure ci-dessous) :



fin d'aspiration — fin de compression — fin de détente — fin d'échappement

B : bielle ; V : vilebrequin ;
SA : soupape d'admission ; SE : soupape d'échappement ;
P : piston ;
B' : bougie.

Le travail n'est produit que pendant un quart de cycle, il est donc nécessaire d'assurer un mouvement régulier du piston ce qui est réalisé plus facilement en associant plusieurs cylindres (4, 6, 8...) sur un même vilebrequin de forme appropriée...

$$\text{D'où } T_2' = T_2 + \frac{Q}{nC_v} = T_2 + \frac{Q}{nR}(\gamma - 1) \quad \text{avec} \quad C_v = \frac{R}{\gamma - 1}.$$

$$\text{D'autre part } n = \frac{P_1V_1}{RT_1} \text{ soit : } T_2' = T_2 + (\gamma - 1)T_1\frac{\mathcal{P} \cdot 60 \cdot 2}{\eta \cdot NP_1V_1} \Rightarrow T_2' = 2\,185 \text{ K.}$$

V_1 se détermine à l'aide du rapport volumétrique α et de la cylindrée :

$$V_1 - V_2 = 1\,124 \text{ cm}^3 \text{ et } \frac{V_1}{V_2} = 9{,}4 \Rightarrow V_1 = 1\,258 \text{ cm}^3.$$

Il lui correspond une pression P_2' telle que $\frac{P_2'}{T_2'} = \frac{P_2}{T_2} \Rightarrow P_2' = 58{,}7 \cdot 10^5$ Pa.

• Pour l'isentropique C → D, il vient (*cf.* A → B) :

$T_2' = T_3\alpha^{\gamma-1}$, soit $T_3 = T_2'\alpha^{1-\gamma}$ et $T_3 = 997$ K.

$P_3V_1^\gamma = P_2'V_2^\gamma$, soit $P_3 = P_2'\alpha^{-\gamma}$ et $P_3 = 2{,}85\ 10^5$ Pa.

650 Réfrigérateur à absorption

On sait réaliser des réfrigérateurs – dits « à absorption » – qui ne nécessitent pas de moteur (comme source de travail mécanique...). Ils extraient une énergie thermique Q_1 de la source froide à la température T_1 (effet frigorifique) et reçoivent une énergie thermique Q_3 d'une source auxiliaire à T_3. Ils échangent également de l'énergie thermique avec l'air ambiant à T_2 ($T_3 > T_2 > T_1$).

1. Montrer qu'un tel appareil est thermodynamiquement possible si une condition sur Q_1, Q_3 et les températures est réalisée.

2. Définir l'efficacité de ce type de réfrigérateur, et montrer que celle-ci reste inférieure à une valeur que l'on exprimera en fonction des seules températures.

Application numérique : $T_1 = 265$ K ; $T_2 = 300$ K ; $T_3 = 400$ K.

3. Comparer avec l'efficacité d'un réfrigérateur classique fonctionnant avec deux sources thermiques (T_1 et T_2).

Solution

1. Notons – pour un temps de fonctionnement donné :

Q_3 la quantité d'énergie thermique reçue de la source auxiliaire à la température T_3 (Q_3 est une quantité positive) ;

Q_1 la quantité d'énergie thermique reçue de la source froide à la température T_1 (Q_1 quantité positive) ;

Q_2 la quantité d'énergie thermique « prélevée » à l'air ambiant à T_2 (Q_2 de signe inconnu au départ...).

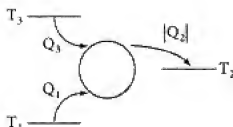
La machine ayant par hypothèse un fonctionnement cyclique, le premier principe impose :

$\Delta U_{cycle} = 0 \Rightarrow Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$ car $W = 0$.

Q_1 et Q_3 étant positives, il vient :

$$Q_2 = -Q_1 - Q_3 < 0.$$

D'où le schéma ci-contre des échanges d'énergie du fluide évoluant dans la machine.



D'après le second principe appliqué au système { machine + sources } :

$\Delta S_{machine} + \Sigma \Delta S_{sources} \geqslant 0.$

L'égalité correspond au cas des évolutions réversibles.

Ici $\Delta S_{machine} = 0$ (cycle) et donc $\dfrac{(-Q_1)}{T_1} + \dfrac{(-Q_3)}{T_3} + \dfrac{|Q_2|}{T_2} \geqslant 0$

soit, en éliminant $|Q_2| = -Q_2$:

$$\frac{(-Q_1)}{T_1} + \frac{(-Q_3)}{T_3} + \frac{Q_1 + Q_3}{T_2} \geqslant 0$$

$$Q_1\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right) + Q_3\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_3}\right) \geqslant 0$$

le second terme de cette somme est positif $\left(T_3 > T_2 \text{ entraîne } \dfrac{1}{T_3} < \dfrac{1}{T_2}\right)$, mais le premier terme est négatif ($T_1 < T_2$...) : pour que le résultat soit effectivement positif, il suffit que la quantité d'énergie thermique apportée au fluide depuis la source auxiliaire soit suffisamment grande.

Exprimé autrement, il faut, pour enlever une quantité d'énergie thermique Q_1 à la source froide, fournir depuis la source auxiliaire une énergie thermique supérieure à une valeur minimale :

$$Q_3 \geqslant Q_1 \cdot \frac{\dfrac{1}{T_1} - \dfrac{1}{T_2}}{\dfrac{1}{T_2} - \dfrac{1}{T_3}} \quad (1)$$

2. À partir de ce qui précède, l'efficacité de ce type d'appareil se définit de façon naturelle par :

$$\boxed{\eta = \frac{Q_1}{Q_3}}$$

ce qui correspond bien à la notion générale d'efficacité

$$\eta = \frac{\text{quantité utile obtenue}}{\text{quantité « onéreuse » fournie}}$$

les échanges avec l'air ambiant étant considérés comme totalement gratuits...

En utilisant la condition (1), on obtient pour η :

$$\eta = \frac{Q_1}{Q_3} \leq \frac{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_3}}{\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}}$$

soit

$$\boxed{\eta \leq \frac{T_1(T_3 - T_2)}{T_3(T_2 - T_1)}}$$

On vérifie naturellement que l'efficacité maximale correspond au fonctionnement réversible.

Application numérique :

Avec les valeurs données, $\boxed{\eta \leq 1{,}9}$

3. Comparons cette efficacité à celle d'un réfrigérateur classique fonctionnant entre une source froide à la température T_1 et une source chaude à la température T_2

$\eta' \leq \dfrac{T_1}{T_2 - T_1}$ soit ici $\boxed{\eta' \leq 7{,}57}$

Dans le cas de transformations réversibles, $\eta = \dfrac{T_1}{T_2 - T_1}\left(1 - \dfrac{T_2}{T_3}\right) = \eta' \cdot \left(1 - \dfrac{T_2}{T_3}\right)$.

Donc à T_1 et T_2 fixés, $\boxed{\eta < \eta'}$ pour toute valeur de T_3 (que l'on a intérêt à prendre la plus élevée possible).

Commentaire

L'emploi d'un tel réfrigérateur se justifie quand on ne dispose pas de source de travail W (pas d'alimentation électrique) ou lorsqu'on recherche un fonctionnement parfaitement silencieux (pas besoin de moteur).

651 Centrale électrique nucléaire

Une centrale nucléaire produit de l'électricité par l'intermédiaire d'un alternateur couplé aux turbines à vapeur T_1 et T_2. Le fluide caloporteur est de l'eau. À la sortie des turbines, l'eau se refroidit dans le condenseur (l'échange d'énergie thermique peut se faire avec l'eau pompée dans une rivière).

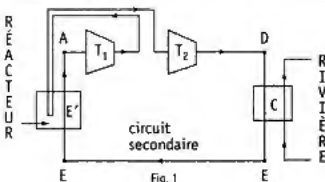
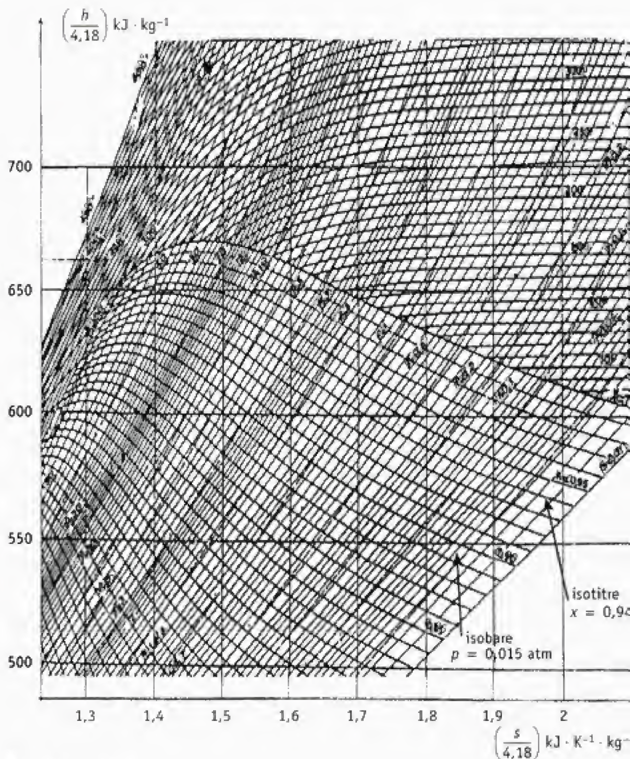


Fig. 1



Solution

1. La capacité thermique étant prise constante, on aura :

$$h_E - 0 = C_l(T_E - T_0) ; \quad h_F - 0 = C_L(T_F - T_0)$$

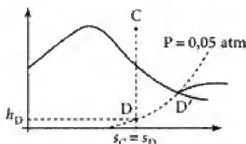
$$s_E - 0 = C_l \ln\left(\frac{T_E}{T_0}\right) \text{ et } s_F - 0 = C_L \ln\left(\frac{T_F}{T_0}\right).$$

Soit $\quad h_F = 1\,200 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} ; \quad s_F = 3{,}0 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$

• La transformation C → D est isentropique ($s_D = s_C$) avec $P_D = 0{,}05$ atm. La température correspondante est celle du mélange liquide-vapeur à la même pression. Elle est donc fournie par l'isotherme $\theta = 35$ °C qui arrive au point D′ intersection de l'isobare $P = 0{,}05$ atm et de l'isotitre $x = 1$ (imprécision sur θ_D). D'où :

$P_D = 0{,}05$ atm ; $\theta_D = 35$ °C ; $x_D = 0{,}825$.

$h_D = 2\,137$ kJ · kg^{-1} ; et $s_D = 6{,}99$ kJ · K^{-1} · kg^{-1}.



• L'état E est caractérisé par (transformation D → E isobare et isotherme) :

$P_E = P_D = 0{,}05$ atm ; $\theta_E = \theta_D = 35$ °C ; $x_E = 0$, et :

$h_E = 9{,}18 \cdot (35 - 0)$ (*cf.* **1.**) $\Rightarrow h_E = 146$ kJ · kg^{-1}.

$s_E = 4{,}18 \ln\left(\dfrac{273 + 35}{273}\right)$ (*cf.* **1.**) $\Rightarrow s_E = 0{,}50$ kJ · K^{-1} · kg^{-1}.

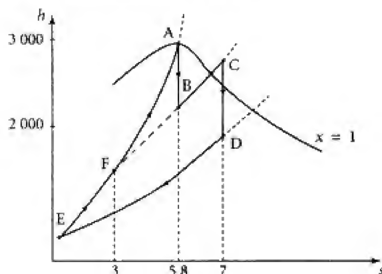
• Le cycle reboucle sur l'état F caractérisé par :

$P_F = P_A = 70$ atm ; $\theta_F = \theta_A = 287$ °C ; $x_F = 0$ et

$h_F = 4{,}18 \cdot (287 - 0)$ (*cf.* **1.**) $\Rightarrow h_F = 1\,200$ kJ · kg^{-1}

$s_F = 4{,}18 \ln\left(\dfrac{287 + 273}{273}\right)$ (*cf.* **1.**) $\Rightarrow s_F = 3{,}0$ kJ · kg^{-1} · K^{-1}.

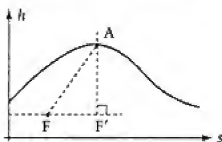
Représentons ce cycle dans le diagramme de Mollier :



• Tableau des valeurs P, T, x, h et s (arrondies) :

	P (atm)	θ (°C)	x	h (kJ · kg^{-1})	s (kJ · K^{-1} · kg^{-1})
A	70	287	1	2 770	5,8
B	10	180	0,83	2 430	5,8
C	10	270	1	2 980	7,0
D	0,05	35	0,825	2 140	7,0
E	0,05	35	0	146	0,5
F	70	287	0	1 200	3,0

3. La transformation $F \to A$ est associée à une vaporisation totale du liquide à P et T constantes, d'où : $Q_{FA} = h_A - h_F$ (segment AF′ du diagramme de Mollier).



De même $Q_{DE} = h_E - h_D$ et $Q_{BC} = h_C - h_B$.

L'application numérique donne :

$Q_{FA} = (2\,766 - 1\,200) \Rightarrow Q_{FA} \# 1\,570 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

$Q_{BC} = (2\,980 - 2\,430) \Rightarrow Q_{BC} \# 550 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

$Q_{DE} = (146 - 2\,137) \Rightarrow Q_{DE} \# -1\,990 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

De plus, $Q_{EF} = C_L(\theta_F - \theta_E) = 4{,}18(287 - 35) \Rightarrow Q_{EF} = 1\,053 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

• Le travail W_1 fourni par la centrale, et rapporté à l'unité de masse du fluide, s'obtient par application du premier principe. Soit pour un cycle :

$$(-W_1) + Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DE} + Q_{EF} + Q_{FA} = 0$$

et avec $Q_{AB} = Q_{CD} = 0$ (transformations adiabatiques) :

$$W_1 = Q_{BC} + Q_{DE} + Q_{EF} + Q_{FA}.$$

Application numérique :

$$W_1 = 1\,178 \Rightarrow W_1 = 1\,180 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

• L'énergie thermique Q_1 fournie par la source chaude (circuit d'eau primaire passant dans le cœur du réacteur de la centrale) permet de réaliser la transformation $E \to F \to A$ et assure la surchauffe de la vapeur entre les turbines haute et basse pression.

$$Q_1 = Q_{EF} + Q_{FA} + Q_{BC} \Rightarrow Q_1 = 3\,170 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

(somme de toutes les énergies thermiques effectivement reçues de la source chaude).

• Le rendement thermique de la centrale est égal au rapport de l'énergie utile produite (soit W_1) sur l'énergie « non gratuite » (ici Q_1). Soit :

$$\eta = \frac{W_1}{Q_1} \Rightarrow \eta = 37\ \%.$$

4. Considérons une turbine et la masse δm la « traversant » entre les instants t et $t + dt$ (le régime étant stationnaire, la même masse δm entre et sort entre ces deux instants).

Considérons alors le système fermé constitué, à t, par le fluide contenu dans la turbine (énergie interne U_T) et la masse δm qui va y pénétrer entre t et $t + dt$ (conditions h_e, u_e, s_e...).

À $t + dt$, ce système correspond au fluide contenu dans la turbine (énergie interne U_T : régime stationnaire) et à la masse δm sortant de la machine (conditions h_s, u_s et s_s...).

Désignons par δW_{amont} le travail fourni par le reste du fluide en amont et δW_{aval} le travail correspondant en aval.

Le premier principe appliqué au système considéré (et en négligeant les énergies cinétiques ou leurs variations) donne :

$$dU = (U_T + u_s\delta m) - (U_T + u_e\delta m) = (-\delta W_u) + \delta W_{amont} + \delta W_{aval} + \delta Q.$$

La turbine est adiabatique et donc $\delta Q = 0$, d'où :

$$\delta m(u_s - u_e) = (-\delta W_u) + \delta W_{amont} + \delta W_{aval}.$$

Or $\delta W_{amont} = P_e\delta V_e$ avec $\delta V_e = (v_m)_e\delta m$ (v_m = volume massique).

De même $\delta W_{aval} = -P_s\delta V_s$ avec $\delta V_s = (v_m)_s\delta m$.

Soit en regroupant les termes :

$$\delta m[(u_s + P_s(v_m)_s) - (u_e + P_e(v_m)_e)] = (-\delta W_u)$$

et $$\boxed{h_s - h_e = -\left(\frac{\delta W_u}{\delta m}\right)}$$

Pour un intervalle de temps dt, nous aurons :

$$\frac{\delta m}{dt}(h_s - h_e) = -\frac{\delta W_u}{dt} = -P_u.$$

$\frac{\delta m}{dt} = D_m$ est le débit massique de fluide et P_u représente la puissance utile effectivement transmise à l'alternateur.

Au total, on aura ici (turbines haute et basse pression) :

$$\boxed{(P_u)_{totale} = (-D_m)[(h_B - h_A) + h_D - h_C]}$$

Application numérique :

$$D_m = \frac{-1\,300 \times 10^6}{[(2\,430 - 2\,766) + (2\,137 - 2\,980)] \cdot 10^3} \Rightarrow D_m = 1\,100 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Commentaire

Cette démonstration, inspirée de la démonstration de la détente de Joule-Kelvin, doit être parfaitement assimilée car elle apparaît chaque fois que l'on étudie un écoulement.

Chapitre

7

Électromagnétisme

A - Électrostatique

B - Magnétostatique

POINT MÉTHODE

Pour utiliser le théorème de Gauss dans le calcul d'un champ, il faut d'abord choisir une surface pour laquelle on est capable de calculer le flux qui la traverse en fonction de la valeur du champ en un point donné.

Deux cas sont alors possibles :

– 1er cas : $X > \frac{e}{2} \Rightarrow Q^{int} = \rho\Sigma_0 e$ et $E_I(X > 0) = \frac{\rho e}{2\varepsilon_0}$;

– 2e cas : $0 < X < \frac{e}{2} \Rightarrow Q^{int} = \rho\Sigma_0 2X$ et $E_I(X > 0) = \frac{\rho X}{\varepsilon_0}$.

On remarque que le champ est uniforme d'une part pour $X > \frac{e}{2}$ et d'autre part pour $X < -\frac{e}{2}$ et qu'il y a bien entendu continuité de $\vec{E}_I$ (charge volumique de valeur bornée).

• Revenons alors à la distribution proposée dans l'énoncé et intéressons-nous tout d'abord aux domaines extérieurs aux distributions de charges :

a. $x \geqslant a + \frac{e}{2}$: $\vec{E_I} = \frac{\rho e}{2\varepsilon_0}\vec{u_x}$ et $\vec{E_{II}} = -\frac{\rho e}{2\varepsilon_0}\vec{u_x} \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$.

b. $x \leqslant -a - \frac{e}{2}$: la conclusion est la même et $\vec{E} = \vec{0}$.

c. $-a + \frac{e}{2} \leqslant x \leqslant a - \frac{e}{2}$: $\vec{E_I} = -\frac{\rho e}{2\varepsilon_0}\vec{u_x}$ et $\vec{E_{II}} = -\frac{\rho e}{2\varepsilon_0}\vec{u_x}$

$$\text{d'où} \quad \vec{E} = -\frac{\rho e}{\varepsilon_0}\vec{u_x}.$$

Plaçons-nous maintenant à l'intérieur des distributions :

d. $a - \frac{e}{2} \leqslant x \leqslant a + \frac{e}{2}$: $\vec{E_I} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}X\vec{u_x} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}(x-a)\vec{u_x}$

$$\vec{E_{II}} = -\frac{\rho e}{2\varepsilon_0}\vec{u_x} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\cdot\left(x - a - \frac{e}{2}\right)\vec{u_x}.$$

On a bien $\vec{E}\left(x = a + \frac{e}{2}\right) = \vec{0}$ et $\vec{E}\left(x = a - \frac{e}{2}\right) = -\frac{\rho e}{\varepsilon_0}\vec{u_x}$.

e. $-a - \frac{e}{2} \leqslant x \leqslant -a + \frac{e}{2}$: $\vec{E_I} = -\frac{\rho e}{2\varepsilon_0}\vec{u_x}$ et $\vec{E_{II}} = -\frac{\rho X'}{\varepsilon_0}\vec{u_x}$

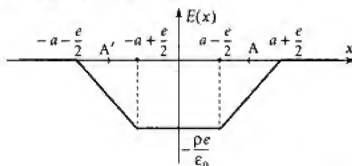
avec ici $X' = x + a$, soit $\vec{E_{II}} = -\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}\cdot(x+a)\vec{u_x}\right)$

$$\text{d'où} \quad \vec{E} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\left(x + a + \frac{e}{2}\right)\vec{u_x}.$$

Là aussi les relations de passage sont bien vérifiées puisque l'on a :

$$\vec{E}\left(x = -a - \frac{e}{2}\right) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{E}\left(x = -a + \frac{e}{2}\right) = -\frac{\rho e}{\varepsilon_0}\vec{u_x}.$$

D'où le graphe donnant $E(x)$ $(\vec{E} = E(x)\vec{u_x})$:



• La fonction potentiel s'en déduit aisément à partir de la relation $\frac{dV}{dx} = -E(x)$.
$(\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$, avec $\vec{E} = E(x) \cdot \vec{u_x}$ implique que $V = V(x)$ est fonction de la seule variable x.)

Commentaires

Notons qu'il ne faut pas espérer déterminer une fonction $V(x)$ telle que $V \to 0$ quand $x \to \pm\infty$: ici la distribution de charges s'étend jusqu'à l'infini (avec une densité $\pm\rho$ qui ne tend pas vers zéro).
Par contre, la fonction $E(x)$ étant paire, la fonction $V(x)$ sera impaire, si on fait le choix de $V(0) = 0$...

Il vient alors :

$-a+\frac{e}{2} \leq x \leq a-\frac{e}{2}$: $V(x) = \frac{\rho e}{\varepsilon_0}x$ (choix de $V(0) = 0$) ;

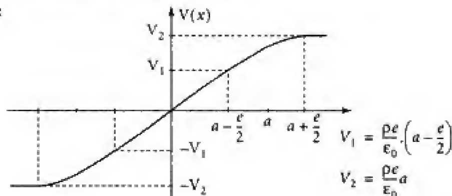
$a-\frac{e}{2} \leq x \leq a+\frac{e}{2}$: $V(x) = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} \cdot \left(x-a-\frac{e}{2}\right)^2 + k$: la constante k sera déterminée par la continuité du potentiel en $x = a-\frac{e}{2}$; soit :

$$\frac{\rho e}{\varepsilon_0}\left(a-\frac{e}{2}\right) = k - \frac{\rho}{2\varepsilon_0}e^2 \Rightarrow k = \frac{\rho e a}{\varepsilon_0}$$

d'où
$$V(x) = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} \cdot \left(x-a-\frac{e}{2}\right)^2 + \frac{\rho e a}{\varepsilon_0} ;$$

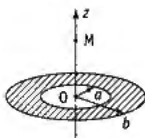
$x \geq a+\frac{e}{2}$: $E(x) = 0$ et $V(x) = \text{constante} = V\left(a+\frac{e}{2}\right)$, soit par continuité :
$V(x) = +\frac{\rho e}{\varepsilon_0}a$ et le potentiel reste borné à l'infini.

D'où le graphe :





Couronne plane chargée



Sur le plan Oxy, on considère une distribution de charges de surface, à répartition uniforme (densité σ), comprise entre les cercles de centre O et de rayons a et b ($b > a$).

Soit M un point de l'axe Oz perpendiculaire au plan de charges.

1. a. On désigne par $V(z)$ la fonction potentiel donnant le potentiel V(M) en tout point M de l'axe Oz. Montrer que l'on a :

$$V(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}[\sqrt{b^2+z^2} - \sqrt{a^2+z^2}].$$

En déduire l'expression du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ sur cet axe. On notera que l'on a $\vec{E}(z) = E(z)\vec{u}_z$.

b. Représenter le graphe $z \rightarrow E(z)$ à b fixé et pour différentes valeurs de a. (On pourra prendre $a = \eta b$ avec $\eta = \{0 ; 0{,}02 ; 0{,}1 ; 0{,}2\}$.)

Commenter les résultats obtenus.

2. Retrouver l'expression du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ par un calcul direct.

1. Ce qu'il faut savoir

- Potentiel et champ associés à une charge ponctuelle.
- Relation entre potentiel et champ : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$.
- Règles de symétrie.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. a. La distribution de charges étant d'extension finie, le calcul intégral du potentiel V(M) ne pose pas de problèmes particuliers. Il reste à noter que tous les éléments du plan xOy situés à la même distance de O contribuent de la même façon à V(M). On va donc décomposer le système de charges en couronnes élémentaires de rayon moyen r et de largeur dr : une simple intégration suffira. Le calcul de $\vec{E}(M)$ sur l'axe Oz est immédiat en remarquant que l'on a de façon générale $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V(M)$ avec ici, pour des raisons de symétrie évidentes, $\vec{E} = E(z)\vec{u}_z$, soit $\vec{E} = -\frac{dV}{dz}\vec{u}_z$.

1. b. On pourra envisager les cas limites :

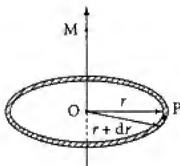
- $|z| \gg b$...
- $a = 0$ (disque uniformément chargé de rayon b) et $|z| \rightarrow 0$...

2. Le champ résultant devant être porté par l'axe Oz, il suffit de projeter chaque contribution élémentaire sur cet axe.

3. Solution

1. a. Considérons les charges situées sur la surface élémentaire délimitée par les cercles de rayon r et $r + dr$:

$$a < r < r + dr < b.$$



Toutes ces charges contribuent de la même façon au potentiel V(M) :

$$dV(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\delta q}{PM} \quad \text{avec } PM = \sqrt{r^2 + z^2}$$

et $\qquad \delta q = \sigma\delta\Sigma = \sigma\delta\Sigma = \sigma 2\pi r dr.$

D'où $\qquad dV(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{r^2 + z^2}}$

et $\qquad V(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_a^b \frac{rdr}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_a^b d[\sqrt{r^2 + z^2}].$

Soit $\qquad \boxed{V(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}[\sqrt{b^2 + z^2} - \sqrt{a^2 + z^2}]} \quad (1)$

Pour le calcul du champ électrostatique en M, il suffit de remarquer que l'axe OM étant un axe de symétrie de révolution, le champ $\vec{E}(M)$ est porté par cet axe. On peut écrire en effet :

$$\vec{E}(M) = E_{\parallel}\vec{u}_z + \vec{E}_{\perp} \quad (\perp = \text{ perpendiculaire à l'axe})$$

et l'invariance du système par rotation (d'un angle arbitraire) par rapport à l'axe Oz implique nécessairement que $\vec{E}_{\perp} = \vec{0}$.

D'où $\qquad \vec{E}(M) = E(z)\vec{u}_z.$

Or $\qquad \vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}V$, soit ici : $\vec{E}(M) = -\frac{dV}{dz}\vec{u}_z$

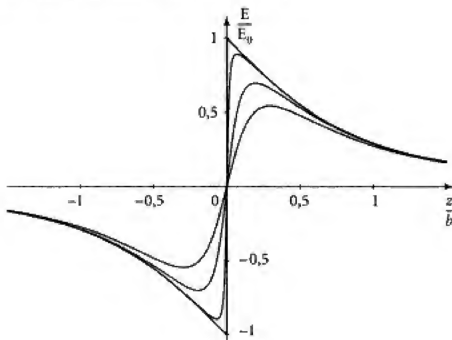
et $\qquad E(z) = -\frac{dV}{dz} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{z}{\sqrt{b^2 + z^2}} - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}}\right].$

Soit : $\qquad \boxed{\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}z\left[\frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2 + z^2}}\right]\vec{u}_z} \quad (2)$

1. b. On a ainsi $\vec{E}(z) = E(z)\vec{u}_z$ avec $E(-z) = -E(z)$.

Posons $\quad E_0 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \Rightarrow E(z) = E_0\left[\frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{z}{\sqrt{b^2 + z^2}}\right].$

On a représenté ci-dessous les graphes de $\frac{z}{b} \to E(z)$ pour une valeur de b fixée et pour différentes valeurs du rapport $\frac{a}{b}$ $\{0 ; 0{,}02 ; 0{,}1 ; 0{,}2\}$.



Commentaires

• Quand $z \to \infty$ ($z \gg b$), le système doit se comporter asymptotiquement comme une charge ponctuelle $Q = \pi(b^2 - a^2)\sigma$. Ainsi, les fonctions $V(z)$ et $E(z)$ doivent être équivalentes à :

$$V(z) \sim \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0|z|} = \frac{(b^2-a^2)\sigma}{4\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{|z|}$$

$$E(z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|z|}{z^3}.$$

Vérifions-le :

$$V(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[|z|\left(1+\frac{b^2}{z^2}\right)^{1/2} - |z|\left(1+\frac{a^2}{z^2}\right)^{1/2}\right]$$

d'où $$V(z) \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}|z|\frac{1}{2z^2}(b^2-a^2)$$

soit $$V(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\pi(b^2-a^2)}{|z|}.$$

De même $$E(z) = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0|z|}\left[\left(1+\frac{a^2}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1+\frac{b^2}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

et $$E(z) \approx \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0|z|}\left[\frac{1}{2z^2}(b^2-a^2)\right].$$

Soit encore $$\boxed{\vec{E}(z) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\pi(b^2-a^2)}{z^2}\frac{|z|}{z}\vec{u}_z}$$

On retrouve bien les résultats attendus.

• Une discontinuité du champ $\vec{E}$ apparaît pour $a = 0$. Le système se réduit alors à un disque uniformément chargé de rayon b. La relation (2) donne alors :

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} z \left[\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{b^2 + z^2}}\right] \vec{u}_z$$

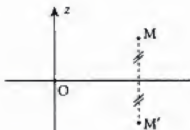
soit
$$\vec{E}(0^+) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{E}(0^-) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z \qquad (3)$$

Ces résultats sont satisfaisants car ils se confondent avec ceux d'un plan infini, uniformément chargé avec une densité σ. En effet, pour $a = 0$, fixer z et faire tendre b vers l'infini revient au même que de fixer b et faire tendre z vers 0 :

Vérifions-le en étudiant rapidement le champ électrostatique créé par le plan infini (σ uniforme).

– Le plan xOy est plan de symétrie d'où :

$\vec{E}(M') = \text{sym}[\vec{E}(M)]$ (symétrie prise par rapport à xOy).

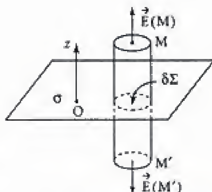


– Tout plan contenant la droite $[M, \vec{u}_z]$ est plan de symétrie ; $\vec{E}$ vecteur polaire appartient à ces plans et donc à leur intersection. Il est ainsi porté par $\vec{u}_z \Rightarrow \vec{E}(M) = E(M)\vec{u}_z$.

– Les deux résultats précédents conduisent à :

$\vec{E}(z > 0) = E_0\vec{u}_z$ et $\vec{E}(z < 0) = -E_0\vec{u}_z$.

– Enfin appliquons le théorème de Gauss :



$$E_0\delta\Sigma + E_0\delta\Sigma = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma\delta\Sigma$$

soit $E_0 = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

d'où $\vec{E}(z > 0) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z$ et $\vec{E}(z < 0) = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z$.

Ces résultats sont bien identiques à (3).

POINT MÉTHODE

Problème des distributions infinies de charges :

On pourrait s'étonner que le passage à la limite ($a \to 0$ et $b \to +\infty$) puisse se faire sur l'expression (2) et pas sur (1), c'est-à-dire sur le champ $\vec{E}(M)$ et pas sur le potentiel $V(M)$.

En effet, pour $a = 0$ et z fini, on obtient à partir de (1) et (2) :

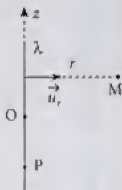
$$\begin{cases} \lim\limits_{b \to +\infty} V(z) = +\infty \quad (\text{pour } \sigma > 0) \\ \lim\limits_{b \to +\infty} \vec{E} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\dfrac{z}{|z|}\vec{u}_z \end{cases}$$

Pour s'en convaincre, il suffit de se rappeler qu'une expression du type $V(M) = \iiint_D \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\delta q(P)}{PM}$ n'a de sens que si le domaine de charges D est d'extension finie, ce qui permet notamment d'imposer le choix du potentiel nul à l'infini.

Il est donc utile de se rappeler qu'appliquer un tel résultat à des distributions infinies de charges est en général erroné : les intégrales considérées divergent.

Illustration :

Fil droit infini uniformément chargé avec une densité linéique λ :



• L'intégrale $\dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dz}{\sqrt{r^2+z^2}}$ n'est pas définie ;

• Par contre, le champ $\vec{E}$ peut être obtenu aisément à l'aide du théorème de Gauss :

$\vec{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u}_r$ (résultat classique) ;

• Or $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$, avec ici $V = V(r)$ du fait de la symétrie de révolution par rapport à Oz, soit $\vec{E} = -\dfrac{dV}{dr}\vec{u}_r$ ce qui donne : $\dfrac{dV}{dr} = -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$ et $V(r) = -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{r}{a}\right)$ en prenant une origine arbitraire à la distance $r = a$ du fil.

On retrouve bien que le potentiel diverge à l'infini, et la condition $V \to 0$ à l'infini est ici inapplicable. Il diverge également en $r = 0$ ce qui est dû à la modélisation (fil sans dimension transversale).

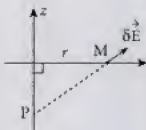
• On peut vérifier que l'expression intégrale $\vec{E} = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}dz$ redonne l'expression correcte du champ électrostatique.

On a $\vec{E} = \dfrac{\lambda\vec{u}_r}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\overrightarrow{PM}\cdot\vec{u}_r}{PM^3}dz$ (car $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$).

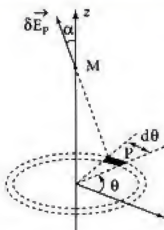
$$\vec{E} = \frac{\lambda\vec{u}_r}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{r\,dz}{(r^2+z^2)^{3/2}} \quad (\overrightarrow{PM}\cdot\vec{u}_r = r)$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda\vec{u}_r}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{(1+u^2)^{3/2}} \quad \left(\text{avec } u = \frac{z}{r}\right)$$

et $$\vec{E} = \frac{\lambda\vec{u}_r}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\frac{u}{(1+u^2)^{1/2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u}_r.$$



2. Calcul direct du champ $\vec{E}(M)$: considérons à cet effet la charge δq comprise entre les cercles de rayon r et $r + dr$ et associée à un secteur angulaire de mesure $d\theta$:



$$\delta q = \sigma\delta\Sigma = \sigma(r\,d\theta)(dr)$$

$$\delta q = \sigma r\,dr\,d\theta.$$

Cette charge crée en M un champ élémentaire $\delta\vec{E}_P$ tel que :

$$\delta\vec{E}_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\delta q\overrightarrow{PM}}{PM^3}.$$

Comme il a déjà été signalé, le champ résultant doit être porté par l'axe Oz. On a donc $\vec{E}(M) = E\vec{u}_z$ et :

$$\delta E = \delta\vec{E}_P \cdot \vec{u}_z = \frac{\delta q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}\cdot\vec{u}_z}{PM^3} = \frac{\delta q\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 PM^2}.$$

D'où
$$\delta E = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\alpha\, r\,dr\,d\theta}{(r^2+z^2)} \text{ car } PM^2 = r^2+z^2.$$

Soit après une intégration immédiate selon $\theta\left(\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\right)$:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_a^b \frac{\cos\alpha\, r\,dr}{(r^2+z^2)}.$$

Or
$$\cos\alpha = \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} \Rightarrow E = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\int_a^b \frac{r\,dr}{(r^2+z^2)^{3/2}}.$$

Posons $u = r^2$, il vient : $E = \dfrac{\sigma z}{4\varepsilon_0}\displaystyle\int_{a^2}^{b^2}\frac{du}{(u+z^2)^{3/2}}$

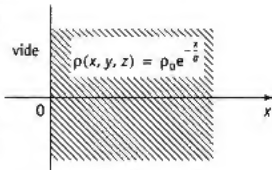
soit $E = \dfrac{\sigma z}{4\varepsilon_0}\cdot\left[-2(u+z^2)^{-\frac{1}{2}}\right]_{a^2}^{b^2}.$

Finalement $\vec{E}(z) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{\sqrt{a^2+z^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{b^2+z^2}}\right]\vec{u}_z$, comme il se doit.

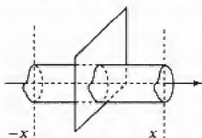
703 Demi-espace chargé

1. On considère un plan infini xOy possédant une charge de surface uniformément répartie avec une densité σ.
Déterminer le champ électrostatique créé de part et d'autre du plan.
En déduire la fonction potentiel associée vérifiant $V = 0$ sur le plan.
Donner les graphes représentant $E(x)$ et $V(x)$.

2. Le demi-espace $x > 0$ est caractérisé par une distribution volumique de charges de densité $\rho(x, y, z) = \rho_0 e^{-\frac{x}{a}}$.
La région $x < 0$ est vide de charges.
Déterminer le potentiel et le champ en tout point de l'espace et tracer les graphes associés. Commenter.
On prendra $V(0) = 0$.



• Considérons alors une surface de Gauss cylindrique dont les génératrices sont perpendiculaires au plan yOz (le cylindre est symétrique par rapport à ce plan).



Le théorème de Gauss s'écrit :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\delta\Sigma} = \frac{Q^{int}}{\varepsilon_0}.$$

Or $\Sigma = \Sigma_L \cup \Sigma_x \cup \Sigma_{-x}$; Σ_x et Σ_{-x} ont la même aire, notée Σ_0 ;

et $$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\delta\Sigma} = \iint_{\Sigma_L} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\delta\Sigma} + \iint_{\Sigma_x} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\delta\Sigma} + \iint_{\Sigma_{-x}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\delta\Sigma}.$$

La première intégrale est nulle puisqu'en tout point, le champ $\vec{E}$ est porté par la surface ($\vec{E} \cdot \overrightarrow{\delta\Sigma} = 0$). Le champ $\vec{E}$ non défini en $x = 0$ reste cependant borné et ne pose pas de problèmes particuliers à l'application du théorème de Gauss (par ailleurs, on pourrait toujours revenir à la modélisation $[\rho, e]$ évoquée précédemment…).

Sur Σ_x, le champ est uniforme et vaut $E(x)\overrightarrow{u_x}$ d'où :

$$\iint_{\Sigma_x} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\delta\Sigma} = E(x)\Sigma_0 \quad \text{(normale de même sens que } \overrightarrow{u_x}\text{)}.$$

De même $$\iint_{\Sigma_{-x}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\delta\Sigma} = -E(-x)\Sigma_0 \quad \text{(normale de sens opposé à } \overrightarrow{u_x}\text{)}.$$

D'où $$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\delta\Sigma} = [E(x) - E(-x)]\Sigma_0 = 2E(x)\Sigma_0 \quad \text{(d'après (2))}.$$

Point méthode

C'est parce que l'on a montré que E, ne dépendant que de x, est le même en tout point de Σ que l'on peut sortir $E(x)$ de l'intégrale ; c'est une constante vis-à-vis de cette intégration.

Or $Q^{int} = \sigma\Sigma_0$ et le théorème de Gauss s'écrit ici :

$$2E(x)\Sigma_0 = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma\Sigma_0 \Rightarrow E(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Soit $$\boxed{\vec{E}(x>0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{u_x} \quad \text{et} \quad \vec{E}(x<0) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{u_x}}$$

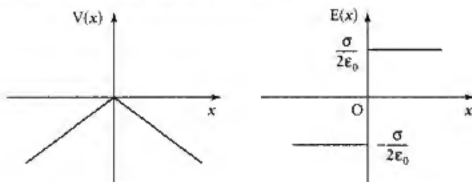
• Quant au potentiel $V(x)$, il s'obtient facilement à partir de la relation $\frac{dV}{dx} = -E(x)$

d'où avec $V(0) = 0$:

$$V(x > 0) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}x \quad \text{et} \quad V(x < 0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}x.$$

Soit en regroupant ces résultats $\boxed{V(x) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}|x|}$

Donnons une représentation graphique de $E(x)$ et $V(x)$:



Commentaires

La traversée de la nappe surfacique de charges s'accompagne d'une discontinuité du champ :

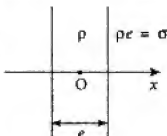
$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{12}.$$

$\vec{E}_2 = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n}_{12}$ ① | ② $\vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n}_{12}$

$\vec{n}_{12}$

Cette discontinuité n'est en fait qu'une limitation liée au modèle surfacique.

On peut concevoir ce système comme la limite d'une plaque d'épaisseur e et présentant une charge volumique ρ.



Pour les mêmes raisons de symétrie, on a $\vec{E} = E(x)\vec{u}_x$, avec $E(-x) = -E(x)$.
Et avec le théorème de Gauss :

$$x > \frac{e}{2} : \Sigma_0(E(x) - E(-x)) = \frac{1}{\varepsilon_0}\Sigma_0\rho e \Rightarrow E(x) = \frac{\rho e}{2\varepsilon_0};$$

$$0 < x < \frac{e}{2} : \Sigma_0(E(x) - E(-x)) = \frac{1}{\varepsilon_0}\Sigma_0\rho 2x \Rightarrow E(x) = \frac{\rho x}{\varepsilon_0}.$$

2. Remarquons tout d'abord que la distribution de charges ne dépendant que de x, les plans passant par $M(x, y, z)$ et contenant Δ parallèle à $\vec{u}_x$ (*cf.* 1.) restent des plans de symétrie. Il en résulte que l'on a toujours : $\vec{E} = E(x)\vec{u}_x$ le système restant invariant par translation selon Oy et Oz.

• Le calcul du potentiel s'effectue selon $\frac{dV}{dx} = -E(x)$:

– Pour $x < 0$, le champ est uniforme et $V(x)$ est une fonction affine de x, c'est-à-dire :

$$\boxed{V(x<0) = \frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0}x}$$

en prenant $V(0) = 0$:

– Pour $x > 0$: $\frac{dV}{dx} = -\frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0}\left(1 - 2e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

Soit $V(x) = -\frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0}\left[x + 2ae^{-\frac{x}{a}} + C\right]$.

Point méthode

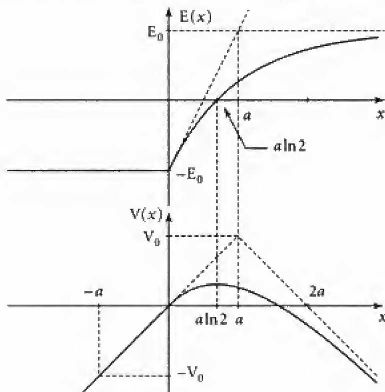
La constante C se détermine en assurant la continuité du potentiel en $x = 0$, la distribution de charges étant volumique.

D'où $V(0) = 0 = -\frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0}[2a + C]$ et $C = -2a$.

Finalement :

$$\boxed{V(x>0) = -\frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0}\left[x - 2a\left(1 - e^{-\frac{x}{a}}\right)\right]}$$

D'où les graphes donnant $E(x)$ et $V(x)$ avec $E_0 = \frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0}$ et $V_0 = \frac{\rho_0 a^2}{2\varepsilon_0}$:



Commentaires

• Dans cet exercice, la distribution de charges tend bien vers zéro quand x tend vers $+\infty$. Ce n'est évidemment pas une raison pour conclure qu'il en est de même du champ électrostatique $\left(\lim_{x \to +\infty} E(x) = \frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0}\right)$. Il serait également erroné de considérer que le champ tend vers zéro quand $x \to -\infty$ sous prétexte que toutes les distances (des charges au point où l'on calcule $\vec{E}$) tendent vers l'infini : le système de charges est lui-même infini.

• On a établi que $\lim_{x \to +\infty} E(x) = \frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0}$ et $\underset{x<0}{E(x)} = -\frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0}$. En fait, ces résultats étaient prévisibles puisque $\rho_0 a$ représente la charge totale contenue dans un cylindre d'axe parallèle à Ox et de section de base de surface unité.

$$Q = \int_0^\infty \rho(x)\,dx \cdot 1 = \rho_0 \int_0^\infty e^{-\frac{x}{a}}dx = \rho_0 a.$$

Pour ce qui est des points à l'infini, du côté des x positifs, et des points situés en $x < 0$, le système de charges se comporte comme une simple plaque perpendiculaire à Ox et possédant une charge surfacique $\sigma = \rho_0 a$ (on peut regrouper les tranches d'épaisseur dx_0).

• Dans le cas où le système proposé représenterait ce qui se passe « localement » à la surface d'un conducteur en équilibre électrostatique, il nous faudrait imposer :

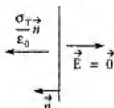
$\lim_{x \to +\infty} E(x) = 0$ (le champ est nul à l'intérieur du conducteur).

Il suffit alors de décaler les expressions des champs établies au 2. de la quantité $\frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0}$.

Ainsi, on aurait :

$$\vec{E}(x<0) = \left(-\frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0}\right)\vec{u}_x = -\frac{\rho_0 a}{\varepsilon_0}\vec{u}_x.$$

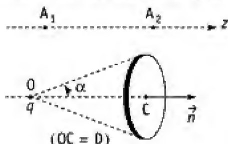
Soit en notant $\sigma_T = \rho_0 a \Rightarrow$ $\boxed{\vec{E}(x<0) = \frac{\sigma_T}{\varepsilon_0}\vec{n}}$ $(\vec{n} = -\vec{u}_x)$.



Résultat classique connu sous le nom de loi de Coulomb (cours de deuxième année).

704 Lignes de champ

Sur un axe Oz sont placées deux charges ponctuelles q_1 en A_1 et q_2 en A_2.



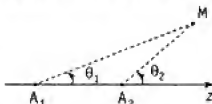
1. Questions préliminaires :

a. Soit une charge q placée au point O de l'axe OC d'un disque $\mathcal{D}$. Le point O et le bord du disque définissent un cône de demi-angle au sommet α. Calculer le flux ϕ, à travers le disque, du champ électrostatique $\vec{E}$ créé par la charge q.

On exprimera ϕ en fonction des grandeurs q, α et ε_0 (permittivité du vide).

b. On revient au système (q_1, q_2) et on se place dans le cas où $q_1 + q_2 \neq 0$. Montrer qu'à des distances « grandes » de A_1 et A_2, ce système se comporte – à la limite – comme une charge unique $Q = q_1 + q_2$ placée au barycentre G des points A_1 et A_2, affectés des coefficients q_1 et q_2.

2. On cherche à déterminer le réseau des lignes de champ. À cet effet, on repère tout point M du plan de figure par les angles $\theta_1 = (\overrightarrow{A_1z}, \overrightarrow{A_1M})$ et $\theta_2 = (\overrightarrow{A_2z}, \overrightarrow{A_2M})$. On se limitera au demi-plan supérieur, θ_1 et θ_2 pouvant varier sur l'intervalle $(0 ; \pi)$.



Déterminer l'équation d'une ligne de champ de $\vec{E}$ en fonction de q_1, q_2, θ_1 et θ_2.
On pourra envisager séparément les domaines du plan $z > z_{A_2}$, $z_{A_1} < z < z_{A_2}$ et $z < z_{A_1}$.

3. On suppose dans cette question que l'on a $q_1 q_2 > 0$.

a. Est-il possible qu'une ligne de champ joigne les points A_2 et A_1 ? Définir un point particulier I du segment $[A_1A_2]$.

b. Donner une caractéristique des lignes de champ à l'infini.
Représenter le réseau de lignes de champ pour $q_2 = 4q_1$ et $q_2 > 0$.

4. On prend maintenant $q_1 q_2 < 0$ et $q_2 > 0$. Montrer que les lignes de champ partant de A_2 soit vont à l'infini, soit rejoignent A_1. Déterminer la valeur limite α_{2l} de l'angle α_2.
Donner, pour $q_2 = -2q_1$, la valeur de α_{2l} et tracer le réseau de lignes de champ.
Commenter : on isolera notamment le cas où $q_1 + q_2 = 0$.

1. Ce qu'il faut savoir

Points de cours

- Flux du champ électrostatique.
- Ligne de champ – Tube de champ.

Outil mathématique

- Notion d'angle solide.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. Un calcul intégral est envisageable si l'on veut éviter la notion d'angle solide. Cette dernière conduit cependant beaucoup plus rapidement au résultat demandé.

Étudier un système de charges en des points très éloignés du domaine dans lequel elles sont confinées revient à faire un **développement multipolaire**. Le premier terme correspond à la charge totale $Q = q_1 + q_2$, et le deuxième est du type moment dipolaire : le choix du point G barycentre des points $A_1(q_1)$ et $A_2(q_2)$ s'impose naturellement car le moment dipolaire, défini selon $\vec{P} = q_1\overrightarrow{GA_1} + q_2\overrightarrow{GA_2}$, prend alors une valeur nulle ($q_1\overrightarrow{GA_1} + q_2\overrightarrow{GA_2} = \vec{0}$ est une propriété du barycentre).

2. Caractériser une ligne de champ revient ici à caractériser le tube de champ obtenu par rotation de cette courbe autour de l'axe A_1A_2. On écrira alors que le flux à travers toute section du tube est une constante dans chaque domaine vide de charges. Cette constante s'exprimera simplement à l'aide de q_1, q_2, θ_1 et θ_2 (utiliser à cet effet l'expression établie au 1.)

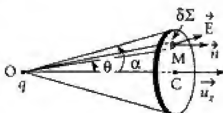
3. et **4.** Dans les cas particuliers envisagés par la suite, on aura à examiner deux possibilités :

• lignes de champ joignant A_1 et A_2, ce qui doit être compatible avec l'équation établie précédemment ;

• lignes de champ de type $A_2 \to \infty$, alors on doit avoir θ_1 et θ_2 qui tendent vers une valeur commune θ_L (d'après le 1. b.) : il reste à discuter l'existence de θ_L.

Solution

1. a. Le flux élémentaire à travers l'élément de surface $\delta\Sigma$ est donné par :



$$\delta\phi = \vec{E}\cdot\overrightarrow{\delta\Sigma} = \vec{E}\cdot\vec{n}\,\delta\Sigma = E_z\,\delta\Sigma.$$

Or $\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\vec{u}}{r^2}$, où $\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{OM}$ et $r = OM$.

D'où : $E_z = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\vec{r}\cdot\overrightarrow{u_z}}{r^3} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{D}{r^3}$.

De plus : $\cos\theta = \dfrac{D}{r} \Rightarrow E_z = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{D}{D^3}\cos^3\theta = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 D^2}\cos^3\theta$.

Et $\delta\phi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 D^2}\cos^3\theta\,\delta\Sigma$.

Prenons en compte la contribution des éléments de surface situés sur la couronne comprise entre $\rho = CM$ et $\rho + d\rho$ (c'est-à-dire pour des angles de l'intervalle $[\theta\,;\,\theta + d\theta]$).

Dès lors : $\delta\Sigma = 2\pi\rho\,d\rho$, avec $\rho = D\tan\theta$.

1. Ce qu'il faut savoir

- Force de Coulomb.
- Énergie potentielle d'interaction de deux charges ponctuelles.
- Énergie potentielle d'une charge soumise à un champ électrostatique extérieur.
- Loi fondamentale de la dynamique.
- Théorème de l'énergie mécanique.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. La force agissant sur chaque particule est la force d'interaction coulombienne : la relation fondamentale de la dynamique doit permettre de relier la vitesse d'une particule à sa position.

On peut aussi utiliser la conservation de l'énergie mécanique, la force coulombienne étant conservative : il faudra, au préalable, déterminer l'énergie potentielle intérieure E_p^{int} associée à l'interaction coulombienne entre les deux particules.

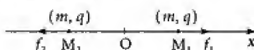
2. Le problème est analogue dans le cas de trois particules. Il sera nécessaire de généraliser l'expression de E_p^{int}.

3. Solution

1. Une première méthode consiste à appliquer le principe de la dynamique à l'une des deux particules.

Prenons comme axe Ox la droite passant par les positions initiales des deux particules, l'origine O étant prise au milieu du segment de longueur r_0.

Le point matériel M_1 (particule $[m, q]$, abscisse initiale $x_0 = \frac{r_0}{2}$) est soumis à la force $\vec{f}_1 = f_1 \cdot \vec{u}_x$ avec $f_1 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{(M_1M_2)^2}$.



Du fait de la symétrie, on a à chaque instant.

$$\overline{OM_1} = x(t) \text{ et } \overline{OM_2} = -x(t) \Rightarrow \overline{M_2M_1} = 2x(t).$$

Soit : $\vec{f}_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{4x^2}\vec{u}_x$ (1)

L'équation du mouvement de la particule M_1 s'écrit alors :

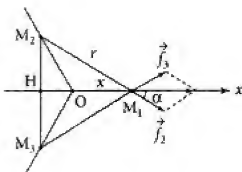
$$m\frac{d^2\overrightarrow{OM_1}}{dt^2} = \vec{f}_1 = f_1\vec{u}_x.$$

Le mouvement s'effectue donc selon l'axe Ox et :

$$m\ddot{x} = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^2} \quad (2)$$

2. • Première méthode :

On utilise les mêmes modes de raisonnement qu'à la question précédente : par raison de symétrie, les trois particules occupent à chaque instant des positions correspondant aux sommets d'un triangle équilatéral dont le centre O reste fixe dans un référentiel galiléen. Considérons la particule M_1, sur l'axe Ox : elle est soumise aux forces d'interaction $\vec{f_2}$ et $\vec{f_3}$ de la part des particules M_2 et M_3,



avec $\vec{f_2} + \vec{f_3} = f \cdot \vec{u_x}$ et $f = f_2\cos\alpha + f_3\cos\alpha = 2f_2\cos\alpha$

ici $\cos\alpha = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, d'où : $f = \sqrt{3} \cdot f_2 = \sqrt{3} \cdot \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

avec $r\cos\alpha = HM_1 = \frac{3}{2}x$ (O est – aussi – le point de concours des médianes).

Finalement :

$$f = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\left(\frac{3}{2}x \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{q^2\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 3x^2}.$$

La loi fondamentale de la dynamique appliquée à la particule M_1 donne :

$$m\ddot{x} = f \Rightarrow \ddot{x} = \frac{q^2\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_0 m \cdot 3x^2}.$$

Multiplions par $\dot{x}$ et intégrons entre les instants 0 et t ($\dot{x}(0) = 0$ et $x(0) = \frac{2}{3}r_0\cos\alpha = \frac{r_0}{\sqrt{3}}$) :

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - 0 = \frac{q^2\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_0 \times 3}\int_0^t \frac{\dot{x}'\mathrm{d}t}{x'^2} = \frac{q^2\sqrt{3}}{12\pi\varepsilon_0}\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}x'}{x'^2}$$

d'où :

$$\dot{x}^2(t) = \frac{q^2\sqrt{3}}{6\pi\varepsilon_0 m}\left[-\frac{1}{x(t)} + \frac{\sqrt{3}}{r_0}\right].$$

Les particules s'éloignent indéfiniment l'une de l'autre pour atteindre une vitesse limite V_∞ telle que :

$$\boxed{V_\infty = \frac{|q|}{\sqrt{2\pi\varepsilon_0 m r_0}}} \quad (7)$$

• Seconde méthode :

Comme dans la première question, on peut définir, pour le système des trois particules, une énergie potentielle intérieure E_p^{int} associée aux forces de Coulomb.

On détermine E_p^{int} en reprenant un raisonnement identique à celui développé dans le point cours du 1. La formule (5) devient alors :

$$E_p^{int} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1q_2}{r_{12}} + \frac{q_1q_3}{r_{13}} + \frac{q_2q_3}{r_{23}}\right)$$

soit d'une manière plus générale :

$$E_p^{int} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i>j}\frac{q_iq_j}{r_{ij}}.$$

Initialement, cette énergie potentielle prend la valeur :

$$E_p^{int} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3q^2}{r_0} \quad (r_{ij} = r_0).$$

La conservation de l'énergie mécanique du système proposé entre l'instant initial et le moment où les particules sont infiniment éloignées, donne alors :

$$E_m = E_c + E_p = \text{constante}$$

$$0 + \frac{3q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0} = 3\cdot\left(\frac{1}{2}mV_\infty^2\right) + 0.$$

Soit $V_\infty^2 = \dfrac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0 m r_0}$ et $\boxed{V_\infty = \dfrac{|q|}{\sqrt{2\pi\varepsilon_0 m r_0}}}$

ce qui est bien le résultat déjà obtenu.

706 Potentiel de Yukawa

On se propose de déterminer la distribution de charges qui crée en tout point M de l'espace ($\overrightarrow{OM} = r\cdot\vec{u}$, $r = \|\overrightarrow{OM}\|$) un potentiel électrostatique de la forme :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r}\cdot e^{-\frac{r}{a}}$$

q étant la charge élémentaire ($q = 1{,}6\cdot10^{-19}$ C) et a une distance ($a = 10^{-10}$ m).

1. Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en tout point M (différent de l'origine O).

2. Calculer le flux de ce champ à travers la surface d'une boule de centre O et de rayon r, et en déduire la charge $Q(r)$ contenue dans cette boule.
Étudier les cas limites $r \to \infty$ et $r \to 0$: quelles conclusions peut-on en tirer ?

3. Déterminer la densité de charge volumique $\rho(r)$ répartie dans l'espace autour de O. La distribution de charges étudiée peut être prise comme modèle électrostatique d'un atome. Qu'en pensez-vous ?

Solution

1. Les équipotentielles V = constante sont des sphères de centre O, ce qui implique que le champ $\vec{E}$, qui leur est orthogonal est radial. Son expression en coordonnées sphériques se réduira donc à une seule composante : $\vec{E} = E \cdot \vec{u}$.

Or $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$ avec ici $V = V(r)$ où r, θ, φ sont les coordonnées sphériques.

Soit $\vec{E} = -\dfrac{dV}{dr}\vec{u}$ et $E = E(r) = -\dfrac{dV}{dr}$

d'où $E(r) = -\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\dfrac{1}{r^2} - \dfrac{1}{ar}\right]\exp\left(-\dfrac{r}{a}\right)$

et $$\boxed{\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}_r}{r^2}\left[1 + \frac{r}{a}\right]\exp\left(-\frac{r}{a}\right)} \quad (1)$$

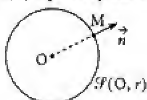
Remarquons que $\vec{E}$ est défini et continu dans tout l'espace sauf en $r = 0$ où il n'est pas défini. Les charges responsables de ce champ se réduisent donc à :

– une distribution volumique $\rho(r)$ pour $r > 0$ (une distribution surfacique de charges provoquerait une discontinuité du champ…) ;

– « éventuellement » une charge ponctuelle en $r = 0$.

2. Le flux du champ électrostatique $\vec{E}$ à travers la sphère $\mathcal{S}(O, r)$ a pour expression :

$$\phi = \oint\!\!\oint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot \vec{n}\,\delta\mathcal{S}$$



avec ici $\vec{E} \cdot \vec{n}\,\delta\mathcal{S} = E(r)\vec{u} \cdot \vec{n}\,\delta\mathcal{S} = E(r)\delta\mathcal{S}$

($\vec{n} = \vec{u}$ et $\vec{n} \cdot \vec{u} = 1$).

soit $\phi = \oint\!\!\oint_{\mathcal{S}} E(r)\delta\mathcal{S}$

et $\phi = E(r)\oint\!\!\oint_{\mathcal{S}} \delta\mathcal{S}$ ($E(r)$ = constante sur la surface $\mathcal{S}$).

D'où $\phi = E(r) \cdot 4\pi r^2$

et en remplaçant $E(r)$ par son expression (*cf.* (1)).

$$\boxed{\phi = \frac{q}{\varepsilon_0}\left(1 + \frac{r}{a}\right)\exp\left(-\frac{r}{a}\right)}$$

Or, d'après le théorème de Gauss, le flux ϕ du champ électrostatique est égal au quotient par ε_0 de la charge contenue à l'intérieur de la surface fermée à travers laquelle on a calculé le flux :

$$\phi = \frac{1}{\varepsilon_0}Q(r)$$

d'où $$\boxed{Q(r) = q\left(1 + \frac{r}{a}\right)\exp\left(-\frac{r}{a}\right)}$$

■ Lignes équipotentielles :

Elles correspondent à V(M) = cste soit $x^2 - \frac{y^2}{2} = \text{cste}$.

Ce sont des hyperboles de centre O, d'axe Ox ou Oy et d'asymptotes $y = \pm\sqrt{2}x$.

■ Lignes de champ :

Pour déterminer les lignes de champ au voisinage de O, calculons le champ $\vec{E}$ associé à l'expression approchée du potentiel :

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{q}{\pi\varepsilon_0 a^3}\cdot x$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = +\frac{q}{\pi\varepsilon_0 a^3}\cdot\frac{y}{2}$$

d'où l'équation différentielle des lignes de champ (courbes tangentes en chaque point au champ $\vec{E}$) :

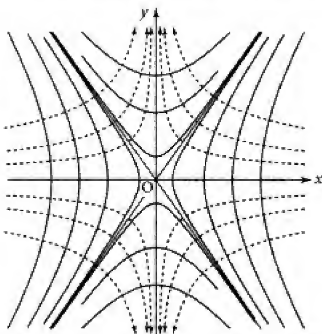
$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} \Rightarrow -\frac{dx}{x} = \frac{2dy}{y}$$

$$\frac{2dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0 \Rightarrow 2\ln y + \ln x = \text{constante}$$

soit, pour les lignes de champ, $\boxed{xy^2 = \text{constante}}$

■ Représentation graphique :

Donnons l'allure de ces courbes (équipotentielles et lignes de champ) dans le plan xOy et au voisinage de O (en tenant compte du fait que ce sont des courbes orthogonales) :



(équipotentielles en trait plein – lignes de champ en pointillé).

■ *Propriété de la fonction* B(z) :

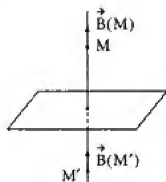
Le plan xOy de la spire peut être considéré comme plan de symétrie. On doit donc avoir :

$\vec{B}(M') = -\text{Sym}[\vec{B}(M)]$ avec $M' = \text{Sym}(M)$

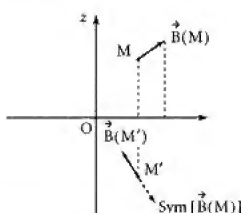
Sym désigne l'opération de symétrie par rapport à ce plan.

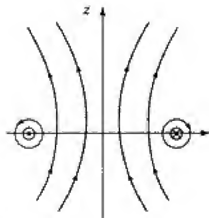
Soit pour les points de l'axe :

$$B(-z) = B(z).$$



Et en dehors de l'axe :



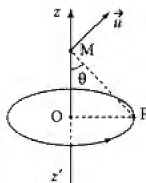


■ **Déterminons le champ B(z) :**

D'après l'expression de Biot et Savart,

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\oint \vec{\delta l} \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}.$$

Or $\vec{\delta l} \wedge \overrightarrow{PM} = PM\delta l\vec{u}$.



Soit en projection sur l'axe $z'z$ (puisque le champ $\vec{B}$ est porté par cet axe) :

$$(\vec{\delta l} \wedge \overrightarrow{PM}) \cdot \vec{u}_z = PM\delta l\vec{u} \cdot \vec{u}_z = PM\sin\theta\delta l$$

et $$B(z) = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\oint \frac{PM\sin\theta}{PM^3}\delta l = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{\sin\theta}{PM^2}\oint \delta l.$$

$\oint \delta l = 2\pi a$ soit finalement avec $\sin\theta = \dfrac{a}{PM}$

$$B(z) = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{\sin^3\theta}{a^2}2\pi a \Rightarrow \boxed{B(z) = \frac{\mu_0 i}{2a}\sin^3\theta(z)} \quad (1)$$

1. Déterminer, en tout point de l'espace,

l'expression du champ magnétique $\vec{B}$ dans le cadre de l'hypothèse du solénoïde infiniment long. On posera $n = pm$ et $B_0 = \mu_0 ni$.

2. Retrouver le résultat précédent par application du théorème d'Ampère.

1. Ce qu'il faut savoir

- Règles de symétries.
- Champ magnétique créé par un solénoïde (modélisation du solénoïde droit « infini »).
- Théorème d'Ampère.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. On décomposera le système en un ensemble de solénoïdes « emboîtés » d'épaisseur infinitésimale $\mathrm{d}r_0$.

3. Solution

1. Pour le système proposé, les symétries restent les mêmes que celles du solénoïde droit infini. On a donc :

$$\vec{B} = B(M)\vec{u_z}.$$

De plus, les invariances selon z et selon θ (coordonnées cylindriques d'axe $z'z$) impliquent :

$$\vec{B} = B(r)\vec{u_z}.$$

On peut alors décomposer le système en solénoïdes d'épaisseur $\mathrm{d}r_0$ que l'on va assimiler à des solénoïdes droits infinis comportant un nombre $\delta n'$ de spires par unité de longueur avec :

$$(p\,\mathrm{d}z)\cdot\left(m\frac{\mathrm{d}r_0}{R_2 - R_1}\right)i \quad = \quad \delta n'\,\mathrm{d}z\,i$$

D'où

$$\boxed{\delta n' = mp\frac{\mathrm{d}r_0}{R_2 - R_1} = n\frac{\mathrm{d}r_0}{R_2 - R_1}} \quad (1)$$

Le champ magnétique associé vaut (cf. champ crée par un solénoïde droit « infini ») :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\delta B'} = \vec{0} & \text{pour } r > r_0 \\ \overrightarrow{\delta B'} = \mu_0 \delta n' i \overrightarrow{u_z} & \text{pour } r < r_0 \Rightarrow \overrightarrow{\delta B'} = \mu_0 n i \dfrac{dr_0}{R_2 - R_1} \overrightarrow{u_z}. \end{cases}$$

Il suffit maintenant de sommer les contributions de chaque solénoïde élémentaire.

• À l'extérieur de tous les solénoïdes, on aura donc $\vec{B} = \vec{0}$.

$$\boxed{\vec{B} = \vec{0} \text{ pour } r > R_2}$$

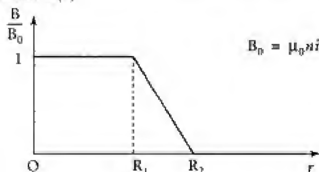
• Pour $r < R_1$, les champs créés par tous les solénoïdes s'ajoutent et :

$$\vec{B}(r < R_1) = \mu_0 n i \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr_0}{R_2 - R_1} \overrightarrow{u_z} \Rightarrow \boxed{\vec{B}(r < R_1) = \mu_0 n i \overrightarrow{u_z}}$$

• Pour $R_1 < r < R_2$, seuls les solénoïdes de rayon supérieur à r contribuent à $\vec{B}$. Ainsi :

$$\vec{B} = \mu_0 n i \int_{r}^{R_2} \frac{dr_0}{R_2 - R_1} \overrightarrow{u_z} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \mu_0 n i \frac{R_2 - r}{R_2 - R_1} \overrightarrow{u_z}}$$

D'où le graphe donnant $B(r)$:

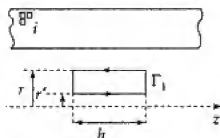


Commentaire

Pour $r < R_1$, le système se réduit bien évidemment à un solénoïde droit infini comportant $n = mp$ spires par unité de longueur parcourues par le courant i.

2. Ayant démontré que $\vec{B} = B(r)\overrightarrow{u_z}$ (*cf.* 1.), on se propose d'utiliser le théorème d'Ampère.

• Considérons le contour Γ_1 du plan de figure situé dans le domaine $r < R_1$. Le théorème d'Ampère s'écrit :



$$\mathcal{C}(\vec{B}) = \mu_0 i_T$$

$\mathcal{C}(\vec{B}) \equiv$ circulation de $\vec{B}$ sur un contour Γ ;

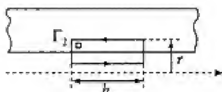
$i_T \equiv$ courant traversant toute surface orientée s'appuyant sur Γ. Ici $i_T = 0$ et $\mathcal{C}(\vec{B}) = B(r')h - B(r)h$.

D'où $B(r) = B(r')$.

On a bien un champ uniforme, noté B_0, pour $r < R_1$.

• On démontre de la même façon que B est uniforme pour $r > R_2$. Notons-le B_2.

• Considérons maintenant le contour Γ_2. On a :



$$hB_0 - hB(r) = \mu_0 i_T$$

où $i_T = i \cdot (ph) \cdot \left(m\dfrac{r - R_1}{R_2 - R_1}\right)$

soit : $B(r) = B_0 - \mu_0 ni\dfrac{r - R_1}{R_2 - R_1}$.

• Le champ doit être continu en $r = R_1$ et $r = R_2$. On a bien $B(R_1) = B_0$.

Il faut donc que :

$$B_2 = B_0 - \mu_0 ni.$$

Il reste à utiliser l'argument que le champ B_2 est nul puisqu'il peut être considéré comme la résultante des champs extérieurs associés à des « solénoïdes emboités » d'axes $z'z$.

Dès lors $B_2 = 0$ et $B_0 = \mu_0 ni$.

D'où

$$\vec{B}(r \geq R_2) = \vec{0}$$
$$\vec{B}(R_1 < r < R_2) = \mu_0 ni\left[1 - \frac{r - R_1}{R_2 - R_1}\right]\vec{u}_z = \mu_0 ni\frac{R_2 - r}{R_2 - R_1}\vec{u}_z$$
$$\vec{B}(r \leq R_1) = \mu_0 ni\vec{u}_z$$

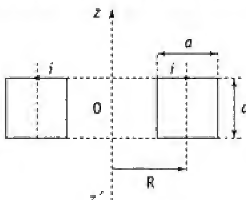
Comme il se doit.

713 Solénoïde en forme de tore

N spires sont enroulées sur un tore de section carrée (côté de longueur a) et de rayon moyen R.

Elles sont parcourues par un même courant i, et on note Φ le flux total les traversant.

On supposera que le système est invariant dans toute rotation d'axe $z'z$ (N grand ...).



■ **Détermination de** $B(r\,;z)$ **:**

Le champ $\vec{B}$ est orthoradial, et $B(r\,;z)$ est constant à r et z fixés. Nous pouvons donc lui appliquer le théorème d'Ampère en choisissant, pour le contour fermé Γ, un cercle d'axe Oz et de rayon r contenu dans le plan z = constante.

POINT MÉTHODE

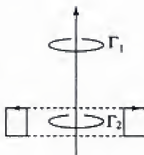
Le théorème d'Ampère nous indique que la circulation du champ $\vec{B}$ sur un contour Γ fermé est égale au produit de μ_0 (perméabilité du vide) par le courant algébrique total i_T traversant toute surface orientée s'appuyant sur Γ.

L'efficacité de ce théorème repose sur la possibilité de choisir un contour Γ sur lequel le calcul de la circulation reste simple. C'est le cas lorsque les symétries sont suffisantes, ce qui correspond à notre étude et justifie le choix, pour Γ, d'un cercle d'axe Oz.

On a donc :

$$\oint \vec{B}\cdot\vec{\delta l} = \mu_0 i_T \Rightarrow B(r\,;z)2\pi r = \mu_0 i_T \quad (1)$$

Plusieurs cas peuvent se produire :



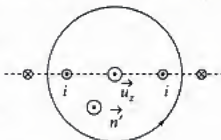
– Contour Γ_1 tel que $|z| > \frac{a}{2}$.
Il vient $i_T = 0$, aucun courant n'étant enlacé par Γ_1, et donc $B = 0$.

– Contour Γ_2 tel que $|z| < \frac{a}{2}$ et $r < R - \frac{a}{2}$.
On a également pour la même raison $i_T = 0$ et $B = 0$.

– Contour Γ_2 tel que $|z| < \frac{a}{2}$ et $r > R + \frac{a}{2}$.
Cette fois-ci, $i_T = 0$ parce que les différents courants se compensent, d'où $B = 0$.

> On en déduit que le champ magnétique $\vec{B}(M)$ est nul à l'extérieur du tore.

– Contour Γ circulaire intérieur au tore.



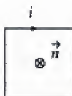
Il est traversé, dans le sens de l'axe Oz, par un courant total $i_T = Ni$, d'où :

$$B(r\,;z)2\pi r = \mu_0 Ni.$$

Soit un champ magnétique à l'intérieur du tore défini par la relation :

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 Ni}{2\pi r}\vec{u_\theta}} \quad (2) \quad R - \frac{a}{2} < r < R + \frac{a}{2} \text{ et } |z| < \frac{a}{2}.$$

2. Une spire est traversée par un flux $\varphi = \iint \vec{B}\cdot\vec{n}\,\delta\Sigma$.



Or ici $\vec{n} = \vec{u_\theta}$ et $\vec{B}$ ne dépend que de r, d'où :

$$\varphi = \frac{\mu_0 Ni}{2\pi}\iint\frac{dr\,dz}{r} = \frac{\mu_0 Ni}{2\pi}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}dz\int_{R-\frac{a}{2}}^{R+\frac{a}{2}}\frac{dr}{r}.$$

Finalement $\quad \varphi = \dfrac{\mu_0 N i a}{2\pi} \ln\left[\dfrac{R + \frac{a}{2}}{R - \frac{a}{2}}\right]$.

Et pour le flux total $\Phi = N\varphi = \dfrac{\mu_0 N^2 i a}{2\pi} \ln\left[\dfrac{R + \frac{a}{2}}{R - \frac{a}{2}}\right]$ (chaque spire est traversée par le même flux φ).

Le coefficient L défini par $\Phi = Li$ a donc pour valeur :

$$\boxed{L = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \ln\left[\frac{R + \frac{a}{2}}{R - \frac{a}{2}}\right]}$$

3. Pour R suffisamment grand devant a, on peut confondre dans l'expression (1) r et R.

En effet, on a $R - \frac{a}{2} < r < R + \frac{a}{2}$ et $1 - \frac{a}{2R} < \frac{r}{R} < 1 + \frac{a}{2R}$ avec $\frac{a}{R} \ll 1$.

Soit $\overrightarrow{B_{int}} \approx \mu_0 \dfrac{N}{2\pi R} i \overrightarrow{u_\theta}$ et $\overrightarrow{B_{ext}} = \vec{0}$.

Or $2\pi R$ représente la « longueur l du tore » et $\dfrac{N}{l}$ le nombre n de spires par unité de longueur. Nous obtenons donc, dans l'approximation $\dfrac{a}{R} \ll 1$:

$$\boxed{\overrightarrow{B_{int}} = \mu_0 n i \overrightarrow{u_\theta}}$$

Il s'agit bien entendu du résultat classique obtenu pour le solénoïde droit dit « infiniment long ».

• Pour obtenir une expression approchée du coefficient L, développons le logarithme :

$$\ln\left[\frac{R + \frac{a}{2}}{R - \frac{a}{2}}\right] = \ln\left[\frac{1 + \frac{a}{2R}}{1 - \frac{a}{2R}}\right] \approx \frac{a}{R} \quad \text{et} \quad L \approx \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \cdot \frac{a}{R} = \mu_0 \frac{N^2}{(2\pi R)^2} \cdot (2\pi R \cdot a^2).$$

Soit avec $n = \dfrac{N}{2\pi R}$ et $\mathcal{V} = 2\pi R a^2$ le volume du tore (pour $R \gg a$) : $\boxed{L \approx \mu_0 n^2 \mathcal{V}}$

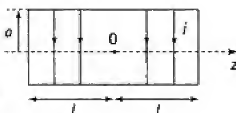
Commentaires

• Cette grandeur L représente en fait le coefficient d'auto-inductance du bobinage torique. Il est proportionnel au carré du nombre de spires par unité de longueur et au volume du tore.

• On peut considérer qu'un solénoïde torique dont le rayon moyen R est grand devant les dimensions caractérisant sa section constitue un modèle réaliste du « solénoïde infini ». Les effets de bord (selon $\overrightarrow{u_\theta}$) y sont inexistants puisqu'il se referme sur lui-même.

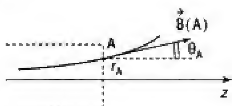
724 Ligne de champ

Un solénoïde droit présente une section circulaire de rayon a. Sa longueur 2ℓ est très grande devant a et il possède n spires jointives par unité de longueur. Il est parcouru par un courant i.
On s'intéresse à la ligne de champ qui coupe le plan $z = 0$ à une distance r_0 de l'axe. Elle ressort en traversant la face avant du solénoïde en un point A.



1. Quelle relation simple relie r_A et r_0 ?

2. Dans le cas où r_0 est petit devant a, déterminer l'expression donnant l'angle θ_A défini par $\theta_A = (\vec{u_z}, \vec{B}(A))$.



1. Ce qu'il faut savoir

- Notion de tube de champ.
- $\vec{B}$ est à flux conservatif.
- Champ créé par un solénoïde « infini » ; champ créé sur son axe par un solénoïde droit de longueur finie.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. Pour déterminer une relation entre r_0 et r_A, on utilisera le fait que le champ magnétique est à flux conservatif. La longueur du solénoïde étant très grande devant son rayon, on pourra assimiler le champ autour de O à celui du solénoïde « infini ». Il restera à évaluer la composante B_z du champ créé sur le disque de rayon r_A : le résultat peut s'obtenir en juxtaposant deux solénoïdes identiques au précédent.

2. L'expression de l'angle θ_A nécessite la connaissance des composantes $B_z(A)$ et $B_r(A)$ du champ magnétique en A. $B_z(A)$ a été déterminé à la question précédente.

On calculera $B_r(A)$ au voisinage de l'axe ($r_A \ll a$) en considérant un petit cylindre centré sur l'axe et en lui appliquant la propriété « $\vec{B}$ est à flux conservatif ».

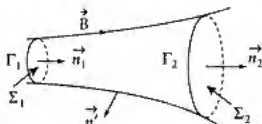
3. Solution

1.

POINT COURS

• Un tube de champ est la surface engendrée par les lignes de champ s'appuyant sur une même courbe fermée Γ_1 (*cf.* figure).

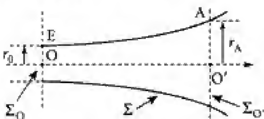
• Or le champ magnétique possède la propriété d'être à *flux conservatif* ce qui implique :



$$\iint_{\Sigma_2} \vec{B}\cdot\vec{n_2}\,\delta\Sigma = \iint_{\Sigma_1} \vec{B}\cdot\vec{n_1}\,\delta\Sigma$$

soit $\boxed{\Phi(\Sigma_1) = \Phi(\Sigma_2)}$, Σ_1 et Σ_2 étant orientées de la même manière.

• Considérons donc la portion de tube de champ délimitée par les disques D_O (centre O, rayon r_0), $D_{O'}$ (centre O', rayon r_A) et par la surface latérale obtenue en faisant tourner la ligne de champ EA autour de l'axe OO'.



D'après ce qui précède, nous avons :

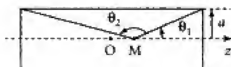
$$\Phi(\Sigma_O) = \Phi(\Sigma_{O'}) \quad (1)$$

Or la section $z = 0$ est très éloignée des bords du solénoïde (en comparaison à la dimension transversale a : $l \gg a$). Il est ainsi légitime de faire l'approximation $\vec{B}(z = 0\,;\,r) \approx \mu_0 n i \vec{u_z}$ (champ du solénoïde dit « infini »).

Commentaires

Sur l'axe, on a :

$$B(z\,;\,0) = \frac{\mu_0 n i}{2}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2).$$



Or $\quad \cos\theta_1 = \dfrac{l-z}{\sqrt{a^2+(l-z)^2}}$

et $\quad \cos\theta_2 = -\dfrac{l+z}{\sqrt{a^2+(l+z)^2}}$.

Pour $z = 0$, il vient : $B(0\,;\,0) = \dfrac{2\mu_0 n i}{2}\dfrac{l}{\sqrt{a^2+l^2}} = \mu_0 n i\left(1+\dfrac{a^2}{l^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

On a bien $B(0\,;\,0) = \mu_0 n i\left[1 + o\left(\dfrac{a}{l}\right)\right] \approx \mu_0 n i$ pour $a \ll l$.

Soit $\Phi(\Sigma_O) = (\mu_0 n i)\cdot \pi r_0^2$ (2)

quant à $\Phi(\Sigma_{O'})$, il s'exprime selon :

$$\Phi(\Sigma_{O'}) = \iint_{\Sigma_{O'}} \vec{B}\cdot\overrightarrow{n_{O'}}\,\delta\Sigma.$$

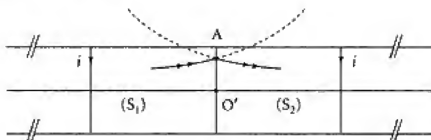
Or $\overrightarrow{n_{O'}} = \overrightarrow{u_z}$ et $\vec{B}\cdot\overrightarrow{n_{O'}} = B_z(z_{O'}\,;r)$

d'où : $\Phi(\Sigma_{O'}) = \iint_{\Sigma_{O'}} B_z(z_{O'}\,;r)\,\delta\Sigma.$

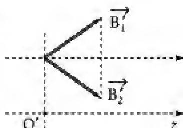
soit encore :

$$\Phi(\Sigma_{O'}) = \int_0^{r_A} B_z(z_{O'}\,;r)\,2\pi r\,dr. \quad (3)$$

Pour évaluer $B_z(z_{O'}\,;r)$, on peut faire la remarque suivante : associons deux solénoïdes identiques au précédent en les plaçant bout à bout (*cf.* figure ci-dessous).



Le solénoïde S_1 crée en A le champ $\overrightarrow{B'_1}$, le solénoïde S_2 le champ $\overrightarrow{B'_2}$. Ces champs sont contenus dans le plan défini par $O'z$ et $O'A$, et ils sont symétriques par rapport à $A'z$. De plus, on a $B'_{1z} = B'_{2z} = B_z(r)$ grandeur que l'on cherche à déterminer.



Or l'association de S_1 et S_2 constitue un solénoïde de rayon a et de longueur $4l$ dont O′ est le centre. On peut donc admettre avec une excellente approximation ($l \gg a$) que :

$$\overrightarrow{B'}_{S_1\cup S_2}(A) = \mu_0 n i \overrightarrow{u_z}.$$

Soit puisque $\vec{B}_{S_1\cup S_2}(A) = \overrightarrow{B'_1} + \overrightarrow{B'_2} = 2B_z(z_{O'}\,;r)\overrightarrow{u_z}$.

Et $$B_z(z_{O'}\,;r) = \frac{\mu_0 n i}{2} \quad (4)$$

L'équation (1) devient, avec (2), (3) et (4) : $\mu_0 n i \pi r_0^2 = \dfrac{\mu_0 n i}{2}\displaystyle\int_0^{r_A} 2\pi r\,dr$

et $\mu_0 n i \pi r_0^2 = \dfrac{\mu_0 n i}{2}\pi r_A^2 \Rightarrow \boxed{r_A = \sqrt{2}\,r_0}$ (5) pour $l \gg a$.

On rappelle que S étant un point fixe, on a :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,[\ln(SM)] = \frac{\overrightarrow{SM}}{SM^2}.$$

On exprimera Φ en fonction de μ_0, I_1, I_2 et des distances AM et A'M.

On pourra prendre $\Phi = 0$ pour $AM = A'M = 1$.

b. Comment peut-on définir simplement les lignes de champ à partir de la fonction Φ ?

Montrer qu'il est possible de relier le problème étudié à un problème d'électrostatique que l'on précisera.

c. On se propose d'étudier le champ $\vec{B}$ en des points du plan xOy très éloignés de A et A'. On suppose donc que MA et $MA' \gg AA'$. Faire un développement du potentiel Φ. En déduire que l'on a :

$$\vec{B}(M) = \overrightarrow{u_z} \wedge \frac{\mu_0}{2\pi}(I_1 + I_2)\frac{\overrightarrow{O'M}}{O'M^2} \quad \text{(O' point du segment AA')}.$$

Comment faut-il choisir O' pour que cette approximation soit la meilleure possible ?

Que devient ce point pour $I_1 = I_2$?

B. On revient au cas où $I_1 = I_2 = I > 0$ et on superpose au système précédent un champ uniforme $\overrightarrow{B_0}$ perpendiculaire à $\overrightarrow{u_z}$. On obtient le réseau de lignes de champ représenté sur les figures ci-dessous :

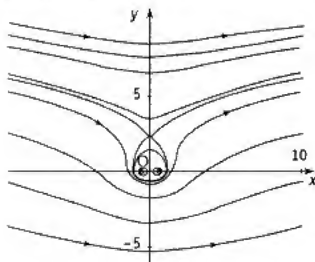


Fig. 2

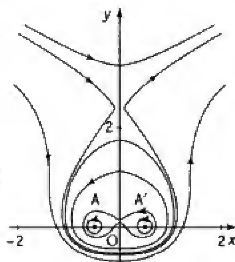


Fig. 3

La figure 3 est un « zoom » de la figure 2.

Les figures 2 et 3 correspondent à $B_0 = 0{,}8\dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$.

1. a. Commenter ces « cartes » de lignes de champ. On précisera la direction et le sens de $\overrightarrow{B_0}$.

b. Donner l'expression du nouveau potentiel $\Phi'(M)$.

2. Mettre qualitativement en évidence deux lignes particulières L_c et L'_c et étudier leur existence : on cherchera à déterminer les ordonnées des points d'intersection de L_c et L'_c avec l'axe Oy. En déduire une valeur critique B_c de B_0.

3. On suppose : $B_0 > B_c$. Étudier rapidement les variations de $B(y)$ pour $y > 0$. Donner l'allure des lignes de champ.

Solution

A. 1. a. ▪ Propriétés de symétries :

• Le plan xOy est plan d'antisymétrie de la distribution de courants. Le champ magnétique au point M de ce plan y est donc contenu :

$$\vec{B}(M) = B_x(x\,;y)\vec{u}_x + B_y(x\,;y)\vec{u}_y.$$

Le champ ne dépend pas de z puisque le système est invariant par translation selon $\vec{u}_z$.

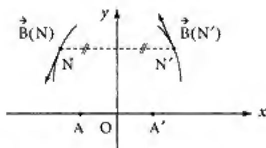
• D'autre part, dans le cas où $I_1 = I_2$, le plan yOz est plan de symétrie. Il en résulte que :

– le champ sur l'axe $y'y$ est perpendiculaire à cet axe :

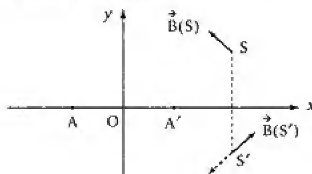
$$\vec{B}(0\,;y) = f(y)\vec{u}_x\,;$$

– En deux points symétriques N et N' du plan xOy, on a :

$$\vec{B}(N') = -\text{Sym}\,[\vec{B}(N)].$$



• Enfin, on peut considérer que le plan xOz est également plan de symétrie. Le champ $\vec{B}$ est donc, sur l'axe $x'x$, perpendiculaire à cet axe, et en deux points S et S' du plan xOy symétriques par rapport à Ox, on a :

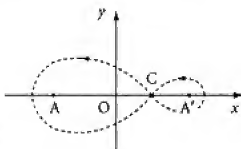


A. 1. b. • Au voisinage de A (respectivement de A′), l'influence du fil traversant le plan xOy en A (respectivement en A′) est prépondérante et on aura des lignes de champ entourant A (respectivement A′).

• Loin de A et A′ (pour MO ≫ AA′), on doit retrouver des lignes de champ quasi circulaires centrées en un point G du segment AA′ (pour $I_1 \neq I_2$, on n'a plus la symétrie précédente et le point G ne se confond plus avec le point O… On verra dans la partie 2 qu'il s'agit en fait du barycentre de $A(I_1)$ et $A'(I_2)$ …).

• Il existe donc, une ligne critique constituée de deux lobes dissymétriques se rejoignant en un point C de champ nul. On a :

$$\vec{B}(C) = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{I_1}{AC} - \frac{I_2}{A'C}\right)\vec{u}_y.$$



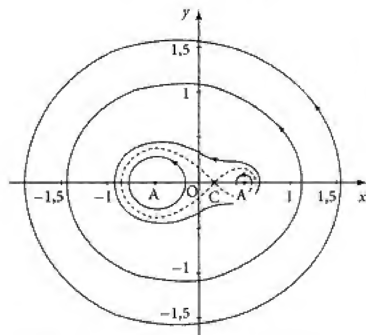
C est défini selon (C ∈ [AA′]) :

$$\frac{CA'}{CA} = \frac{I_2}{I_1}.$$

Pour $I_1 = 2I_2$, cas correspondant à la figure ci-dessous, il vient :

$$CA = 2CA' \Rightarrow \overline{AC} = 2\overline{CA'} \Rightarrow \overline{OC} - \overline{OA} = 2(\overline{OA'} - \overline{OC})$$

d'où : $3\overline{OC} = \overline{OA} + 2\overline{OA'} \Rightarrow \overline{OC} = \frac{1}{3}(-0{,}5 + 2 \times 0{,}5) = \frac{1}{6}$ pour $\overline{OA'} = \overline{AO} = 0{,}5$.



On a pris :
• AO = OA′ = 0,5.
• $I_1 = 2I_2 > 0$.

Le point G est ici symétrique de C par rapport à O.

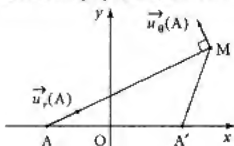
Commentaire

Les lignes de champ restent symétriques par rapport à Ox, mais la symétrie par rapport à Oy est perdue ($I_1 \neq I_2$).

A. 2. a. Le champ $\vec{B}$ créé dans le plan xOy par les deux fils droits est donné par :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\frac{\vec{u}_\theta(A)}{AM} + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi}\frac{\vec{u}_\theta(A')}{A'M}.$$

$\vec{u}_\theta(A)$ vecteur unitaire directement perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{AM}$.



Or $\vec{u}_\theta(A) = \vec{u}_z \wedge \vec{u}_r(A)$

Soit $\dfrac{\vec{u}_\theta(A)}{AM} = \vec{u}_z \wedge \dfrac{AM\,\vec{u}_r(A)}{AM^2} = \vec{u}_z \wedge \dfrac{\overrightarrow{AM}}{AM^2}$.

Finalement, nous obtenons :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{2\pi}\vec{u}_z \wedge \left[I_1\frac{\overrightarrow{AM}}{AM^2} + I_2\frac{\overrightarrow{A'M}}{A'M^2}\right].$$

Et d'après le texte, A et A′ étant des points fixes du plan xOy, $\dfrac{\overrightarrow{AM}}{AM^2} = \overrightarrow{\text{grad}}[\ln(AM)]$

et $\dfrac{\overrightarrow{A'M}}{A'M^2} = \overrightarrow{\text{grad}}[\ln(A'M)]$.

D'où : $\vec{B}(M) = \vec{u}_z \wedge \left\{\dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi}\overrightarrow{\text{grad}}(\ln(AM)) + \dfrac{\mu_0 I_2}{2\pi}\overrightarrow{\text{grad}}(\ln(A'M))\right\}$.

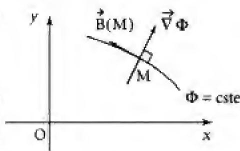
Soit : $\vec{B}(M) = \vec{u}_z \wedge \overrightarrow{\text{grad}}\Phi(M)$ avec :

$$\boxed{\Phi(M) = \frac{\mu_0}{2\pi}I_1\ln(AM) + \frac{\mu_0}{2\pi}I_2\ln(A'M)}$$

A. 2. b. Considérons dans le plan xOy une ligne équi-Φ.

On a $\vec{B}(M) = \vec{u}_z \wedge \overrightarrow{\text{grad}}\Phi(M)$.

Le vecteur $\vec{E'} = \overrightarrow{\text{grad}}\Phi(M)$ est normal en M à la ligne équi-Φ. Le vecteur $\vec{u}_z \wedge \overrightarrow{\text{grad}}\Phi(M)$ est donc tangent à cette ligne.



> Il en résulte que les lignes de champ (de $\vec{B}$) se confondent avec les « équipotentielles » Φ = cste.

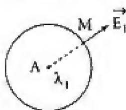
Commentaire

> C'est ainsi qu'on a pu tracer, sur ordinateur, les faisceaux de lignes de champ…

On peut également remarquer que ce potentiel est « analogue » à celui obtenu dans un problème d'électrostatique pour un système de deux fils uniformément chargés (densités linéiques λ_1 et λ_2). Les fils sont parallèles à $\vec{u}_z$ et passent par A et A'.

D'après le théorème de Gauss appliqué à chaque fil, pris séparément, on aurait :

$$E_1 \cdot 2\pi \mathrm{AM} h = \frac{1}{\varepsilon_0}\lambda_1 h \Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{\mathrm{AM}}}{\mathrm{AM}^2}.$$



D'où au total :

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left(\lambda_1\frac{\overrightarrow{\mathrm{AM}}}{\mathrm{AM}^2} + \lambda_2\frac{\overrightarrow{\mathrm{A'M}}}{\mathrm{AM}^2}\right) \quad (\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2).$$

Au champ $\vec{E}_1$, on associe le potentiel électrostatique $V_1(M)$ tel que (symétrie cylindrique) :

$$\vec{E}_1 = -\frac{dV_1}{dr_1}\vec{u}_{r_1} \quad \left(\vec{u}_{r_1} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AM}}}{\mathrm{AM}}\right).$$

Soit $$-\frac{dV_1}{dr_1} = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_1} \quad (r_1 = \mathrm{AM})$$

et $$V_1 = -\frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0}\ln r_1 \quad (+\text{cste}).$$

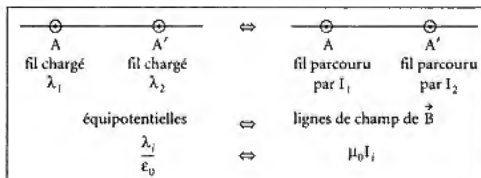
Les équipotentielles, pour le problème des deux fils chargés, sont définies, dans le plan xOy, par :

$$\frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0}\ln(\mathrm{AM}) + \frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0}\ln(\mathrm{A'M}) = \text{cste}.$$

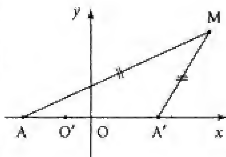
Quant aux équipotentielles du problème réel (Φ = cste), elles correspondent à :

$$\frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\ln(\mathrm{AM}) + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi}\ln(\mathrm{A'M}) = \text{cste}.$$

D'où



A. 2. c. On suppose maintenant que $O'M \gg AA'$, O' étant un point du segment AA'.



Faisons alors un développement limité du potentiel Φ :

$$\Phi = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\ln(AM) + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi}\ln(A'M)$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi}\ln(\overrightarrow{AM}^2) + \frac{\mu_0 I_2}{4\pi}\ln(\overrightarrow{A'M}^2) = \Phi_1 + \Phi_2.$$

Or $\quad (\overrightarrow{AM})^2 = (\overrightarrow{O'M} - \overrightarrow{O'A})^2 = \overrightarrow{O'M}^2 - 2\overrightarrow{O'A}\cdot\overrightarrow{O'M} + \overrightarrow{O'A}^2$

$$= O'M^2\left[1 - \frac{2\overrightarrow{O'A}\cdot\overrightarrow{O'M}}{O'M^2} + \frac{\overrightarrow{O'A}^2}{O'M^2}\right].$$

D'où $\quad \Phi_1 = \dfrac{\mu_0 I_1}{4\pi}\left[\ln(O'M^2) + \ln\left\{1 - \dfrac{2\overrightarrow{O'A}\cdot\overrightarrow{O'M}}{O'M^2} + \dfrac{\overrightarrow{O'A}^2}{O'M^2}\right\}\right]$

et $\quad \Phi_1 \approx \dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi}\ln(O'M) + \dfrac{\mu_0 I_1}{4\pi}\left(-2\dfrac{\overrightarrow{O'M}}{O'M^2}\cdot\overrightarrow{O'A}\right)$

soit : $\quad \Phi \approx \underbrace{\dfrac{\mu_0}{2\pi}(I_1 + I_2)\ln(O'M)}_{\varphi_a} - \underbrace{\dfrac{\mu_0}{2\pi}\dfrac{\overrightarrow{O'M}}{O'M^2}\cdot(I_1\overrightarrow{O'A} + I_2\overrightarrow{O'A'})}_{\varphi_b} + \cdots$

φ_a correspondrait, pour le problème d'électrostatique, à un fil droit de trace O' dans le plan xOy. Pour le problème réel, il s'agit d'un fil droit parcouru par le courant $I_1 + I_2$;

φ_b serait associé à un terme dipolaire linéique... ;

Φ se réduit d'autant plus vite à φ_a que φ_b est nul, c'est-à-dire que le point O' est choisi de telle sorte que :

$$I_1\overrightarrow{O'A} + I_2\overrightarrow{O'A'} = \vec{0}.$$

Introduisons le barycentre G des points $A(I_1)$ et $A'(I_2)$:

$$(I_1 + I_2)\overrightarrow{O'G} = I_1\overrightarrow{O'A} + I_2\overrightarrow{O'A'} \quad (I_1 + I_2 \neq 0 \text{ ici donc G existe bien}).$$

d'où $\overrightarrow{O'G} = \vec{0}$ et **O' se confond avec G.**

Il en résulte que, suffisamment loin de A et A', les lignes de champ se « confondent » avec des cercles de centre G.

$$\boxed{\vec{B}(M) \approx \vec{u}_z \wedge \frac{\mu_0}{2\pi}(I_1 + I_2)\frac{\overrightarrow{GM}}{GM^2}}$$

– dans le cas où $I_1 = I_2$, G s'identifie au point O ce qui est normal (symétrie) ;

– pour $I_1 = 2I_2$, on a :

$$2\overline{GA} + \overline{GA'} = 0 \Rightarrow 2(\overline{OA} - \overline{OG}) + (\overline{OA'} - \overline{OG}) = 0 \text{ et } 3\overline{OG} = 2\overline{OA} + \overline{OA'}$$

et pour $\overline{OA'} = 0{,}5 = -\overline{OA}$, $\overline{OG} = -\dfrac{1}{6}$ (le point G est symétrique de C...).

B. 1. a. • Suffisamment loin des points A et A′, les champs créés par les fils droits vont devenir négligeables devant $\overrightarrow{B_0}$; les lignes de champ doivent alors quasiment se confondre avec des droites parallèles à la direction de $\overrightarrow{B_0}$.

La figure 2 nous indique alors que le champ $\overrightarrow{B_0}$ est parallèle à l'axe Ox.

$$\overrightarrow{B_0} = B_0\overrightarrow{u_x}.$$

• D'autre part, pour $I_1 = I_2$ et $\overrightarrow{B_0} = B_0\overrightarrow{u_x}$, le plan yOz reste un plan symétrie :

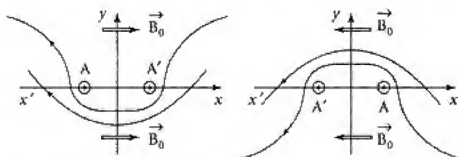
– les lignes de champ coupent l'axe $y'y$ à angle droit ;

– les lignes de champ sont symétriques par rapport à $y'y$.

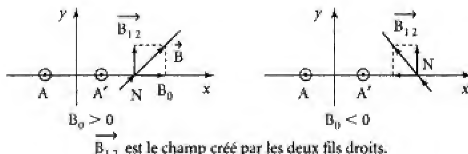
Ce que l'on observe bien sur la figure 2.

Évidemment l'existence du champ $\overrightarrow{B_0} = B_0\overrightarrow{u_x}$ détruit la symétrie par rapport à $x'x$. Mais changer B_0 en $-B_0$ reviendrait à faire, pour ce qui est du tracé des lignes de champ, une symétrie par rapport à $x'x$.

On passe d'une figure à l'autre par une simple rotation de π autour de Oz :



Enfin, il est à noter que pour $I_1 = I_2 = I_0 > 0$, on a ici $B_0 > 0$. Pour s'en convaincre, il suffit de prendre en compte la ligne de champ qui coupe l'axe Ox en un point N tel que ON > OA′.



$\overrightarrow{B_{12}}$ est le champ créé par les deux fils droits.

B. 1. b. On a : $\overrightarrow{B'} = \overrightarrow{B_{12}}(M) + B_0\overrightarrow{u_x}$

où $\overrightarrow{B_{12}}(M) = \overrightarrow{u_z} \wedge \overrightarrow{\text{grad}}\Phi$ avec $\Phi = \dfrac{\mu_0}{2\pi}\{I_1 \ln(AM) + I_2 \ln(A'M)\}$.

De plus : $\overrightarrow{B_0} = B_0\overrightarrow{u_x} = \overrightarrow{u_z} \wedge (-B_0\overrightarrow{u_y}) = \overrightarrow{u_z} \wedge \overrightarrow{\text{grad}}(-B_0 y)$.



LES NOUVEAUX
Précis
BRÉAL

Une collection tenant compte de vos besoins et de vos contraintes, conçue pour s'entraîner efficacement et progresser tout au long de l'année.

- **Des exercices variés**, classés par thème et de difficulté progressive, couvrent la totalité du programme.
- **Des solutions entièrement rédigées** détaillent l'ensemble des méthodes et des raisonnements à connaître en première année.
- **De nombreux commentaires** enrichissent les corrigés d'astuces, de conseils et d'explications supplémentaires.

Les Nouveaux Précis Bréal sont **la collection de référence** pour réussir sa prépa et intégrer une grande école d'ingénieurs.

Réf. : 209. 0354 – ISBN : 978 2 84291 961 0
www.editions-breal.fr

